

Несмотря на отсутствие численных расчетов, для случая осесимметричного течения нельзя ожидать качественно новых результатов по сравнению с выводами п. 1, ибо поведение бесселевых функций первого и второго рода напоминает поведение экспоненты.

Поступило 1 III 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейн-Заде М. А. Особенности движения жидкости в неоднородном пласте. М., «Недра», 1965.
2. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
3. Лурье М. В., Максимов В. М. Об одном способе осреднения уравнений двухфазной фильтрации в неоднородных пластах с учетом перетоков между ними. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.

### РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ КРУГОВОЙ БАТАРЕИ СКВАЖИН, РАБОТАЮЩИХ В УСЛОВИЯХ УПРУГО-ВОДОНАПОРНОГО РЕЖИМА ФИЛЬТРАЦИИ

В. Е. ВЛЮШИН

(Москва)

В данной работе делается постановка задачи об определении неустановившегося давления при совместной работе круговой цепочки скважин — стоков в концентричном, однородном, горизонтальном, круговом пласте в условиях упругого режима, допускающая возможность решения ее методами интегральных преобразований. Приводится точное решение поставленной задачи. На основании анализа точного решения и рассмотрения примера рекомендуется для практических расчетов упрощенное, приближенное решение задачи.

1. При допущениях, что движущаяся в однородной и изотропной упругой пористой среде ньютоновская жидкость обладает упругими свойствами и скорость ее фильтрации зависит линейно от градиента давления (закон фильтрации Дарси), изменение во времени распределения давления в потоке будет удовлетворять основному уравнению теории упругого режима [1]

$$\Delta p = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.1)$$

Здесь  $p$  — давление,  $\kappa$  — коэффициент пьезопроводности,  $t$  — время.

Одной из задач, используемых при проектировании и анализе разработки нефтеводоносных пластов в условиях упругого режима, является задача о плоском притоке жидкости к равнодебитным и равноотстоящим друг от друга стокам, расположенным по окружности в концентричной круговой области. К этой задаче сводятся распространенные в практике случаи эксплуатации большого числа скважин, расположенных по линиям, близким к окружности, в круговых, горизонтальных, однородных пластах.

2. Поместим начало полярной системы координат в центре батареи  $O$ ; полярную ось направим так, чтобы она проходила через центр одной из скважин. Точки  $A_i$ , в которых расположены скважины, будут иметь следующие координаты:

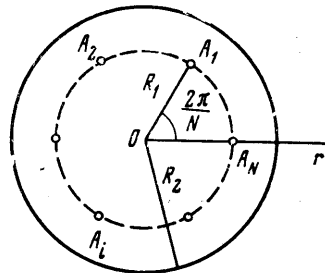
$$A_i \left( R_i; \frac{2\pi}{N} i \right) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Здесь  $R_i$  — радиус батареи скважин,  $N$  — число скважин в батарее.

Скважины будем считать точечными стоками с одинаковыми дебитами, равными  $q$ . Общий дебит всех скважин — дебит батареи  $Q$  — будет равен

$$Q = Nq \quad (2.1)$$

Будем также считать, что на границе пласта поддерживается постоянное, равное начальному давление  $p_0$ .



При сделанных предположениях относительно условий эксплуатации задача сводится к решению уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial P}{\partial \tau} - \sum_{i=1}^N \frac{2\pi}{N} \delta \left( r - R, \varphi - \frac{2\pi}{N} i \right) \quad (2.2)$$

$$(0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad \tau > 0)$$

при начальном условии

$$P = 0 \quad \text{при } \tau = 0, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (2.3)$$

и граничном условии

$$P = 0 \quad \text{при } r = 1, \quad \tau \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (2.4)$$

$$r = \frac{\rho}{R_2}, \quad \tau = \frac{\kappa t}{R_2^2}, \quad P = \frac{2\pi b k}{\mu Q} (p_0 - p), \quad R = \frac{R_1}{R_2}$$

Здесь  $\rho$  — полярный радиус рассматриваемой точки пласта,  $R_2$  — радиус границы пласта,  $\kappa$  — коэффициент пьезопроводности пласта,  $b$ ,  $k$  — мощность и коэффициент проницаемости пласта,  $\mu$  — вязкость жидкости,  $p$  — давление в рассматриваемой точке пласта и в рассматриваемый момент времени,  $p_0$  — начальное давление, одинаковое для всех точек пласта.

