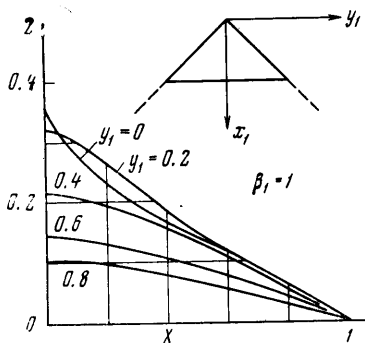


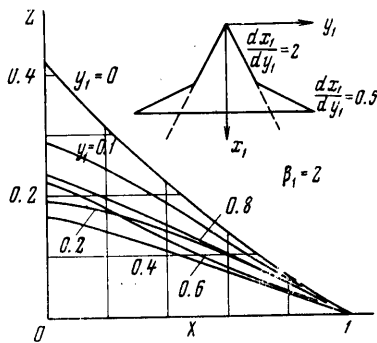
Приводим вычисленные значения волнового сопротивления треугольного крыла  $C_0 = C_x / C_y^2 \beta$  в зависимости от чисел  $M$  и  $N$

$M=0$	1	2	2	3	3
$N=0$	2	2	3	3	4
$C_0=0.25$	0.227143	0.226506	0.225249	0.224958	0.224345

Отсюда видно, что при увеличении чисел  $M$  и  $N$  волновое сопротивление очень быстро стремится к своей нижней границе, которая может быть определена методом, описанным в работе [1].



Фиг. 2



Фиг. 3

Деформация крыла с изломом передней кромки приведена на фиг. 3. Число коэффициентов  $a_{mn}$  равно 20 ( $M = 3, N = 4$ ).

Приводим значения волнового сопротивления  $C_0$

$M=0$	1	2	2	3	3
$N=0$	2	2	3	3	4
$C_0=0.25$	0.241884	0.238601	0.237643	0.235472	0.234858

Из всего изложенного следует, что для крыльев с указанными ограничениями на форму в плане метод Ритца дает возможность при заданной подъемной силе получить оптимальную деформацию крыла, волновое сопротивление которого мало отличается от своей нижней границы.

Поступило 17 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

- Жилин Ю. Л. Крылья минимального сопротивления. ПММ, 1957, вып. 2.
- Коган М. Н. Некоторые интегральные свойства сверхзвуковых течений. Тр. ЦАГИ, 1955, № 687.
- Бульгина Е. В. Оптимальная кривизна и крутка сверхзвуковых треугольных крыльев с изломом передней кромки. Госкомитет Совета Министров СССР по авиац. техн., 1963.

О КОЛЕБАНИЯХ ТОНКИХ ТЕЛ ПОД БОЛЬШИМИ УГЛАМИ АТАКИ В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

А. В. КРАСИЛЬНИКОВ

(Москва)

Проведено обобщение метода искривленных тел [1] на случай произвольных углов атаки в рамках закона плоских сечений [2].

1. Рассмотрим задачу обтекания тонкого тела, совершающего плоские угловые колебания относительно некоторого центра вращения с малой угловой скоростью гиперзвуковым потоком газа ( $M_\infty \gg 1$ ). Для этого введем декартову систему координат  $x_1, y_1, z_1$ , жестко связанную с телом (фигура), и инерциальную систему координат  $x, y, z$ , оси которой в момент времени  $t = 0$  совпадают с одноименными осями  $x_1, y_1, z_1$ ;  $uV \sin \alpha$ ,  $vV \sin \alpha$ ,  $wV \sin \alpha$  — проекции вектора скорости на оси  $x, y, z$ ;  $\rho \rho_\infty$  — плотность;  $\rho \rho_\infty V^2 \sin^2 \alpha$  — давление;  $R$  — форма ударной волны. Тело считаем тонким, так что относительный максимальный поперечный размер  $\tau = d/l \ll 1$ .

