ОБ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЯХ СЖИМАЕМОГО ГАЗА В КАНАЛЕ

И. И. МЕЖИРОВ

(*Москва*)

В данной работе для турбулентного течения сжимаемого газа устанавливаются (с точностью до постоянного множителя) законы изменения высоты (радиуса) и статического давления по длине плоского или осесимметричного канала, при которых продольная составляющая скорости и температура газа являются функциями только поперечной безразмерной координаты. В таких каналах падение плотности газа, вызванное силами трения, компенсируется увеличением площади поперечного сечения, так что профили скорости и температуры остаются неизменными во всех сечениях канала.

Полученные результаты являются обобщением на случай газа известных закономерностей для турбулентного течения несжимаемой жидкости в цилиндрическом канале.

1. Рассмотрим установившееся турбулентное движение совершенного газа в осесимметричном или плоском канале. Контур канала будем предполагать настолько плавным, чтобы статическое давление можно было считать постоянным по сечению канала.

Уравнения импульсов, неразрывности и энергии, связывающие осредненные характеристики течения, запишутся в этом случае таким образом

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{1}{y^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\mu}{R} + \varepsilon \right) y^\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right] \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (y^\nu \rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (y^\nu \rho v) = 0 \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered} \rho u \frac{\partial \theta}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{y^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ y^\nu \frac{\mu}{R} \left[\frac{\partial \theta}{\partial y} + \left(\frac{1}{P} - 1 \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \right. \\ \left. + y^\nu \varepsilon \left[\frac{\partial \theta}{\partial y} + \left(\frac{1}{P_T} - 1 \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \right\} \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь $x\delta$ и $y\delta$ — продольная и поперечная координаты; uW и vW — продольная и поперечная составляющие скорости; $\rho\rho_1$ — плотность; $p\rho_1 W^2$ — давление; θT_1 — температура торможения; TT_1 — температура; $\mu\mu_1$ — коэффициент вязкости; $\varepsilon\rho_1 W\delta$ — коэффициент турбулентной вязкости; P — число Прандтля; P_T — число Прандтля турбулентного перемешивания; δ — характерный поперечный размер канала, в качестве которого можно взять радиус или половину высоты входного сечения; ρ_1, W, T_1, μ_1 — соответственно характерные значения плотности, скорости, температуры и коэффициента вязкости (например, их значения на оси канала во входном сечении); $R = \rho_1 W\delta / \mu_1$; величина ν принимает значение 0 в случае плоского канала и 1 в случае осесимметричного канала.

Уравнение состояния газа запишем в виде

$$p = p^- \rho T \tag{1.4}$$

где $p^- \rho_1 W^2$ — давление на входе в канал ($p^- = 1 / \varkappa M^2$, M — число Маха на оси канала, $\varkappa$ — показатель адиабаты).

Зависимость коэффициента молекулярной вязкости газа от его температуры может быть любой. Безразмерный коэффициент турбулентной вязкости определим формулой

$$\varepsilon = \rho l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \tag{1.5}$$

Относительно зависимости пути смешения $l\delta$ от параметров течения не будем делать никаких предположений.

Таким образом, выписанная система уравнений является незамкнутой.

Решение уравнений турбулентного течения вязкого газа в канале должно удовлетворять следующим граничным условиям: на обеих стенках канала $u = v = 0$; в случае симметричного течения на стенке $u = v = 0$, на оси симметрии $\partial u / \partial y = 0$; $v = 0$. Таким образом, в отличие от задач теории пограничного слоя в случае канала ставится не одно, а два граничных условия для вертикальной составляющей скорости v. Давление $p(x)$ будет при этом искомой функцией наряду с другими характеристиками течения. О граничных условиях для температуры, используемых в работе, будет сказано ниже.

Интегрируя поперек канала уравнение неразрывности (1.2) и учитывая граничные условия для скорости, получаем условие постоянства расхода через все сечения канала с непроницаемыми стенками

$$\frac{d}{dx} \int_0^{y_w} y^\nu \rho u dy = 0 \tag{1.6}$$

Индекс w здесь и ниже относится к значениям величин на стенке.

