

действия на границу не удастся. Правильное объяснение рассмотренных экспериментальных фактов возможно только на основе решения уравнений движения, учитывающих сжимаемость жидкости.

Автор признателен В. М. Лятхеру за внимание к данной работе и ценные советы.

Поступило 26 I 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Hajek K. Flow characteristic in the two-dimensional wake of a flat plate. A thesis for the degree of Master Sci., Univ. of Iowa, USA, 1961.
2. Лятхер В. М. Турбулентность в гидросооружениях. М., «Энергия», 1968.
3. Rouse H., Jezdinsky V. Fluctuation of pressure in conduit expansions. Proc. ASCE, 1966, H. 3, vol. 92.
4. Лятхер В. М., Смирнов Л. В. Гидродинамические нагрузки на границы напорного потока в зоне отрыва. Тр. коорд. совещ. по гидротехн., 1969, вып. 51.
5. Бэтчелор Г. К. Волны сжатия в суспензиях газовых пузырьков в жидкости. Сб. «Механика», 1968, № 3.
6. Zeigler G. Tensile stress in flowing water. Cavitation in Hydrodynamics, London, 1956.
7. Гавриленко Т. Г., Топчиян М. Е. Исследование динамической прочности воды на разрыв. ПМТФ, 1966, № 4.
8. Лятхер В. М., Смирнов Л. В. Натурные динамические исследования водосбросов Чир-Юрской ГЭС. Тр. коорд. совещ. по гидротехн. М., 1966, вып. 29.
9. Locher F. A., Naudascher E. Some characteristics of macroturbulence in flow past a normal wall. Proc. XII Congr. JAHN, Fort Collins, 1967, Bd. 35.
10. Corcos G. M. Resolution of pressure in turbulence. JASA, 1963, vol. 35, No. 2.
11. Лятхер В. М. О методике исследования пульсации давления на границе турбулентного потока. Тр. коорд. совещ. по гидротехн., 1963, вып. 7.
12. Казаков И. Е., Доступов Б. Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем, М., Физматгиз, 1962.
13. Fisher M. J., Davies P. O. A. L. Correlation measurements in a nonfrozen pattern of turbulent jet. J. Fluid Mech., 1964, vol. 18, pt 1.
14. Нищук В. С. Кинематические характеристики течения в трубе при кавитации. Сб. «Исследования по прикладной гидродинамике», Киев, «Наукова думка», 1965.
15. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.

ОБ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ВЫТЕСНЕНИЯ В НЕОДНОРОДНЫХ СЛОИСТЫХ ПЛАСТАХ ПРИ НАЛИЧИИ НЕИЗВЕСТНОЙ ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЫ

Г. С. БАЛАШОВА, В. М. МАКСИМОВ, М. В. ФИЛИНОВ

(Москва)

Рассмотрена задача о нагнетании воды в ограниченный пласт, первоначально полностью заполненный нефтью, состоящий из двух пропластков, разделенных перемычкой, в случае прямолинейного и осесимметричного течения.

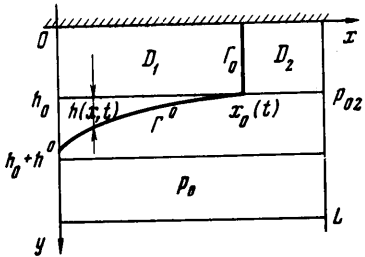
Путем осреднения уравнений движения по схеме, предложенной в работе [3], задача сводится к одномерной. В таком приближении найдены распределения давлений в зонах, занятых движущейся нефтью и водой соответственно. Получены выражения, описывающие изменения границы раздела нефть-вода с течением времени в одном из пропластков и в перемычке. Дается анализ полученных выражений и приводятся результаты численных расчетов на ЭВМ для случая прямолинейного движения.

