

ЛИТЕРАТУРА

1. Pan C. H. T. Gas-lubricated spherical bearings. Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Engng., 1963, vol. 85, No. 2. (Рус. перев.: Сферические подшипники скольжения с газовой смазкой. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. D, «Техническая механика», 1963, т. 85, № 2).
2. Бейтмен Г., Эрдей и А. Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1965.
3. Magnus W., Oberhettinger F. Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. 2 Aufl. Berlin, Springer Verlag, 1948.

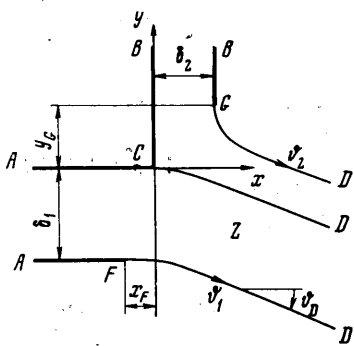
ЗАДАЧА О СТОЛКНОВЕНИИ ДВУХ СТРУЙ, ВЫТЕКАЮЩИХ ИЗ КАНАЛОВ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ ПРИ РАЗНЫХ СКОРОСТЯХ НА СВОБОДНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

П. М. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ

(Москва)

Рассмотрена задача, представляющая практический интерес в связи с возможностью приложения к расчету струйного усилителя — одного из элементов струйной автоматики (пневмоники) [1, 2]. Получена формула для определения направления отходящей струи.

1. Пусть из канала (фиг. 1) шириной δ_1 , образованного стенками AC и AF , параллельными оси x , вытекает струя жидкости плотности ρ , имеющая скорость v_1 на свободной поверхности FD . Из канала шириной δ_2 , образованного стенками BC и BG , параллельными оси y , вытекает струя жидкости той же плотности, имеющая на свободной поверхности GD скорость $v_2 < v_1$. Предполагается, что давление p на свободных поверхностях равно нулю, а точка C — критическая для второй струи. Поскольку $v_2 < v_1$, точка C не является критической для первой струи, и граница CD — двух струй есть линия разрыва скорости течения.



Фиг. 1

Как показали экспериментальные исследования [2-4] струйных усилителей, влияние вязкости в зоне соударения струй незначительно по сравнению с влиянием градиента давления, что оправдывает идеализацию течения и замену развивающейся вниз по течению области смешения струй линией разрыва скорости.

В ряде работ угол ϕ_D асимптотического направления отходящей струи (фиг. 1) определяется с помощью теоремы об изменении количества движения, причем не учитывается гидродинамическая реакция стенок [2, 3]. Как показано в работе [5] для случая $v_1 = v_2$ и отсутствия линии разрыва, поправочный коэффициент, учитывающий влияние гидродинамической реакции стенок на отклонение струи, может достигать значительной величины.

2. Рассмотрим течение в области $ACDFA$ на физической плоскости z (фиг. 1). Соответствующая область изменения комплексного потенциала $w_1 = \phi_1 + i\psi_1$ представляет собой полосу шириной $q_1 = v_A \delta_1$ (фиг. 2), где q_1 — расход жидкости, вытекающей из канала, v_A — скорость течения в канале в бесконечно удаленной точке. Пусть $w_1(C) = q_1 i$ и $w_1(F) = \varphi_F$, где φ_F — действительное число. Отобразим конформно область изменения функции w_1 на второй квадрант комплексной плоскости $\tau = \xi + i\eta$. Пусть при этом точка C перейдет в начало координат, точка D перейдет в -1 , точка F — в бесконечность (фиг. 3). Это отображение осуществляется единственным образом, и w_1 и τ связаны между собой соотношением

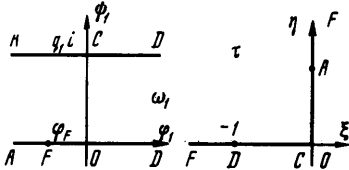
$$\tau = - \left[\frac{1 + \Phi(-w_1)}{1 - \Phi(\varphi_F - w_1)} \right]^{1/2}, \quad \Phi(\alpha) = \exp \frac{\pi\alpha}{q_1} \tag{2.1}$$

Пусть

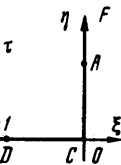
$$\omega_1 = \ln \frac{dw_1}{v_1 dz} = \ln \frac{v}{v_1} - i\theta \tag{2.2}$$

Здесь v и θ — модуль и аргумент вектора скорости. Действительная и мнимая части этой функции равны нулю соответственно на FC и FD . Функция $\omega_1(\tau)$ определена на втором квадранте плоскости и принимает действительные значения на положительной части мнимой оси. Поэтому она может быть аналитически продолжена на верхнюю половину плоскости, причем значения функции $\omega_1(\tau)$ в точках, симметричных относительно мнимой оси, будут комплексно сопряженными [6].