2. Будем искать такие решения системы уравнений предыдущего пункта, для которых $u = u(\eta)$, $T = T(\eta)$, где $\eta = y / y_w$.

Дальше можно повторить соответствующее рассмотрение работы [1], относящееся к автомодельным ламинарным течениям, так как уравнения (1.1) и (1.3) отличаются от уравнений ламинарного движения только выражениями для напряжения трения и потока тепла.

Перейдем от независимых переменных x, y к переменным $\xi = x$, $\eta = y / y_w$. При этом

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{y_w'(\xi)}{y_w(\xi)} \frac{\partial}{\partial \eta} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{y_w(\xi)} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

Рассмотрим соотношение (1.6). Учитывая (1.4), получаем

$$\frac{d}{d\xi}\left(p y_w^{\nu+1} \int_0^{\eta_w} \frac{u}{T} \eta^\nu d\eta \right) = 0 \tag{2.1}$$

Отсюда видим, что отыскиваемые течения должны удовлетворять условию

$$p y_w^{\nu+1} = \text{const} \tag{2.2}$$

Производя в (2.1) интегрирование не от 0 до η_w, а от нуля до $\eta_1 = \text{const}$, и принимая во внимание (2.2), видим, что соотношение (2.1) тождественно удовлетворяется, т. е. любая линия $\eta = \eta_1 = \text{const}$ является линией тока. Ее уравнение в плоскости xy будет

$$y = \eta_1 y_w$$

откуда, дифференцируя обе части уравнения, находим связь между компонентами скорости в автомодельном течении

$$v = u \eta y_w' \tag{2.3}$$

Уравнения количества движения и энергии (1.1), (1.3) в переменных ξ, η имеют вид

$$\frac{\rho}{y_w}\frac{du}{d\eta}(v - u\eta y_w') = -\frac{dp}{d\xi} + \frac{1}{\eta^\nu y_w^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\eta^\nu\left(\frac{\mu}{R}+\varepsilon\right)\frac{du}{d\eta}\right] \tag{2.4}$$

$$\eta^\nu y_w\rho\frac{d\theta}{d\eta}(v - u\eta y_w') = \frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\eta^\nu\frac{\mu}{R}\left[\frac{d\theta}{d\eta}+\left(\frac{1}{P}-1\right)\frac{dT}{d\eta}\right]+\right.$$
$$\left.+\eta^\nu\varepsilon\left[\frac{d\theta}{d\eta}+\left(\frac{1}{P_T}-1\right)\frac{dT}{d\eta}\right]\right\} \tag{2.5}$$

Ввиду (2.3) левые части уравнений (2.4) и (2.5) равны нулю.

В автомодельном течении, в котором во всех сечениях канала имеет место одна и та же гидродинамическая картина, путь смешения l определяется соотношением

$$\frac{l}{y_w} = f(\eta) \tag{2.6}$$

причем вид функции $f(\eta)$ должен быть определен на основании теории турбулентности.

Рассмотрим теперь последовательно случаи плоского ($\nu = 0$) и осесимметричного ($\nu = 1$) течений.

При $\nu = 0$ в уравнении (2.4) после использования (2.6) и (2.2) переменные разделяются, и получаем

$$\left(\frac{p^-}{p}\right)^2\frac{dp}{d\xi} = \frac{d}{d\eta}\left[\frac{\mu(T)}{R}\frac{du}{d\eta}+\frac{f^2(\eta)}{T}\left|\frac{du}{d\eta}\right|\frac{du}{d\eta}\right] = -\alpha_0 = \text{const} \tag{2.7}$$

Интегрируя по ξ уравнение для давления (2.7), получаем гиперболический закон падения статического давления и линейный закон изменения высоты канала по его длине

$$\frac{p}{p^-} = (1+\alpha_0\varkappa M^2\xi)^{-1}, \qquad y_w = 1+\alpha_0\varkappa M^2\xi \tag{2.8}$$