1. **Прямолинейное движение.** 1°. Задача ставится для частной модели линейного слоистого ограниченного пласта, имеющего длину L и состоящего из двух пропластков, разделенных малопроницаемой перемычкой (фиг. 1). Верхняя граница пласта считается непроницаемой

$$\partial P / \partial y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad (1.1)$$

В начальный момент времени $t = 0$ в пласт, полностью насыщенный нефтью, начинают закачивать воду. Предполагается, что в пропластке ниже перемычки при этом поддерживается постоянное начальное давление p_0 . Жидкости считаются несжимаемыми, вытеснение нефти водой — «поршневым». Область течения в верхнем

пропластке состоит из двух зон: зона, занятая вторгшейся водой (D_1), и зона вытесняемой нефти (D_2), отделенных одна от другой подвижной границей Γ_0 , закон движения которой будем искать в виде $x_0 = x_0(t)$. Вследствие повышения давления в верхнем пропластке будет происходить переток жидкости через перемычку, в результате чего в последней также образуется граница раздела Γ° между водяной и нефтяной зонами, форма которой будет определяться выражением $y^\circ = h_0 + h(x, t)$ ($0 \leq h(x, t) \leq h^\circ$) (Фиг. 1). Задача состоит в нахождении распределения давлений в каждой из зон и функций $x_0(t)$, $h(x, t)$.



Фиг. 1

В двумерной постановке задача сводится к решению уравнений для давлений

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 P_i}{\partial y^2}(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in D_i \quad (i = 1, 2) \quad (1.2)$$

в областях D_1 и D_2 соответственно при заданных краевых условиях и выполнении условий равенства давлений и нормальных составляющих скоростей фильтрации воды и нефти на подвижной границе Γ_0 . Здесь и далее индексы 1 и 2 относятся соответственно к водяной и нефтяной зонам.

Для рассматриваемой модели пласта с малопроницаемой перемычкой вследствие условия $k^\circ \ll k_0$ (k°, k_0 — соответственно проницаемости перемычки и верхнего пропластка) горизонтальная фильтрация в перемычке пренебрежимо мала по сравнению с вертикальным движением, поэтому распределение давлений p_i° в перемычке можно считать линейным по y

$$p_i^\circ = a_i(x, t)y + b_i(x, t) \quad (i = 1, 2), \quad (1.3)$$

Коэффициенты a_i, b_i легко определяются, если известны давления $P_i(x, y, t)$ в пропластке.

Для нахождения формы границы раздела Γ_0 и Γ° следует использовать известное уравнение Кельвина [2] при соответствующих начальных условиях.

Данная задача математически труднодоступна даже при использовании современной вычислительной техники. Для дальнейшего осредним уравнение движения (1.2) по мощности верхнего пропластка, пользуясь схемой, описанной в [3]. Тогда, исключая давление в перемычке (1.3) и используя выражение для скоростей перетока

$$v_i(x, t) = v_i(x, h_0, t) = -\frac{k_0}{\mu_i} \frac{\partial P_i}{\partial y}(x, h_0, t) = \frac{k_0 h_0}{\mu_i} \alpha_i^2 (p_i - p_0) \quad (i = 1, 2) \quad (1.4)$$

полученное в [3] в предположении линейности по y вертикальных составляющих скорости фильтрации

$$v_i(x, y, t) = h_0^{-1} v_i(x, t) y \quad (i = 1, 2) \quad (1.5)$$

получим с учетом условий (1.1)

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}(x, t) - \alpha_1^2(x, t)(p_1 - p_0) = 0 \quad (0 < x < x_0(t)) \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2}(x, t) - \alpha_2^2(p_2 - p_0) = 0 \quad (x_0(t) < x < L) \quad (1.7)$$

$$p_i(x, t) = \langle P_i(x, y, t) \rangle = \frac{1}{h_0} \int_0^{h_0} P_i(x, y, t) dy \quad (i = 1, 2) \quad (1.8)$$

$$\alpha_1^2(x, t) = \frac{3k^\circ}{h_0 \{3k_0 [h(x, t) + \mu_{21}(h^\circ - h(x, t))] + k^\circ h_0\}} \quad (1.9)$$

$$\mu_{21} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad \alpha_2^2 = \frac{3k^\circ}{h_0(3k_0 h^\circ + k^\circ h_0)} \quad (1.9)$$

Здесь h_0, h° — мощности верхнего пропластка и перемычки соответственно; $h(x, t)$ — мощность части перемычки, занятая вытесняющей жидкостью (водой); μ_1, μ_2 — вязкости воды и нефти соответственно.