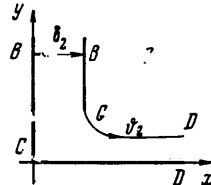
Пусть известно распределение давления p вдоль линии CD . Тогда при помощи теоремы Бернулли можно вычислить $\text{Re } \omega_1(\tau)$ на отрезке $[-1, 0]$ действительной оси



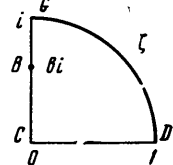
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

ξ плоскости τ . На участке $(-\infty, -1]$ этой оси, соответствующем свободной линии тока, $\text{Re } \omega_1(\tau) = 0$ и, кроме того, $\text{Re } \omega_1(\xi) = \text{Re } \omega_1(-\xi)$. Таким образом, действительная часть функции $\omega_1(\tau)$ известна на всей оси ξ и последняя может быть восстановлена на всей верхней половине плоскости τ с помощью интеграла Шварца [6]

$$\omega_1(\tau) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} \ln \frac{v}{v_1} \frac{d\xi}{\xi - \tau} = \frac{2}{\pi i} \int_{-1}^0 \ln \frac{v}{v_1} \frac{\tau d\xi}{\xi^2 - \tau^2} \tag{2.3}$$

В последнем выражении использована четность $\text{Re } \omega_1$. Пусть t — действительная координата точки плоскости w_1 , лежащей на отрезке CD . Тогда

$$\omega_1(w_1) = \frac{1}{q_1 i} \int_0^{\infty} \left[\frac{1 + \Phi(-w_1)}{1 - \Phi(-t)} \frac{1 - \Phi(\varphi_F - w_1)}{1 + \Phi(\varphi_F - t)} \right]^{1/2} \ln \frac{v}{v_1} \frac{\Phi(-t) dt}{\Phi(-t) + \Phi(-w_1)} \tag{2.4}$$

Из выражений (2.4) и (2.2) следует, что

$$\frac{dw_1}{v_1 dz} = e^{\omega_1(w_1)}, \quad z = -\frac{1}{v_1} \int e^{-\omega_1(w_1)} dw_1$$

Отсюда по заданному значению φ_F можно найти границу области $ACDFA$. Полагая $w_1 = \varphi_F$ можно установить связь между φ_F и геометрическим размером x_F . Рассмотренная в данном параграфе задача относится к так называемым обратным крайевым задачам [7].

На линии CD подынтегральное выражение (2.4) имеет полюс первого порядка, и его мнимая часть, взятая с противоположным знаком

$$\theta = \frac{1}{q_1} \int_0^{\infty} \left[\frac{1 - \Phi(-\varphi_1)}{1 - \Phi(-t)} \frac{1 + \Phi(\varphi_F - \varphi_1)}{1 + \Phi(\varphi_F - t)} \right]^{1/2} \ln \frac{v}{v_1} \frac{\Phi(-t) dt}{\Phi(-t) - \Phi(-\varphi_1)} \tag{2.5}$$

понимается в смысле главного значения интеграла. Из выражения (2.5), устремляя φ_1 в бесконечность, можно получить значение угла θ_D асимптотического направления отходящей струи

$$\theta_D = \frac{1}{q_1} \int_0^{\infty} \ln \frac{v}{v_1} \{ [1 - \Phi(-t)] [1 + \Phi(\varphi_F - t)] \}^{-1/2} dt \tag{2.6}$$

Пусть $\epsilon = v_2^2 / v_1^2$ есть малая величина. Согласно принятой схеме течения давление p максимально в точке C , а скорость течения вдоль границы области $ACDFA$ достигает в этой точке своего минимума. Поскольку скорость принимает свои экстремальные значения на границе области $ACDFA$, ее величина в указанной области