Легко убедиться, что в случае осесимметричного канала ($\nu = 1$) переменные, вообще говоря, не разделяются. Однако если пренебречь молекулярной вязкостью по сравнению с турбулентной, т. е. считать, что $\frac{\mu}{R} \ll \varepsilon$, то получим

$$\left(\frac{p^-}{p}\right)^{3/2}\frac{dp}{d\xi} = \frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left[\eta\frac{f^2(\eta)}{T}\left|\frac{du}{d\eta}\right|\frac{du}{d\eta}\right] = -\alpha_1 = \text{const} \tag{2.9}$$

После интегрирования уравнения для давления имеем

$$\frac{p}{p^-} = \left(1+\frac{\alpha_1}{2}\varkappa M^2\xi\right)^{-2}, \qquad y_w = 1+\frac{\alpha_1}{2}\varkappa M^2\xi \tag{2.10}$$

Соотношения (2.10) справедливы только внутри поверхности тока, заключающей «турбулентное ядро» течения, вне ламинарного подслоя, в котором молекулярные вязкость и теплопроводность существенны. Однако ввиду малой толщины ламинарного подслоя при характерных для турбулентного течения числах Рейнольдса и умеренных числах M они практически могут быть распространены на все сечение канала. В этих случаях под y_w можно по-прежнему понимать радиус стенки канала.

Из (2.10) следует, что осесимметричное турбулентное автомодельное течение осуществляется в канале, радиус которого увеличивается по линейному закону, но давление при осесимметричном течении падает быстрее, чем при плоском.

Интегрируя по η уравнения для скорости (2.7) и (2.9) с учетом уравнения состояния (1.4), получаем линейный закон изменения безразмерного касательного напряжения

$$\tau = \left(\frac{\mu}{R} + \varepsilon\right)\frac{du}{dy} \qquad \left(\tau = \varepsilon\frac{du}{dy} \quad \text{при } \nu = 1\right)$$

по высоте (радиусу) канала

$$\tau = \frac{\alpha_\nu}{\nu + 1}\frac{p}{p^-}\eta \tag{2.11}$$

Постоянная α_ν в формулах (2.8), (2.10), (2.11) может быть определена только в результате полного решения задачи.

Интегрируя уравнение энергии (2.5), можно найти связь между температурой и скоростью в турбулентном автомодельном течении. После однократного интегрирования по η получаем

$$\eta^\nu\left\{\left(\frac{\mu}{R} + \varepsilon\right)\frac{d\theta}{d\eta} + \left[\frac{\mu}{R}\left(\frac{1}{P} - 1\right) + \varepsilon\left(\frac{1}{P_T} - 1\right)\right]\frac{dT}{d\eta}\right\} = C$$

Постоянная C характеризует поток тепла через стенку канала. В случае плоского канала или осесимметричного канала с кольцевым сечением она может быть отличной от нуля. При этом потоки тепла через противоположные стенки равны по абсолютной величине и имеют разные знаки, так что в соответствии с условиями автомодельности не происходит изменения температуры вдоль линий тока. В случае осесимметричного канала с круглым сечением автомодельное течение может осуществляться только при $C = 0$, т. е. при теплоизолированной стенке.

При $C = 0$ уравнение энергии сводится к конечному соотношению, если $P = P_T = \text{const}$. В этом случае получаем, интегрируя второй раз по η

$$T = 1 + \gamma(1 - u^2) \qquad (\gamma = {}^1/_2(\varkappa - 1)PM^2) \tag{2.12}$$

Здесь параметр γ учитывает влияние физических свойств газа и числа M на распределение температуры. Коэффициент восстановления температуры в таком течении равен числу Прандтля P.

Полное решение задачи об автомодельном турбулентном течении газа в канале возможно, как было указано выше, лишь при использовании теории турбулентности. Приближенно оно может быть получено на основании известных полуэмпирических соотношений.

Автор благодарен А. П. Быркину за полезное обсуждение.

Поступило 15 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Быркин А. П., Межиров И. И. О некоторых автомодельных течениях вязкого газа в канале. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 1.