Выражение для скоростей перетока (1.4), как показано в [3], совпадает с формулами работы [1] при условии $(1/3)h_0/k_0 \ll h^0/k^0$. Используя (1.5) и закон Дарси

$$v_i = -(k_0/\mu_i)\partial P_i/\partial y \quad (i = 1, 2)$$

распределение давлений по y в областях D_i ($i = 1, 2$), выраженное через соответствующие средние давления, получим в виде [3]

$$P_i(x, y, t) = p_i(x, t) + \frac{\mu_i}{2k_0h_0} \left(-y^2 + \frac{h_0^2}{3} \right) v_i(x, t) \quad (i = 1, 2)$$

Вследствие того что $h_0 \ll L$, предположение о прямолинейности фронта вытеснения Γ_0 представляется разумным, так что после осреднения уравнений (1.2) уравнение границы Γ_0 можно искать в виде $x_0 = x_0(t)$. Для определения положения фронта имеем уравнение

$$m \frac{dx_0}{dt} = - \frac{k_0}{\mu_2} \frac{\partial p_2}{\partial x}(x_0, t) \quad (1.10)$$

при начальном условии

$$x_0(0) = 0$$

Форма границы раздела Γ^0 находится из уравнения

$$m \frac{\partial h}{\partial t} = v_1(x, h_0, t) = - \frac{k_0}{\mu_1} \frac{\partial P_1}{\partial y}(x, h_0, t)$$

с начальным условием $h(x, 0) = 0$.

Последнее уравнение после использования соотношения (1.4) ($i = 1$) запишется в виде

$$m \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k_0 h_0}{\mu_1} \alpha_1^2(x, t) (p_1(x, t) - p_0), \quad h(x, 0) = 0 \quad (1.11)$$

Здесь $0 \leq x \leq x_0(t)$ является параметром.

Для решения уравнений (1.6), (1.7) будем использовать следующие граничные условия:

$$p_1(0, t) = p_{01}, \quad p_2(L, t) = p_{02}, \quad p_1(x_0, t) = p_2(x_0, t) \quad (1.12)$$

$$\mu_{21} \frac{\partial p_1}{\partial x}(x_0, t) = \frac{\partial p_2}{\partial x}(x_0, t)$$

2°. После осреднения уравнений (1.2) задача все еще остается сложной. В частности, не представляется возможным проинтегрировать уравнение (1.6), не накладывая сильных ограничений на вид функции $h(x, t)$. Чтобы сделать дальнейшие упрощения, будем исходить из двух предельных схем течения, полагая в (1.6) и (1.8) $h(x, t) = 0$ и $h(x, t) = h^0$. Первая соответствует ускорению продвижения фронта вытеснения $x_0(t)$ по сравнению с истинным течением, а вторая — его замедлению. Сравнение решений позволит сделать вывод о разумности такого подхода. При такой схематизации движения положение границы раздела Γ^0 в перемычке не будет влиять на распределение средних давлений в верхнем пропластке. Тогда задача о распределении давлений может быть решена.

После этого из уравнения (1.11) можно определить форму границы в перемычке.

Рассмотрим оба упомянутых выше предельных случая.

1. Первая предельная схема течений: $h(x, t) = 0$. В этом случае (1.8) принимает вид

$$\alpha_1^2 = \frac{3k^0}{h_0(3k_0\mu_{21}h^0 + k^0h_0)} = \text{const} \quad (1.13)$$

Тогда общие решения уравнений (1.6), (1.7) суть

$$p_1(x, t) - p_0 = A_1(t)e^{\alpha_1 x} + B_1(t)e^{-\alpha_1 x} \quad (0 < x < x_0(t)) \quad (1.14)$$

$$p_2(x, t) - p_0 = A_2(t)e^{\alpha_2 x} + B_2(t)e^{-\alpha_2 x} \quad (x_0(t) < x < L) \quad (1.15)$$

Введем далее следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \xi_0 = \frac{x_0}{L}, \quad \tau = \frac{t}{T}$$

$$H(\xi, \tau) = \frac{h(x, t)}{h_0}, \quad H^\circ = \frac{h^\circ}{h_0}, \quad \sigma^\circ = \frac{k^\circ}{k_0} \quad (1.16)$$

$$\beta_i = \alpha_i L, \quad P_i(\xi, \tau) = \frac{p_i(x, t) - p_0}{p_0}$$

$$P_{01} = p_0^{-1}(p_{01} - p_0), \quad P_{02} = p_0^{-1}(p_{02} - p_0)$$

Здесь T — некоторое характерное для задачи время.