удовлетворяет условию

$$\sqrt{1 - \varepsilon} < v / v_1 < 1 \quad (2.7)$$

и, следовательно, изменяется в очень малых пределах. Если $\varepsilon = 0$, скорость во всей рассматриваемой области будет равна v_1 , все линии тока будут прямолинейны, и область $ACDFA$ на плоскости комплексного потенциала w_1 будет геометрически подобна этой же области на физической плоскости z с коэффициентом подобия, равным v_1 . Следовательно

$$\varphi_F = v_1 x_F, \quad t = v_1 s \quad (2.8)$$

где s — длина дуги линии CD на физической плоскости z , отсчитываемая от точки C . При малых значениях ε равенства (2.8) будут приближенными. Пусть

$$\lambda = 2p / \rho v_2^2 \quad (2.9)$$

есть давление в безразмерном виде. Величина λ изменяется при движении вдоль линии CD от 1 до 0. По теореме Бернулли скорость течения в области $ACDFA$ связана с величиной λ соотношением

$$v / v_1 = \sqrt{1 - \varepsilon \lambda}$$

При малых ε имеет место приближенное равенство

$$\ln(v / v_1) = -(\frac{1}{2}) \varepsilon \lambda \quad (2.10)$$

Подставляя соотношения (2.8) и (2.10) в интеграл (2.6), можно получить

$$\vartheta_D = -\frac{\varepsilon}{2\delta_1} \int_0^{\infty} \lambda \{ [1 - \Phi(-s)] [1 + \Phi(x_F - s)] \}^{-1/2} ds \quad (2.11)$$

Для определения величины угла ϑ_D необходимо найти распределение давления вдоль линии CD и подставить его в интеграл, для существования которого достаточно, чтобы существовал

$$\int_0^{\infty} \lambda ds$$

т. е. чтобы отнесенный к единице времени импульс, которым вторая струя воздействует на первую, имел конечную величину.

3. При малой величине ε линия CD будет незначительно отличаться от прямой, и распределение давления вдоль линии CD можно найти из предельного случая, когда эта линия совпадает с положительной частью оси абсцисс, т. е. из обтекания внутренности прямого угла потоком, вытекающим из канала шириной δ_2 (фиг. 4), являющегося частным случаем истечения жидкости из сосуда с прямолинейными стенками [8].

Область изменения комплексного потенциала $w_2 = \varphi_2 + i\psi_2$ рассматриваемого течения представляет собой полосу шириной $q_2 = v_B \delta_2$, где q_2 — расход жидкости, вытекающей из канала, v_B — скорость в бесконечно удаленной точке канала. Область изменения комплексной скорости $\zeta = v_2^{-1} dw_2 / dz$ представляет собой сектор единичного круга, расположенный в первом квадранте (фиг. 5). Точке B на плоскости ζ соответствует точка bi , где $b = v_B / v_2$ — положительное число, не превышающее единицы. С помощью методов теории струй идеальной жидкости [8] легко убедиться, что

$$\frac{dw_2}{dz} = \frac{N}{2} \frac{\zeta^2 + 1}{v_2 (\zeta_2 + b^2) (\zeta^2 + b^{-2}) (\zeta^2 - 1)}$$

где N — некоторая постоянная. Тогда

$$dz = \frac{dz}{dw_2} \frac{dw_2}{d\zeta} d\zeta = -\frac{N(\zeta^2 + 1) d\zeta}{v_2 (\zeta_2 + b^2) (\zeta^2 + b^{-2}) (\zeta^2 + 1)} \quad (3.1)$$

$$z = M \left(\frac{1}{b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\zeta}{b} + b \operatorname{arc} \operatorname{tg} b\zeta + \ln \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \right) \quad (3.2)$$

$$M = \frac{N}{v_2} \frac{b^2}{(b^2 + 1)^2}$$

В точке G имеет место $z = \delta_2 + iy_G$, $\zeta = i$. Подставляя эти величины в (3.2) и отделяя действительную и мнимую части, легко получить

$$M = \frac{2b\delta_2}{\pi}, \quad \sigma_2 = \frac{y_G}{\delta_2} = b + \frac{b^2 + 1}{\pi} \ln \frac{1 + b}{1 - b}$$