Положение тела относительно набегающего потока в момент  $t = 0$  будем характеризовать углом атаки  $\alpha_0$  ( $\alpha_0 \gg \tau$ ). Тело вращается относительно точки  $x_0 l$ , находящейся на оси тела с угловой скоростью  $\alpha' = \omega V \cos \alpha / l$  ( $\omega$  — безразмерная угловая скорость,  $V$  — скорость набегающего потока,  $l$  — длина тела). Через некоторое время  $tT$  (рассматриваем времена, имеющие порядок характерного времени обтекания тела  $T = l / V \cos \alpha$ ) положение тела относительно инерциальной системы координат будет характеризоваться углом  $\Delta\alpha(t)$ . Основное предположение заключается в том, что в рассматриваемые времена

$$\Delta\alpha(t) \ll 1 \quad (1.1)$$

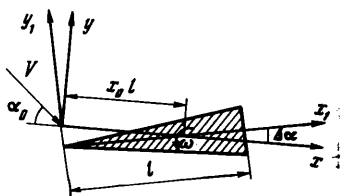
Выразим  $\Delta\alpha$  через значение угловой скорости в момент  $t = 0$

$$\Delta\alpha = \omega_0 t + \dots \quad \left( \omega_0 = \frac{\alpha_0' l}{V \cos \alpha} \right) \quad (1.2)$$

Тогда условие (1.1) равносильно предположению  $T_0 \gg T$ , где  $T_0 = 1 / \alpha_0'$  — характерное время нестационарного процесса.

Связь между координатами тела  $x_1, y_1, z_1$  и  $x, y, z$  в момент времени осуществляется по формулам

$$\begin{aligned} x_1 &= x + O(\tau + \omega_0)^2 \\ \tau y_1 &= \tau y - (x - x_0) \Delta\alpha(t) + O(\tau + \omega_0)^2 \\ \tau z_1 &= \tau z \end{aligned} \quad (1.3)$$



Из (1.2) (1.3) следует, что форма жесткого тела, имеющая в системе координат  $x_1, y_1, z_1$  вид  $f_1(x_1, y_1, z_1) = 0$  в системе координат  $x, y, z$  является уже функцией времени

$$f(t, x, y, z) = 0 \quad (1.4)$$

2. Задача нестационарного обтекания тела сводится, как известно, к решению квазилинейной системы газодинамических уравнений с граничными условиями на теле и ударной волне, которая в инерциальной системе координат  $(x, y, z)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \tau \operatorname{ctg}^2 \alpha \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \operatorname{ctg} \alpha \left( v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \tau \operatorname{ctg} \alpha \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\tau \operatorname{ctg} \alpha \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} \right) + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

$$\tau \operatorname{ctg} \alpha \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right) + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

$$\tau \operatorname{ctg} \alpha \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{p}{\rho^\gamma} + u \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\rho^\gamma} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \frac{p}{\rho^\gamma} + w \frac{\partial}{\partial z} \frac{p}{\rho^\gamma} = 0$$

$$\tau \operatorname{ctg} \alpha \left( \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} \right) + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

При больших углах атаки ( $\alpha \gg \tau$ ) поле возмущения, создаваемое телом на подветренной стороне, простирается на значительное расстояние от поверхности тела. Однако, поле давления в этой области слабое, а влияние его на наветренную сторону отсутствует при  $M_\infty \sin \alpha \gg 1$ . Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только наветренную сторону. Ударный слой в этой области тонкий и имеет порядок  $R \sim k \operatorname{tg} \alpha l$  ( $k$  — отношение плотностей на ударной волне).