Тогда, используя крайние условия (1.12) и замечая, что при $k^\circ \ll k_0$ и $h^\circ \approx h_0$ отношение $\alpha_1^2 / \alpha_2^2 \approx \mu_{21}^{-1}$, распределение средних давлений в верхнем пропластке найдем из (1.14), (1.15) в виде

$$P_1(\xi, \tau) = \frac{\Delta_1(\xi_0, \xi)}{\Delta_1(\xi_0)} [P_{01} - \Delta_2(\xi_0)] + \Delta_2(\xi_0, \xi) \quad (1.17)$$

$$(0 \leq \xi \leq \xi_0(\tau))$$

$$P_2(\xi, \tau) = \frac{b(\beta_2 \xi)}{\Delta_1(\xi_0)} [P_{01} - \Delta_2(\xi_0)] + P_{02} e^{\beta_2(1-\xi)} \quad (1.18)$$

$$(\xi_0(\tau) \leq \xi \leq 1)$$

Здесь введены обозначения

$$\Delta_1(\xi_0) = b(\beta_2 \xi_0) \operatorname{ch} \beta_1 \xi_0 - \mu_{21}^{-1/2} a(\beta_2 \xi_0) \operatorname{sh} \beta_1 \xi_0$$

$$\Delta_1(\xi_0, \xi) = b(\beta_2 \xi_0) \operatorname{ch} \beta_1 (\xi_0 - \xi) - \mu_{21}^{-1/2} a(\beta_2 \xi_0) \operatorname{sh} \beta_1 (\xi_0 - \xi)$$

$$\Delta_2(\xi_0) = P_{02} e^{\beta_2(1-\xi_0)} (\operatorname{ch} \beta_1 \xi_0 + \mu_{21}^{-1/2} \operatorname{sh} \beta_1 \xi_0)$$

$$\Delta_2(\xi_0, \xi) = P_{02} e^{\beta_2(1-\xi_0)} [\operatorname{ch} \beta_1 (\xi_0 - \xi) + \mu_{21}^{-1/2} \operatorname{sh} \beta_1 (\xi_0 - \xi)]$$

$$a(\beta_2 \xi) = e^{\beta_2 \xi} + e^{\beta_2(2-\xi)}, \quad b(\beta_2 \xi) = e^{\beta_2 \xi} - e^{\beta_2(2-\xi)}$$

Тогда уравнения (1.10), (1.14) будут иметь вид

$$\frac{m}{\kappa_1} \frac{d\xi_0}{d\tau} = - \frac{a(\beta_2 \xi_0)}{\Delta_1(\xi_0)} [P_{01} - \Delta_2(\xi_0)] + P_{02} e^{\beta_2(1-\xi_0)}, \quad \xi_0(0) = 0 \quad (1.19)$$

$$m \frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{\kappa_2 \sigma^\circ}{\sigma^\circ + 3[H + \mu_{21}(H^\circ - H)]} P_1(\xi, \tau), \quad H(\xi, 0) = 0 \quad (1.20)$$

$$(0 \leq \xi \leq \xi_0(\tau))$$

Здесь $\kappa_1 = k_0 p_0 \beta_2 T \mu_2^{-1} L^{-2}$, $\kappa_2 = 3k_0 p_0 T \mu_1^{-1} h_0^{-2}$, κ_1 и κ_2 — безразмерные параметры.

Интегрируя уравнение (1.19), получаем соотношение для определения положения границы $\xi_0 = \xi_0(\tau)$ в любой момент времени

$$\tau = - \frac{m}{\kappa_1} \int_0^{\xi_0} \left\{ \frac{a(\beta_2 \xi_0)}{\Delta_1(\xi_0)} [P_{01} - \Delta_2(\xi_0)] - P_{02} e^{\beta_2(1-\xi_0)} \right\}^{-1} d\xi_0 \quad (1.21)$$

Зная $\xi_0(\tau)$, по формулам (1.17), (1.18) нетрудно построить распределение средних давлений в соответствующих зонах, а из уравнения (1.20) найти форму границы в переменной.

При $\xi = 0$ уравнение (1.20) можно проинтегрировать и получить соотношение, определяющее движение левого конца кривой Γ°

$$(\kappa_2 \sigma^\circ P_{01} / m) \tau = - (3/2 \mu_{21} - 1) H^2(\tau) + (3 \mu_{21} H^\circ + \sigma^\circ) H(\tau) \quad (1.22)$$

$$(0 \leq H(\tau) \equiv H(0, \tau) \leq H^\circ)$$

В размерном виде последнее соотношение имеет вид

$$\frac{3k_0 k^\circ (p_{01} - p_0)}{m \mu_1} t = - \frac{3}{2} k_0 (\mu_{21} - 1) h^2(t) + (3k_0 \mu_{21} h^\circ + k^\circ h_0) h(t) \quad (1.23)$$

$$(0 \leq h(t) \equiv h(0, t) \leq h^\circ)$$

Из (1.23) (или (1.22)) легко определить момент, начиная с которого $h(t) > h^\circ$, т. е. образуется зона, где переток жидкости происходит через всю перемычку.

