УСТОЙЧИВОСТЬ КОНТАКТНОГО РАЗРЫВА В СИЛЬНОИЗЛУЧАЮЩЕМ ГАЗЕ

В. В. АЛЕКСАНДРОВ

(*Москва*)

На примере простейшего течения — двумерного стационарного бесконечного плоского контактного разрыва в невязком нетеплопроводном газе без химических реакций — изучается влияние необратимого переноса энергии излучением на устойчивость движения по отношению к бесконечно малым возмущениям границы раздела.

Будем предполагать, что невозмущенное движение представляет собой скольжение газа, занимающего верхнее полупространство $y > 0$, по газу, занимающему нижнее полупространство $y < 0$, со скоростью $w = \mathrm{const} > 0$ в положительном направлении оси x. Газу, занимающему верхнее (нижнее) полупространство, отнесем индекс 1(2). Предполагая, простоты ради, газ совершенным и линеаризируя уравнения движения излучающей среды [1] относительно невозмущенного движения, получаем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial^2 p_j'}{\partial t^2} - a_{jT}{}^2 \Delta_j p_j' = \frac{p}{T} \frac{\partial^2 T_j'}{\partial t^2} \qquad (j=1,\,2) \tag{1}$$

и уравнение энергии

$$\frac{\partial^2 p_j'}{\partial t^2} - a_{js}{}^2 \Delta_j p_j' = (\gamma_j - 1) \frac{\partial Q_j}{\partial t} \qquad (j=1,\,2)$$

$$\Delta_j = \frac{\partial^2}{\partial x_j{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad x_j = x - w_j t \tag{2}$$

Здесь штрихами обозначены возмущенные величины; p и T — давление и температура в невозмущенном течении, которые должны быть приняты постоянными во всем пространстве; γ — показатель адиабаты; a_s и a_T — изэнтропическая и изотермическая скорости звука в газе; Q — скорость потери энергии единичным объемом газа за счет излучения, а скорость w_j равна w при $y > 0$ и нулю при $y < 0$. Вообще говоря, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, $a_{1s} \neq a_{2s}$, $a_{1T} \neq a_{2T}$.

Можно показать, что для рассматриваемого линеаризированного течения возмущенное излучение, зависящее от частоты электромагнитных колебаний, можно заменить эффективным серым излучением. Поэтому будем рассматривать серое излучение, находящееся в локальном термодинамическом равновесии; при этом заметим, что анализ распространения малых возмущений [2, 3] в излучающе-поглощающей среде весьма сложен.

Воспользуемся разложением интенсивности излучения в ряд по сферическим гармоникам, а именно P_1-приближением [4]. В принятых предположениях

$$Q_j = \varkappa_j (U_j' - 16\sigma T^3 T') \qquad (j=1,2) \tag{3}$$

где U — объемная плотность энергии излучения, умноженная на скорость света в газе, $\varkappa$ — объемный коэффициент поглощения газа, σ — постоянная Стефана — Больцмана.

Добавляя к (1) — (3) уравнение переноса в P_1-приближении

$$\Delta_j U_j' - 3\varkappa_j^2 U_j' = -48\sigma\varkappa_j^2 T^3 T_j' \qquad (j=1,2) \tag{4}$$

и исключая из (1) — (4) p_j' и T_j', получаем уравнение распространения малых возмущений

$$\frac{p}{16(\gamma_j-1)\sigma\varkappa_j T^4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta_j U_j' - 3\varkappa_j^2 U_j') -\right.$$

$$\left. - a_{js}^2 \Delta_j(\Delta_j U_j' - 3\varkappa_j^2 U_j')\right] + \frac{\partial}{\partial t}\Delta_j\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}U_j' - a_{jT}^2 U_j'\right) = 0 \quad (j=1,2) \tag{5}$$

Будем изучать устойчивость движения по отношению к одномерным периодическим возмущениям поверхности раздела

$$\zeta = \zeta_0 \exp[i(kx - \omega t)]$$

На поверхности разрыва необходимо поставить четыре условия: динамическое условие равенства давлений по обе стороны разрыва, кинематическое условие на скорость v' в направлении оси y и условие непрерывности плотности и потока излучения

$$\begin{gathered} p_1' = p_2' \qquad v_j' = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + w_j\frac{\partial\zeta}{\partial x} \quad (j=1,2) \\ U_1' = U_2', \qquad \frac{1}{\varkappa_1}\frac{\partial U_1'}{\partial y} = \frac{1}{\varkappa_2}\frac{\partial U_2'}{\partial y} \end{gathered} \tag{6}$$

Для устойчивости движения необходимо, чтобы при $y=\infty\,(-\infty)$ возмущенные величины с индексом 1(2) оставались ограниченными.