На оси абсцисс физической плоскости z величина ζ действительна и $v = \zeta v_2$. Поскольку давление вдоль свободной границы течения принято равным нулю

$$p = (\frac{1}{2})\rho v_2^2(1 - \zeta^2), \quad \lambda = 1 - \zeta^2 \quad (3.3)$$

где λ согласно (2.9), есть давление в безразмерном виде. Поскольку s есть длина дуги CD , отсчитываемая от точки C , то, учитывая замечание, сделанное в начале данного пункта, и воспользовавшись выражениями (3.1) и (3.2), получим

$$s = \frac{2\delta_2}{\pi} \left(\arctg \frac{\zeta}{b} + b^2 \arctg b\zeta + b \ln \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \right) \quad (3.4)$$

$$ds = \frac{2\delta_2(1 + b^2)^2(1 + \zeta^2)d\zeta}{\pi b(1 - \zeta^2)(\zeta^2 + b^2)(\zeta^2 + b^{-2})} \quad (3.5)$$

4. Подставив выражения (3.3)–(3.5) в интеграл (2.11), получим формулу для определения угла ϑ_D

$$\vartheta_D = -\varepsilon \sigma_0 b^2 K \quad (\sigma_0 = \delta_2 / \delta_1, \quad \sigma_1 = x_F / \delta_1) \quad (4.1)$$

$$K = \frac{(1 + b^2)^2}{\pi b} \int_0^1 \frac{(1 + \zeta^2)d\zeta}{(b^2 + \zeta^2)(1 + \zeta^2 b^2)\sqrt{(1 - P)[1 + \exp(\lambda \sigma_1)P]}}$$

$$P = [(1 - \zeta)/(1 + \zeta)]^{2b\sigma_0} \exp \{-2\sigma_0 [\arctg(\zeta/b) + b^2 \arctg b\zeta]\}$$

Как видно из формулы (4.1), в рассматриваемом приближении угол ϑ_D линейно зависит от величины ε . Пусть $I_1 = \delta_1 v_A^2$ и $I_2 = \delta_2 v_B^2 = \delta_2 b^2 v_2^2$ — векторы количества движения, вносимые в поток первой и второй струями соответственно и отнесенные к единице времени. Поскольку $v_A \approx v_1$ по соотношению (2.7), то по теореме об изменении количества движения угол ϑ_D асимптотического направления отходящей струи должен удовлетворять соотношению

$$\operatorname{tg} \vartheta_D = -I_1 / I_2 = -\varepsilon \sigma_0 b^2 \quad (4.2)$$

если пренебречь гидродинамической реакцией стенок. Сравнивая формулы (4.1) и (4.2) и учитывая малость угла ϑ_D , легко увидеть, что величина K есть поправочный

b/σ_2	σ_0	σ_1					
		$-\infty$	-0.75	-0.50	-0.25	0	0.25
0.2 0.334	0.25	30.5	29.5	28.3	26.3	23.0	18.8
	0.50	23.0	22.4	21.7	20.4	18.4	15.5
	1.00	18.4	18.0	17.6	16.9	15.7	14.0
	2.00	15.7	15.5	15.3	14.9	14.3	13.4
0.4 0.712	0.25	8.07	7.80	7.51	6.99	6.15	5.05
	0.50	6.15	5.99	5.82	5.50	4.97	4.24
	1.00	4.97	4.88	4.79	4.61	4.31	3.88
	2.00	4.31	4.27	4.22	4.13	3.97	3.74
0.6 1.522	0.25	3.91	3.79	3.66	3.41	3.02	2.50
	0.50	3.02	2.95	2.87	2.73	2.49	2.15
	1.00	2.49	2.45	2.41	2.33	2.19	2.00
	2.00	2.19	2.17	2.15	2.11	2.04	1.94
0.8 1.935	0.25	2.46	2.38	2.31	2.16	1.93	1.61
	0.50	1.93	1.89	1.84	1.76	1.62	1.42
	1.00	1.62	1.60	1.57	1.53	1.45	1.34
	2.00	1.45	1.44	1.43	1.41	1.37	1.31
1 ∞	0.25	1.78	1.73	1.68	1.53	1.42	1.20
	0.50	1.42	1.39	1.37	1.31	1.22	1.09
	1.00	1.22	1.20	1.19	1.16	1.11	1.04
	2.00	1.11	1.10	1.09	1.08	1.06	1.02

коэффициент, учитывающий влияние гидродинамической реакции стенок на отклонение отходящей струи.