2. Вторая предельная схема: $h(x, t) = h^\circ$.
В этом случае из (1.8) и (1.9) имеем

$$\alpha_1^2 = \frac{3k^\circ}{h_0(3k_0h^\circ + k^\circ h_0)} = \alpha_2^2 = \alpha^2 \quad (1.24)$$

Аналогичные выражения для средних давлений и определения $\xi_0(\tau)$ и $H(\xi, \tau)$ можно получить, если положить всюду $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$ по формуле (1.24) и в соотношениях (1.17) — (1.21) заменить коэффициент $\mu_{21}^{-1/2}$ на μ_{21}^{-1} .

3°. Уравнения (1.19), (1.20) интегрировались численно на ЭВМ. Вычисления проводились при следующих значениях параметров: $L = 10^5$ см, $h^\circ = 5 \cdot 10^2$ см, $h_0 = 10^3$ см, $k_0 = 1$ дарси, $k^\circ = 5 \cdot 10^{-5}$ дарси, $p_{01} = 80$ атм, $p_0 = 50$ атм, $\mu_2 = 3$ спз, $\mu_1 = 1$ спз, $T = 1$ год $\approx 0.31104 \cdot 10^8$ сек. При расчетах значение давления p_{02} на контуре питания в одном случае полагалось равным p_0 , в другом — $p_0/2$.

На фиг. 2 изображены кривые, описывающие закон движения фронта вытеснения в верхнем пропластке $\xi_0 = \xi_0(\tau)$; кривые 1 соответствуют значению $p_{02} = p_0$, кривые 2 — значению $p_{02} = p_0/2$. При этом здесь и на фиг. 3 индексы a и b относятся к первой и второй предельной схеме соответственно.

На фиг. 3 для $p_{02} = p_0/2$ приведены кривые 1, 2, 3, 4 распределения давлений P_1 в верхнем пропластке для $\tau = 0.48, 1.44, 1.92, 2.34$ соответственно и форма границы раздела Γ° жидкостей в перемычке для тех же моментов времени.

Приводим для иллюстрации значения давлений в водяной P_1 и нефтяной P_2 зонах при некоторых значениях ξ для случая $p_{02} = p_0$

$$(\tau = 0.66)$$

	$\xi = 0.0500,$	$0.1423,$	$0.5154,$	$0.7355,$	0.9550
(1)	$P_1 = 0.5854,$	$P_1 = P_2 = 0.5745,$	$P_2 = 0.3271,$	$0.1786,$	0.0312
(2)	$P_1 = 0.5854,$	$P_1 = P_2 = 0.5744,$	$P_2 = 0.3270,$	$0.1786,$	0.0310

$$(\tau = 2.4)$$

	$\xi = 0.0500,$	$0.1423,$	$0.5154,$	$0.7355,$	0.9550
(1)	$P_1 = 0.5832,$	$0.5576,$	$P_1 = P_2 = 0.4183,$	$P_2 = 0.2321,$	0.0415
(2)	$P_1 = 0.5316,$	$0.5497,$	$P_1 = P_2 = 0.3933,$	$P_2 = 0.2167,$	0.0386

Приведенные кривые (фиг. 2, 3) и результаты расчетов позволяют сделать вывод, что рассмотренные предельные схемы мало отличаются одна от другой, а следовательно и от истинного движения, которое заключено между ними (в начальные моменты вытеснения соответствующие кривые практически совпадают). Различие во времена полного вытеснения нефти всдой (фиг. 2), соответствующих этим предельным случаям течения, не превышает 5%.