Выберем в качестве характерных длин и времен величины $\varkappa_j^{-1}$ (средние длины свободных пробегов фотонов) и $(a_{js}\varkappa_j)^{-1}$, при этом задача будет описываться семью параметрами

$$M = \frac{w}{a_{1s}}, \quad \gamma_j, \quad \varkappa_j, \quad B_j = \frac{\gamma_j p a_{js}}{16(\gamma_j - 1)\sigma T^4} \quad (j=1,2)$$

Здесь M — число Маха движущегося потока, а B_1, B_2 — уменьшенные в 16 раз числа Больцмана (отношение конвективного потока энергии к лучистому) для верхнего и нижнего полупространств. В дальнейшем для безразмерных величин будем использовать те же обозначения, что и для размерных.

Решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям (6), имеет форму

$$U_j' = [\lambda_j \exp(il_j y) + \mu_j \exp(im_j y)]\exp[i(kx - \Omega_j t)] \tag{7}$$

$$\Omega_j = \omega_1 - k_1 M \quad \text{при } y>0, \qquad \Omega_j = \omega_2 \quad \text{при } y<0$$

Здесь λ_j, μ_j, l_j, m_j, $j=1,2$ — комплексные постоянные (l_j, m_j — характеристические числа). Из условий на $\infty\,(-\infty)$ следует, что должно выполняться условие

$$\operatorname{Im}(l_1, m_1) \geqslant 0, \quad \operatorname{Im}(l_2, m_2) \leqslant 0. \tag{8}$$

Из уравнения (5) следует, что числа l_j и m_j должны быть корнями характеристического биквадратного уравнения относительно n

$$[B_j\Omega_j + i)n^4 + [B_j\Omega_j(3 + 2k_j^2 - \Omega_j^2) + i(2k_j^2 - \gamma_j\Omega_j^2)]n^2 +$$

$$+ B_j\Omega_j(k_j^2+3)(k_j^2 - \Omega_j^2) + ik_j^2(k_j^2 - \gamma_j\Omega_j^2) = 0 \quad (j=1,2) \tag{9}$$

Это уравнение всегда имеет два корня с неположительными и два корня с неотрицательными мнимыми частями, так что условия (8) могут быть выполнены. Условия (6) на контактном разрыве приводят к дисперсионному уравнению (сокращен общий множитель $l_2 - l_1 \neq 0$)

$$N_{12} + N_{21} = 0 \tag{10}$$

$$N_{12} = \gamma_1(\gamma_2 - 1)\{L_1M_1(m_1 - l_1)(m_2 - l_2)(\gamma_2 - 1)\varkappa_2\Omega_2^2 + \\ + [L_1L_2l_2(m_1 - m_2) + L_1M_2m_2(l_2 - m_1) + \\ + M_1L_2l_2(m_2 - l_1) + M_1M_2m_2(l_1 - l_2)](\gamma_1 - 1)\varkappa_1\Omega_1^2\}$$

Выражение для N_{21} получается из N_{12} заменой индексов 1 на 2 и 2 на 1. Здесь величины $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ размерные, и они оставлены из соображений симметрии. Величины L_j, M_j равны

$$L_j = 3 + (l_j^2 + k_j^2)\left(1 + \frac{i}{B_j\Omega_j}\right)$$
$$M_j = 3 + (m_j^2 + k_j^2)\left(1 + \frac{i}{B_j\Omega_j}\right) \quad (j = 1, 2) \tag{11}$$

Задача устойчивости сводится к нахождению соотношения между указанными выше семью параметрами, при котором дисперсионное уравнение (10) имеет корни ω с $\operatorname{Im}\omega \geqslant 0$ для всех значений волновых чисел k при условии, что l_j и m_j являются корнями характеристического соотношения (9), удовлетворяющими условию (8).

Рассмотрим предельные случаи. Для слабоизлучающего ($B \to \infty$), сильноизлучающего ($B \to 0$), слабопоглощающего ($\varkappa \to 0$), сильнопоглощающего ($\varkappa \to \infty$) газа и газа с большой удельной теплоемкостью ($\gamma \to 1$) можно получить асимптотические разложения для корней характеристического уравнения

$$\nu_1^2 = \Omega^2 + i(\gamma - 1)B^{-1}\Omega^3/(\Omega^2 + 3) + O(B^{-2}) \tag{12}$$
$$\nu_2^2 = -3 + 3B^{-1}(3 + \gamma\Omega^2)/\Omega(3 + \Omega^2) + O(B^{-2}), \quad B \to \infty$$
$$\nu_1^2 = \gamma\Omega^2 + i\gamma^{-1}(\gamma - 1)\Omega(3 + \gamma\Omega^2)B + O(B^2) \tag{13}$$
$$\nu_2^2 = 3i\gamma^{-1}\Omega B + O(B^2), \quad B \to 0$$
$$\nu_1^2 = \Omega^2 + i\gamma^{-1}B^{-1}\Omega + O(1) \tag{14}$$
$$\nu_2^2 = -3 + 3i\gamma B^{-1}\Omega + O(\varkappa^2), \quad \varkappa \to 0$$
$$\nu_1^2 = \Omega^2 + {}^1/_3(\gamma - 1)B^{-1}\Omega^3 + O(\varkappa^{-4}) \tag{15}$$
$$\nu_2^2 = i3B\Omega + (\gamma - 1 - 3B^2)\Omega^2 + O(\varkappa^{-3}), \quad \varkappa \to \infty$$
$$\nu_1^2 = {}^1/_2(\gamma + 1)\Omega^2\left[1 - \frac{(\gamma - 1)(1 - ib)}{(\gamma + 1)(1 + ib)}\right] + O(\gamma - 1)^2 \tag{16}$$
$$\nu_2^2 = \frac{-3}{1 + iB^{-1}\Omega^{-1}}\left[1 - \frac{2ib(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)(1 + ib)}\right] + O(\gamma - 1)^2, \quad \gamma \to 1$$
$$b = \frac{B^{-1}\Omega}{6/(\gamma + 1) + \Omega^2}, \qquad \nu^2 = n^2 + k^2.$$