3. Решение уравнения (2.2) при начальном условии (2.3), граничном условии (2.4) можно провести с помощью последовательного применения интегральных преобразований

Фурье

$$F_n(P) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P \cos n\varphi \, d\varphi, \quad n = Nk \quad (k = 0, 1, \dots)$$

Ханкеля

$$H_{mn}(P) = \int_0^1 r P J_n(\lambda_{mn} r) \, dr$$

где  $\lambda_{mn}$  — корни цилиндрических функций первого рода  $n$ -го порядка, занумерованные в порядке возрастания ( $m = 1, 2, \dots$ ), и Лапласа

$$L_s(P) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} P \, d\tau$$

Техника применения этих преобразований описана во многих учебниках по математической физике и в рассматриваемой задаче не содержит существенных особенностей; поэтому, опуская детальные выкладки, приведем решение задачи (2.2) — (2.4)

$$P(r, \varphi, \tau) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_{m0} R) J_0(\lambda_{m0} r)}{\lambda_{m0}^2 J_1^2(\lambda_{m0})} (1 - e^{-\lambda_{m0}^2 \tau}) +$$

$$+ 4 \sum_{k=1}^{\infty} \cos Nk\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_{mn} R) J_n(\lambda_{mn} r)}{\lambda_{mn}^2 J_{n+1}^2(\lambda_{mn})} (1 - e^{-\lambda_{mn}^2 \tau}) \quad (3.1)$$

Выделяя слагаемые, не зависящие от времени, получаем

$$P(r, \varphi, \tau) = P_{\infty}(r, \varphi) - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_{m0} R) J_0(\lambda_{m0} r)}{\lambda_{m0}^2 J_1^2(\lambda_{m0})} e^{-\lambda_{m0}^2 \tau} -$$

$$- 4 \sum_{k=1}^{\infty} \cos Nk\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_{mn} R) J_n(\lambda_{mn} r)}{\lambda_{mn}^2 J_{n+1}^2(\lambda_{mn})} e^{-\lambda_{mn}^2 \tau} \quad (3.2)$$

Здесь  $P_\infty(r, \varphi)$  состоит из рядов, в которые входят слагаемые, не зависящие от времени, и представляет собой стационарное распределение понижения давления при работе круговой батареи скважин в открытом пласте. Для  $P_\infty(r, \varphi)$  можно записать конечное выражение [2]

$$P_\infty(r, \varphi) = -\frac{1}{2N} \ln \frac{R^{2N} + r^{2N} - 2r^N R^N \cos N\varphi}{1 + R^{2N} r^{2N} - 2r^N R^N \cos N\varphi} \quad (3.3)$$

4. Полученное решение (3.2), (3.3) задачи о неустановившемся распределении давления в открытом, ограниченном пласте, разрабатываемом круговой батареей скважин, состоит из трех частей:  $P_\infty(r, \varphi)$ ,  $P^o(r, \tau)$  и  $P^*(r, \varphi, \tau)$ , так что

$$P(r, \varphi, \tau) = P_\infty(r, \varphi) + P^o(r, \tau) + P^*(r, \varphi, \tau) \quad (3.4)$$

где  $P_\infty$  определяется формулой (3.3), а  $P^o$  и  $P^*$  соответственно равны

$$P^o(r, \tau) = -2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_{m0}R)J_0(\lambda_{m0}r)}{\lambda_{m0}^2 J_1^2(\lambda_{m0})} e^{-\lambda_{m0}^2 \tau} \quad (3.5)$$

$$P^*(r, \varphi, \tau) = -4 \sum_{k=1}^{\infty} \cos Nk\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_{mn}R)J_n(\lambda_{mn}r)}{\lambda_{mn}^2 J_{n+1}^2(\lambda_{mn})} e^{-\lambda_{mn}^2 \tau} \quad (3.6)$$

Первое слагаемое в (3.4)  $P_\infty$  определяет то установившееся распределение давления, которое наступит, после того как закончатся переходные процессы в пласте, связанные с пуском в нем круговой батареи скважин.

Смысл второго слагаемого  $P^o$  становится ясным при его сопоставлении с формулами статьи [3], дающими распределение давления в окрестности круговой галереи, работающей в тех же условиях, что и рассматриваемая в данной статье батарея скважин;  $P^o$  определяет разность между установившимся и неустановившимся понижением давления при работе галереи с равномерно распределенным по ее длине дебитом  $Q$ . В [3] было показано, что ряд (3.5) при значениях  $\tau \geq 0.02$  быстро сходится и для получения его суммы с точностью до 1% ее величины достаточно удержать в нем первые четыре члена.

Последнее слагаемое  $P^*$  в (3.4) может быть преобразовано к виду

$$P^*(r, \varphi, \tau) = - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos Nk\varphi \quad (3.7)$$

где

$$A_k = \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\lambda_{mn}R)J_n(\lambda_{mn}r)Y_n(\lambda_{mn})e^{-\lambda_{mn}^2 \tau} \quad (3.8)$$

Цилиндрические функции  $J_n(z)$  и  $Y_n(z)$  с возрастанием  $z$  уменьшаются как  $\sqrt{2/\pi z} \cos(z + \alpha)$ . Корни же  $\lambda_{mn}$  даже при небольших для практических случаев значений  $N$  (например, при  $N \geq 10$ ) достаточно велики:  $\lambda_{1.10} = 208.8$ ,  $\lambda_{2.10} = 338.6$ ,  $\lambda_{1.20} = 646.7$ ,  $\lambda_{2.20} = 894.0$ , ... Это означает, что коэффициенты (3.8) ряда (3.7) малы и быстро убывают и что сумма ряда при достаточно больших  $\tau$  будет мала и третьим слагаемым в (3.4) можно пренебречь.