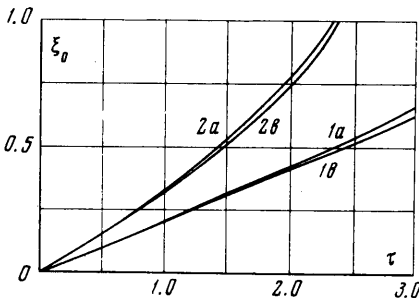
При оценочных инженерных расчетах можно пользоваться той или другой схемой течения в зависимости от рассматриваемой задачи и свойств вытесняемой и вытесняющей жидкости. Первая предельная схема описывает ускоренное продвижение фронта вытеснения по сравнению с истинным, а вторая — замедленное.

2. Осесимметричное движение. В аналогичной постановке можно рассмотреть осесимметричную задачу фильтрации.

Пусть пласт, моделируемый двумя пропластками цилиндрической формы, имеющими радиус R и разделенными перемычкой, имеет центральную нагнетательную скважину с радиусом r_0° . Начало координат поместим у подошвы, а ось z направим вверх по направлению оси скважины. Нижняя граница пласта предполагается непроницаемой

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (2.1)$$

В процессе нагнетания воды в пласт, полностью заполненный нефтью, в верхнем пропластке поддерживается постоянное давление p_0 , в нижнем пропластке возникает фронт вытеснения $r_0 = r_0(t)$. Вследствие перетоков жидкости в перемычке



Фиг. 2

также возникает граница раздела, уравнение которой зададим в виде

$$z_0 = h_0 + h(r, t)$$

Дифференциальные уравнения для определения давлений $P_i(r, z, t)$ в нижнем пропластке имеют вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_i}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 P_i}{\partial z^2} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2.2)$$

После осреднения уравнений (2.2) по мощности нижнего пропластка и использования условия (2.1) будем иметь

$$\frac{\partial^2 p_i}{\partial r^2}(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial p_i}{\partial r}(r, t) - \alpha_i^2(p_i - p_0) = 0 \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} r_0^0 < r < r_0(t) & \quad \text{при } i = 1 \\ r_0(t) < r < R & \quad \text{при } i = 2 \end{aligned}$$

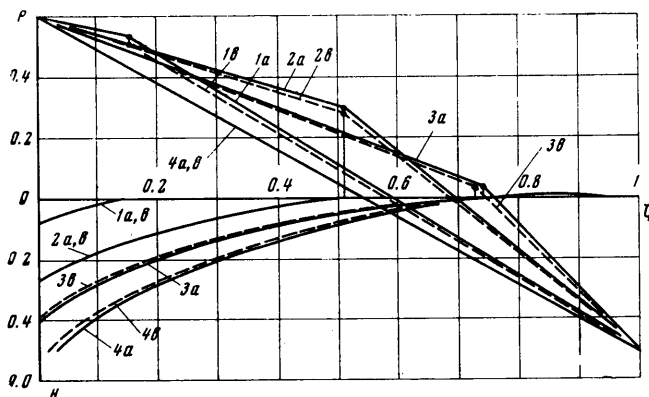
Здесь и далее в этом пункте сохраняются обозначения п. 1; при этом в выражении (1.8) для α_i^2 следует $h(x, t)$ заменить на $h(r, t)$

$$p_i(r, t) = \langle P_i(r, z, t) \rangle = \frac{1}{h_0} \int_0^{h_0} P_i(r, z, t) dz \quad (i = 1, 2)$$

Задача решается при следующих краевых условиях:

$$p_1(r_0^0, t) = p_{01}, \quad p_2(R, t) = p_{02} \quad (2.4)$$

$$p_1(r_0, t) = p_2(r_0, t), \quad \mu_{21} \frac{\partial p_1}{\partial r}(r_0, t) = \frac{\partial p_2}{\partial r}(r_0, t) \quad (2.5)$$



Фиг. 3

Для определения $r_0(t)$ и $h(r, t)$ имеем уравнения

$$m \frac{dr_0}{dt} = - \frac{k_0}{\mu_2} \frac{dp_2}{dr}(r_0, t) \quad (2.6)$$

с начальным условием $r_0(0) = r_0^0$

$$m \frac{\partial h}{\partial t} = v_1 = \frac{3k_0 k^0 [p_1(r, t) - p_0]}{3k_0 [\mu_1 h + \mu_2 (h^0 - h)] + k^0 \mu_1 h_0} \quad (2.7)$$

с начальным условием $h(r, 0) = 0$

параметр $r_0^0 \leq r \leq r_0(t)$.