В формулах (12) — (16) главные члены разложения для ν_1 (деформированная излучением акустическая волна) при $B \to \infty$, $\varkappa \to 0$ и $\varkappa \to \infty$ описывают распространение изэнтропических возмущений, а при $B \to 0$ — распространение изотермических возмущений. Главные члены разложений для ν_2 (индуцированная излучением волна) во всех предельных случаях указывают на затухание этой волны. При $\gamma \to 1$ разница между изэнтропическими и изотермическими возмущениями исчезает ($a_s \to a_T$).

Пользуясь разложением (12), можно получить дисперсионное уравнение для слабоизлучающего газа (сокращены множители, не несущие информации об устойчивости)

$$a_{2T}^2(\omega-kw)^2\left(-k^2+\frac{\omega^2}{a_{2s}^2}\right)^{1/2}=$$
$$=a_{1T}^2\omega^2\left[-k^2+\frac{(\omega-kw)^2}{a_{1s}^2}\right]^{1/2}+O(B_1^{-1},B_2^{-1}) \quad (17)$$

В формуле (17) и в дальнейшем используются размерные величины.

Для неизлучающего газа ($B_1=B_2=\infty$) уравнение (17) было получено Л. Д. Ландау [5]. При $\gamma_1=\gamma_2$ уравнение (17) в пределе показывает, что разрыв устойчив при условии

$$w^{2/3}>a_{1s}^{2/3}+a_{2s}^{2/3} \quad (18)$$

В предельных случаях $\varkappa_j\to 0$ и $\varkappa_j\to\infty$, $j=1, 2$ главные части дисперсионных уравнений совпадают с главной частью уравнения (17) и критерий устойчивости совпадает с обычным. В случае $\varkappa_j\to 0$ это объясняется слабым влиянием излучения на движение, а в случае $\varkappa_j\to\infty$ тем, что излученная энергия поглощается в точке излучения и также не влияет на движение. В случае $B_j\to 0$, $j=1, 2$ дисперсионное уравнение имеет вид

$$a_{2T}^2(\omega-kw)^2\left(-k^2+\frac{\omega^2}{a_{2T}^2}\right)^{1/2}=a_{1T}^2\omega^2\left[-k^2+\frac{(\omega-kw)^2}{a_{1T}^2}\right]^{1/2}+O(B_1,B_2) \quad (19)$$

Следовательно, в пределе условие устойчивости принимает вид

$$w^{2/3}>a_{1T}^{2/3}+a_{2T}^{2/3} \quad (20)$$

При $a_{2T}\to 0$ условие (20) сводится к требованию $M>\gamma_1^{-1/2}$, которое означает, что в сильноизлучающем газе может быть устойчив дозвуковой контактный разрыв ($M>0.77$ при $\gamma_1=5/3$). При $\gamma\to 1$ различие между условиями (18) и (20) исчезает. Аналогичным путем может быть исследована устойчивость в остальных предельных случаях. При $B_1\to 0$, $B_2\to\infty$, например, дисперсионное уравнение совпадает с (17), если в правой части (17) заменить a_{1s} на a_{1T} и остаточный член на $O(B_1, B_2^{-1})$.

Заметим, что полученные выводы об устойчивости в предельных случаях не зависят от конкретного вида уравнения состояния и аппроксимации уравнения переноса при помощи P_1-приближения, так как условия устойчивости получены в форме, инвариантной относительно уравнения состояния, и асимптотическое поведение акустических и индуцированных излучением возмущений качественно правильно. Отметим также сходство полученных результатов с условиями устойчивости контактного разрыва в равновесном или замороженном течении газа [6].

Поступило 11 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Прокофьев В. А. К вопросу об учете излучения при одномерном стационарном движении одноатомного газа. Уч. зап. МГУ, 1954, вып. 172.
2. Vincenti W. G., Baldwin B. S. Effect of thermal radiation on the propagation of plane acoustic waves. J. Fluid Mech., 1962, vol. 12, pt. 3.
3. Baldwin B. S. The propagation of plane acoustic waves in a radiating gas. NASA TR R-38, 1962.
4. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1961.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, Изд. 2. М., Гостехтеоретиздат, 1953.
6. Kuo Chang Wang. Instability of a vortex sheet in nonequilibrium flows. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 11.