Естественно считать, что возмущения, вызванные колебаниями тела с малыми угловыми скоростями, также малы. Тогда для продольной компоненты скорости можно воспользоваться известной оценкой для стационарного решения [2]

$$u = 1 + O(\tau) \approx 1 \quad (2.3)$$

Полагая в (2.1), (2.2)  $u \equiv 1$  и делая замену переменных

$$t, x, y, z \rightarrow \xi = x - t, x, y, z \quad (2.4)$$

эквивалентную применению закона плоских сечений [2], можно приближенно записать систему уравнений для искомых функций  $v, w, p, \rho$  в следующем виде с пара-

метрической зависимостью от  $\xi$ :

$$\begin{aligned} \tau \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \tau \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \\ \tau \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \tau \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\rho^\nu} + v \frac{\partial}{\partial y} \frac{p}{\rho^\nu} + w \frac{\partial}{\partial z} \frac{p}{\rho^\nu} &= 0 \\ \tau \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Система (2.5), (2.6) при фиксированном  $\xi$  описывает в приближенной постановке стационарное обтекание [2] некоторого искривленного тела, форма которого получается исходной подстановкой (2.4) в (1.4)

$$f(x + \xi, x, y, z) = F(\xi, x, y, z) = 0 \quad (2.7)$$

Заметим, что из (1.3) следует, что форма поперечного сечения искривленного тела сохраняется, т. е. форма искривленного тела получается путем искривления оси исходного тела  $z_1 = y_1 = 0$  по закону, вытекающему из (1.3), (2.4), (2.7)

$$y_m = a_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \\ a_0 = x_0 \xi \omega_0 / \tau, \quad \alpha_1 = -(x_0 + \xi) \omega_0 / \tau, \quad \alpha_2 = \omega_0 / \tau \quad (2.8)$$

Задаваясь рядом значений  $\xi$  и решая стационарную задачу (2.5), (2.6), можно (путем обратной замены) получить решение рассматриваемой нестационарной задачи с желаемой подробностью относительно распределения параметров течения по длине тела. Физически это отражает тот факт, что для фиксированного сечения исходного тела в некоторый момент времени можно подобрать форму такого неподвижного искривленного тела, чтобы отход ударных волн и поле параметров течения в этом сечении были близки.

3. В случае очень малых угловых скоростей вращения ( $\omega_0 / \tau \ll 1$ ) метод искривленных тел значительно упрощается. Действительно, при этом  $\alpha_i$  в (2.8) становятся малыми и возникает возможность линеаризации по этим параметрам

$$p(t, x, y, z) = p_0(x, y, z) + \alpha_1 p_{\alpha_1}(x, y, z) + \alpha_2 p_{\alpha_2}(x, y, z) \\ p_{\alpha_i} = (p_{\alpha_i} - p_0) / \alpha_i \quad (i = 1, 2) \quad (3.1)$$

Здесь  $p_0$  — решение стационарной задачи обтекания исходного тела, а  $p_{\alpha_i}$  — решение задач стационарного обтекания тел, искривленных по законам

$$y_m = \alpha_i x^i \quad (i = 1, 2) \quad (3.2)$$

(Значение  $a_0$  в (2.8) можно опустить, так как оно не оказывает влияния на решение и необходимо только для пространственно-временного соответствия задачи нестационарного движения тела и задачи стационарного обтекания искривленного тела.)

Таким образом, метод искривленных тел позволяет и в случае произвольных углов атаки свести задачу нестационарного обтекания тела к ряду стационарных (в нашем случае к трем).

Для представления решения (3.1) в виде, удобном для практического использования, можно воспользоваться формулами (3.7)–(3.14) работы [1] и результатами работы [3].

Рассматривая (2.5), (2.6), (2.8) и условия на ударной волне, можно сделать вывод, что определяющими параметрами для безразмерных функций, описывающих течение газа возле тонкого тела под большими углами атаки, совершающего колебания с малыми угловыми скоростями при гиперзвуковых скоростях полета, являются

$$\gamma, \quad \tau \operatorname{ctg} \alpha, \quad M_\infty \sin \alpha, \quad x_0, \quad \omega_0 / \tau \quad (i=1,2) \quad (3.3)$$

Первые три величины — известные параметры подобия при стационарном обтекании тонких тел гиперзвуковым потоком газа под большими углами атаки [2], последние определяют подобие чисто нестационарного движения и впервые получены в работе [4].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лунев В. В. Метод искривленных тел в задачах нестационарного гиперзвукового обтекания тонких тел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
2. Сычев В. В. Пространственные гиперзвуковые течения газа около тонких тел при больших углах атаки. ПММ, 1960, т. 24.
3. Белоцерковский С. М. Представление нестационарных аэродинамических моментов и сил при помощи коэффициентов вращательных производных. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1956, № 7.
4. Теленин Г. Ф. Законы подобия при больших сверхзвуковых скоростях. М., Оборонгиз, 1956.