Общие решения уравнений Бесселя (2.3) при $\alpha_i = \text{const}$ имеют вид

$$p_i(r, t) - p_0 = A_i(t) I_0(\alpha_i r) + B_i(t) K_0(\alpha_i r) \quad (i = 1, 2). \quad (2.8)$$

Здесь I_0, K_0 — модифицированные функции Бесселя соответственно первого и второго рода нулевого порядка.

Далее снова рассмотрим указанные выше предельные схемы течения.

Для первого предельного случая

$$а) h(r, t) = 0.$$

Точка $\alpha_1^2 = \text{const}$ определяется соотношением (1.13). Используя далее граничные условия (2.4), (2.5), найдем из (2.8) распределение средних давлений в соответствующих зонах нижнего пропластка

$$p_1(r, t) - p_0 = \left\{ \left[Z_{00}(\alpha_2 r_0) Z_{01}(\alpha_1 r, \alpha_1 r_0) - \frac{1}{\gamma \mu_{21}} Z_{10}(\alpha_2 r_0) Z_{00}(\alpha_1 r, \alpha_1 r_0) \right] A_2 + \right. \\ \left. + (p_{02} - p_0) \left[K_0(\alpha_2 r_0) Z_{01}(\alpha_1 r, \alpha_1 r_0) - \frac{1}{\gamma \mu_{21}} K_1(\alpha_2 r_0) Z_{00}(\alpha_1 r, \alpha_1 r_0) \right] \right\} \cdot \\ \cdot * [K_0(\alpha_2 R) Z_{01}(\alpha_1 r_0)]^{-1} \quad (r_0^0 \leq r \leq r_0(t)) \quad (2.9)$$

$$p_2(r, t) - p_0 = [A_2 Z_{00}(\alpha_2 r) + (p_{02} - p_0) K_0(\alpha_2 r)] K_0^{-1}(\alpha_2 R) \\ (r_0(t) \leq r \leq R) \quad (2.10)$$

Здесь

$$Z_{01}(\alpha_1 r_0) = I_0(\alpha_1 r_0) K_1(\alpha_1 r_0) - I_1(\alpha_1 r_0) K_0(\alpha_1 r_0) \\ Z_{00}(\alpha_2 r_0) = I_0(\alpha_2 r_0) K_0(\alpha_2 R) - I_0(\alpha_2 R) K_0(\alpha_2 r_0) \\ Z_{10}(\alpha_2 r_0) = I_1(\alpha_2 r_0) K_0(\alpha_2 R) - I_0(\alpha_2 R) K_1(\alpha_2 r_0) \\ Z_{00}(\alpha_1 r, \alpha_1 r_0) = K_0(\alpha_1 r_0) I_0(\alpha_1 r) - I_0(\alpha_1 r_0) K_0(\alpha_1 r) \\ Z_{01}(\alpha_1 r, \alpha_1 r_0) = K_1(\alpha_1 r_0) I_0(\alpha_1 r) - I_1(\alpha_1 r_0) K_0(\alpha_1 r) \\ A_2 = \{ (p_{01} - p_0) K_0(\alpha_2 R) Z_{01}(\alpha_1 r_0) - (p_{02} - p_0) [K_0(\alpha_2 r_0) Z_1(\alpha_1 r_0) - \\ - \mu_{21}^{-1/2} K_1(\alpha_2 r_0) Z_0(\alpha_1 r_0)] \} \cdot [Z_{00}(\alpha_2 r_0) Z_1(\alpha_1 r_0) - \mu_{21}^{-1/2} Z_{10}(\alpha_2 r_0) Z_0(\alpha_1 r_0)]^{-1} \\ Z_1(\alpha_1 r_0) = K_1(\alpha_1 r_0) - a I_1(\alpha_1 r_0), \quad Z_0(\alpha_1 r_0) = K_0(\alpha_1 r_0) - a I_0(\alpha_1 r_0) \\ (a = \ln(2/\gamma \alpha_1 r_0^0), \quad \ln \gamma - \text{число Эйлера})$$

I_1, K_1 — модифицированные функции Бесселя соответственно, первого и второго рода первого порядка.