Коэффициент K является функцией трех безразмерных параметров: σ_0 , σ_1 и σ_2 , поскольку последний из них однозначно связан с величиной b . Значения коэффициента K были вычислены при различных значениях параметров. Результаты вычислений приведены в таблице.

Полученное решение является первым приближением и может быть улучшено методом последовательных приближений. Для этого необходимо вычислить линию разрыва CD , а затем, рассматривая течение в области $BCDGB$, найти уточненное распределение давления. После этого величина Φ_D может быть вычислена с помощью формулы (2.6). При этом необходимо уточнить соотношения (2.8) и (2.10). Второе приближение задачи можно получить также, воспользовавшись ее решением при $\epsilon = 1$, для которого в работе [9] приведены формулы в явном виде.

В заключение автор благодарит М. И. Гуревича, просмотревшего первый вариант рукописи и сделавшего ряд ценных замечаний.

Поступило 16 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Залманзон Л. А. Пневматика. М., «Наука», 1964.
2. Струйная пневмогидроавтоматика. Сб. статей, М., «Мир», 1966.
3. Comparin R. A., Glaetli H. N., Mitchell A. E., Mueller H. R. On the limitations and special effects in fluid jet amplifiers. Repts ASME Sympos. on Fluid Jet Control Devices, November 1962. (Рус. перев. в сб.: «Струйная пневмогидроавтоматика», М., «Мир», 1966.)
4. Reilly R. Y., Moynihan F. A. Notes on proportional fluid amplifiers. Proc. ASME Sympos. on Fluid Jet Control Devices, N. Y., 1962. (Рус. перев.: В сб. «Струйная пневмогидроавтоматика», М., «Мир», 1966.)
5. Иванов Н. Н. Теоретическое исследование взаимодействия двух струй, вытекающих из каналов с прямолинейными стенками. В сб.: «Кибернетика и управление», М., «Наука», 1967.
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного, Изд-во М., «Наука», 1965.
7. Тумашев Г. Г., Нужиин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения, Изд. 2. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1965.
8. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.
9. Владимиров Ф. С. Соударение струй, вытекающих из каналов с параллельными стенками. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПУЛЬСАЦИИ ДАВЛЕНИЯ В ЗОНЕ ОТРЫВА

Л. В. СМОРНОВ

(Москва)

Рассмотрено резко неравномерное, отрывное течение воды на начальном участке напорной трубы, прямоугольного сечения, обусловленное отрывным обтеканием плоской стенки. В точках твердой, неподвижной границы над зоной вальца при существенно разных абсолютных давлениях в потоке экспериментально определены средне-квадратичные отклонения p' , одномерные частотные спектры $S(\omega)$, пространственные корреляции $r(x)$ и функции распределения $F(p)$ пульсации давления. Замечены изменения в структуре гидродинамического воздействия на границу, вызванные фазовыми переходами в жидкости, — появлением воздушных и паровоздушных включений. Материалы измерений сопоставлены с результатами теоретического расчета.

1. Постановка задачи. Пульсация давления на твердой границе в схемах отрывного течения изучена довольно подробно [1-4]. Показано [2], что если жидкость может рассматриваться несжимаемой, а границы потока жесткими, амплитудно-частотные характеристики пульсации давления полностью определяются кинематикой течения. Однако на практике встречаются случаи, когда сжимаемостью жидкости пренебречь нельзя.

Известно [2, 5], что сжимаемость жидкости, характеризуемая скоростью распространения упругих волн, сильно зависит от количества воздуха в потоке. Согласно [2] для длинных волн

$$c = \left[\frac{\gamma}{\rho_0} \left(\frac{1}{E} + \frac{s}{p_1} \right) \right]^{-1/2}, \quad \rho_0 = (1-s)\rho + s\rho_1 \dots \quad (1)$$