О ВЛИЯНИИ НЕРАВНОВЕСНОСТИ В НАБЕГАЮЩЕМ ПОТОКЕ  
НА ОБТЕКАНИЕ КЛИНА

А. В. ЧИРИХИН

(Москва)

Рассматривается влияние «замораживания» потока в сопле гиперзвуковой аэродинамической трубы на параметры неравновесного обтекания клина.

Решение В. Н. Жигулева [1] для колебательной релаксации обобщается на случай неравновесного набегающего потока.

Показано, что в этом случае возмущения параметров замороженного за косой ударной волной течения могут менять знак, если поток в рабочей части значительно отклоняется от равновесного.

Предлагается метод пересчета экспериментальных результатов, полученных в трубах с замороженным течением на случай обтекания равновесным набегающим потоком.

1. Расчеты одномерного течения с колебательной релаксацией, проведенные по методу, предложенному в работе [2], показали, что для типичного гиперзвукового сопла при температуре в форкамере  $T_0 = 2000 - 4000^\circ \text{K}$  и давлении  $p_0 = 50 - 1000 \text{ атм}$  величина отношения  $T^*/T_0 = 0.6 - 0.86$  ( $T^*$  — температура замораживания колебаний), а степень замороженности

$$W = \frac{E^*}{H_0 - E^*} = 0.07 - 0.14, \quad H_0 = c_p T_0 + E_i(T_0)$$

где  $E^*$  и  $E_i(T_0)$  — значения колебательной энергии, соответствующие  $T^*$  и  $T_0$ ,  $c_p$  — удельная теплоемкость газа с замороженными колебательными степенями свободы.

(Результаты расчета приведены для течения в сопле с радиусом критического сечения  $r_* = 2.5 \text{ мм}$  и углом асимптотического конуса  $\Phi = 12^\circ$ . Рабочий газ — азот с характеристической температурой колебаний  $\theta = 3340 \text{ K}$  и временем релаксации  $\tau_0 = 18 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$  при давлении  $p = 1 \text{ атм}$  и температуре  $T = \theta$ .)

Таким образом, поток в рабочей части такой аэродинамической трубы может значительно отличаться от равновесного.

Далее рассматривается задача обтекания клина сверхзвуковым неравновесным потоком двухатомного газа с заданной степенью замороженности перед скачком.

2. Исходные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \rho^\circ \mathbf{V}^\circ &= 0, & (\mathbf{V}^\circ \nabla) \mathbf{V}^\circ &= -1 / \rho^\circ \nabla p^\circ \\ \frac{1}{2} V^{\circ 2} + c_p T^\circ + E_i &= \frac{1}{2} V_2^2 + c_p T_2 + E_i, & p^\circ &= \rho^\circ R T^\circ \\ \frac{dE_i}{dt} &= \frac{E_i(T) - E_i}{\tau}, & E_i(T) &= \frac{R\theta}{e^{\theta/T} - 1}, & \tau &= \tau(p, T) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь градусом отмечены параметры неравновесного, а индексом 2 — параметры замороженного течения за ударной волной;  $\mathbf{V}$  — вектор скорости,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $T$  — температура,  $R$  — газовая постоянная,  $\tau$  — время релаксации.

Если предположить, что набегающий поток заморожен при таком значении  $E^*$ , что выполняется условие

$$\alpha = |e_i(1 - \beta)| \ll 1, \quad e_i = \frac{E_i(T_2)}{c_p T_2}, \quad \beta = \frac{E^*}{E_i(T_2)}$$