Вследствие малости величины $\alpha_1 r_0^0$ (обычно это величина порядка $10^{-4} - 10^{-5}$) при вычислениях была использована асимптотика для бesselевых функций

$$I_0(\alpha_1 r_0^0) \approx 1, \quad K_0(\alpha_1 r_0^0) \approx \ln \frac{2}{\gamma \alpha_1 r_0^0}$$

Уравнение (2.6) тогда принимает вид

$$m \frac{dr_0}{dt} = \frac{k_0 \alpha_2}{\mu_2 K_0(\alpha_2 R)} [Z_{10}(\alpha_2 r_0) A_2 + (p_{02} - p_0) K_1(\alpha_2 r_0)]$$

Интегрируя последнее уравнение с учетом начального условия $r_0(0) = r_0^0$, найдем

$$t = \frac{m \mu_2 K_0(\alpha_2 R)}{k_0 \alpha_2} \int_{r_0^0}^{r_0} [Z_{01}(\alpha_2 r_0) A_2 + (p_{02} - p_0) K_1(\alpha_2 r_0)]^{-1} dr_0$$

По известной функции $r_0(t)$ можно найти распределение средних давлений в нижнем пропластке из соотношений (2.9), (2.10), а затем из уравнения (2.7) с учетом (2.9) определить форму границы раздела в перемычке.

Полагая в (2.7) $r = r_0^0$, получаем уравнение

$$m \frac{\partial h}{\partial t}(r_0^0, t) = \frac{3k_0 k^0 (p_{01} - p_0)}{3k_0 [\mu_1 h + \mu_2 (h^0 - h)] + k^0 \mu_1 h_0}$$

интегрируя которое, придем к соотношению (1.23) для $h(t) = h(r_0^0, t)$, определяющему в данном случае движение конца границы раздела в перемычке по поверхности цилиндра, окружающего скважину.

2. Для второго предельного случая $h(r, t) = h^0$ соотношения для средних давлений и определения $r_0(t)$ и $h(r, t)$ получаются аналогично п. 1.

Несмотря на отсутствие численных расчетов, для случая осесимметричного течения нельзя ожидать качественно новых результатов по сравнению с выводами п. 1, ибо поведение бесселевых функций первого и второго рода напоминает поведение экспоненты.

Поступило 1 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейн-Заде М. А. Особенности движения жидкости в неоднородном пласте. М., «Недра», 1965.
2. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
3. Лурье М. В., Максимов В. М. Об одном способе осреднения уравнений двухфазной фильтрации в неоднородных пластах с учетом перетоков между ними. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ КРУГОВОЙ БАТАРЕИ СКВАЖИН, РАБОТАЮЩИХ В УСЛОВИЯХ УПРУГО-ВОДОНАПОРНОГО РЕЖИМА ФИЛЬТРАЦИИ

В. Е. ВЛЮШИН

(Москва)

В данной работе делается постановка задачи об определении неустановившегося давления при совместной работе круговой цепочки скважин — стоков в концентричном, однородном, горизонтальном, круговом пласте в условиях упругого режима, допускающая возможность решения ее методами интегральных преобразований. Приводится точное решение поставленной задачи. На основании анализа точного решения и рассмотрения примера рекомендуется для практических расчетов упрощенное, приближенное решение задачи.

1. При допущениях, что движущаяся в однородной и изотропной упругой пористой среде ньютоновская жидкость обладает упругими свойствами и скорость ее фильтрации зависит линейно от градиента давления (закон фильтрации Дарси), изменение во времени распределения давления в потоке будет удовлетворять основному уравнению теории упругого режима [1]

$$\Delta p = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.1)$$

Здесь p — давление, κ — коэффициент пьезопроводности, t — время.

Одной из задач, используемых при проектировании и анализе разработки нефтеводоносных пластов в условиях упругого режима, является задача о плоском притоке жидкости к равнодебитным и равноотстоящим друг от друга стокам, расположенным по окружности в концентричной круговой области. К этой задаче сводятся распространенные в практике случаи эксплуатации большого числа скважин, расположенных по линиям, близким к окружности, в круговых, горизонтальных, однородных пластах.

2. Поместим начало полярной системы координат в центре батареи O ; полярную ось направим так, чтобы она проходила через центр одной из скважин. Точки A_i , в которых расположены скважины, будут иметь следующие координаты:

$$A_i \left(R_i; \frac{2\pi}{N} i \right) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Здесь R_i — радиус батареи скважин, N — число скважин в батарее.

Скважины будем считать точечными стоками с одинаковыми дебитами, равными q . Общий дебит всех скважин — дебит батареи Q — будет равен

$$Q = Nq \quad (2.1)$$

Будем, также считать, что на границе пласта поддерживается постоянное, равное начальному давление p_0 .