*Пример.* Пласт эксплуатируется батареей из 20 скважин. Радиус пласта 2 км. Радиус батареи 1 км. Расстояние между скважинами  $a = 313$  м. При  $\kappa = 5000$ , значение  $\tau = 0.02$  будет соответствовать времени  $t = 44.5$  час.

1. Безразмерное понижение давления  $P$  в точке пласта, находящейся на линии скважин на расстоянии  $a/4$  от одной из них, равно 0.142,  $P_\infty + P^o = 0.143$  и  $P^* = 0.00159$ , так что  $|P^*|/P = 0.01$ .

2. Значение  $P$  между соседними скважинами равно 0.105;  $P_\infty + P^o = 0.109$  и  $P^* = 0.00417$ , так что  $|P^*|/P = 0.04$ .

3. Для точки пласта, находящейся на радиусе, проведенном к одной из скважин, и отстоящей от нее на расстоянии 200 м, получаются следующие результаты:  $P = 0.106$ ,  $P_\infty + P^o = 0.102$  и  $P^* = 0.00425$ , так что  $|P^*|/P = 3.5\%$ .

Значение  $P^*$  резко уменьшается с увеличением  $\tau$ . При  $\tau \geq 0.04$   $P^*$  составляет меньше 1%  $P$  во всех точках пласта.

Проведенные расчеты позволяют для практических расчетов понижения давления в окрестности круговой батареи скважин, эксплуатирующихся в ограниченном круговом пласте при упруго-водонапорном режиме с постоянными, равными дебита-

ми, рекомендовать следующую приближенную формулу

$$P(r, \varphi, \tau) = P_{\infty} + P^{\circ} \quad (3.9)$$

Для теоретических исследований, для оценки приближенных решений, в которых обычно используется та или иная модификация метода смены стационарных состояний, можно рекомендовать пользоваться точным решением (3.4).

Поступило 14 III 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов в условиях упругого режима. М., Гостоптехиздат, 1959.
2. Чарный И. А. Основы подземной гидравлики. М., Гостоптехиздат, 1956.
3. Влюшин В. Е., Харин О. Н. Распределение давления в ограниченном пласте после пуска в эксплуатацию круговой галереи с переменным дебитом. Тр. Моск. нефт. ин-та, 1965, вып. 55.

### НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ФИЛЬТРАЦИИ ЗАГРЯЗНЕННЫХ ПРОМСТОКОВ В ПРИРОДНЫХ ВОДОНОСНЫХ ПЛАСТАХ

Ф. М. БОЧЕВЕР, А. Е. ОРАДОВСКАЯ

(Москва)

Рассматривается задача о фильтрации загрязненных промышленных сточных вод, поступающих в природные водоносные горизонты из шламохранилищ, испарителей и других типов промышленных бассейнов.

Принимается, что водоносные горизонты в разрезе отделены от соседних водоносных пластов слабопроницаемыми глинистыми слоями. Учитывается при этом диффузия (фильтрационная дисперсия) и сорбция загрязнений как в основном фильтрующем пласте, так и в слабопроницаемых слоях подошвы и кровли.

Дается вывод дифференциальных уравнений (п. 1) и приводятся приближенные решения применительно к плоскопараллельной (п. 2) и радиальной (п. 3) схемам фильтрации. Показана существенная роль диффузионного отвода солей в слабопроницаемые слои кровли и подошвы (п. 4). Вследствие этого может происходить заметное «самоочищение» загрязненных вод.

1. Рассмотрим приближенное уравнение фильтрации солевых растворов, считая, что их концентрация может быть осреднена вдоль сечений, нормальных направлению потока. Это дает возможность свести уравнение к одномерному.

Весовой солевой поток  $Q$  [ $\text{кг}/\text{м}^2\text{час}$ ] через элемент пласта при одномерной фильтрации [1, 2]

$$Q = -D \frac{\partial(\gamma C)}{\partial x} + \Delta v C \quad (1.1)$$

где  $C$  — весовая концентрация компонента в растворе [ $\text{кг}/\text{кг}$ ],  $v$  — скорость фильтрации [ $\text{м}/\text{час}$ ],  $\gamma$  — удельный вес раствора [ $\text{кг}/\text{м}^3$ ],  $D$  — коэффициент фильтрационной дисперсии [ $\text{м}^2/\text{час}$ ].

Уравнение неразрывности солевого потока можно записать в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = - \frac{\partial(n\gamma C)}{\partial t} + W \quad (1.2)$$

где  $n$  — пористость пласта, а  $W$  — суммарные потери солей из раствора вследствие сорбции, заполнения так называемых «тупиковых» пор, выпадения компонента в осадок и удаления солей в породы кровли и подошвы пласта.

Решая совместно (1.1) и (1.2) с учетом уравнения баланса для воды

$$\frac{\partial(\gamma v)}{\partial x} + \frac{\gamma(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{m} = - \frac{\partial(n\gamma)}{\partial t}$$

где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — скорости перетекания воды через подошву и кровлю пласта,  $m$  — его мощность, получаем

$$D \frac{\partial^2 C'}{\partial x^2} - v \frac{\partial C'}{\partial x} - \frac{C'(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{m} = n \frac{\partial C'}{\partial t} + W \quad (1.3)$$