

в работе [3] при $M_0 = 6$. Максимум длины зоны отрыва наблюдается при угле $\alpha = 50 \div 60^\circ$. При этих же углах наблюдается наиболее интенсивная струя газа, идущая вдоль поверхности цилиндра в область отрывного течения. По-видимому, эта струя играет существенную роль и в возникновении отрывной зоны определенной длины. Следует отметить здесь, что при малых углах наклона такое определение l_s становится некорректным, т. е. в этих случаях оторвавшийся пограничный слой вновь прилипает к поверхности (Фиг. 1, б). Однако для описания некоторых интегральных характеристик явления, видимо, удобно сохранять за величиной l_s ее понимание в определенном выше смысле. С этой точки зрения удобно описывать при любом α и форму линии отрыва в координатах x_s, y_s , предложенных в работе [1, 2]. В этих координатах линию отрыва в первом приближении можно в проведенной серии экспериментов по-прежнему аппроксимировать формулой $y_s = \sqrt{x_s}$.

Разумеется, что при некоторой ширине прямоугольного препятствия при прочих равных параметрах форма линии отрыва не будет аппроксимироваться этой зависимостью. Более того, при большой ширине, естественно, форма линии отрыва будет иметь прямолинейный центральный участок.

Авторы выражают благодарность Г. Г. Черному и Г. Н. Андрееву за обсуждение работы.

НИИ механики МГУ

ЛИТЕРАТУРА

Поступило 28 VII 1969

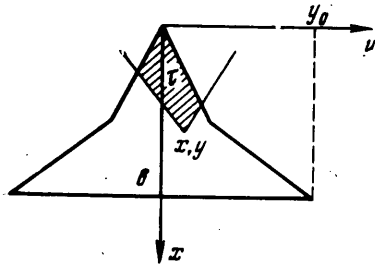
1. Вейтенко Д. В., Зубков А. И., Панов Ю. А. Обтекание цилиндрического препятствия на пластине сверхзвуковым потоком газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.
2. Вейтенко Д. М., Зубков А. И., Панов Ю. А. О существовании сверхзвуковых зон в пространственных отрывных течениях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
3. Авдудевский В. С., Медведев К. И. Физические особенности течения в области отрыва при трехмерном взаимодействии пограничного слоя с ударной волной. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
4. Панов Ю. А. Взаимодействие падающего трехмерного скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.

КРЫЛЬЯ МИНИМАЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ЗАДАННОЙ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЕ

И. И. БУРАКОВ

(Москва)

В линейной постановке рассмотрена вариационная задача по определению оптимальной деформации срединной поверхности крыла, обладающего минимальным волновым сопротивлением. Показано, что для крыльев со сверхзвуковой передней и прямой задней кромками, деформация которых задана в виде двойного полинома, суммарные аэродинамические характеристики могут быть просто выражены через уравнение передней кромки крыла. Это позволяет решить вариационную задачу методом Ритца и получить не только минимум волнового сопротивления [1], но и найти оптимальную деформацию крыла. В качестве примера рассмотрено треугольное крыло и крыло с изломом передней кромки.



Фиг. 1

1. Рассмотрим обтекание сверхзвуковым потоком идеального газа крыла, имеющего нулевую толщину и расположенного в плоскости $z = 0$. Пусть форма крыла в плане такая, что передняя кромка будет сверхзвуковой, а задняя — прямой, перпендикулярной оси x (Фиг. 1). Деформация крыла пусть задана функцией $z = z(x, y)$, причем будем считать, что

$$z(x, y) = z(x, -y)$$

Для коэффициента давления C_p в некоторой точке (x, y) крыла имеет место следующая формула:

$$C_p = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \iint \frac{\alpha(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta(y-\eta)^2}} \quad (1.1)$$

Здесь τ — область крыла, ограниченная обратным конусом Маха, проведенным из точки (x, y)

$$\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}, \quad \alpha(x, y) = -\partial z(x, y) / \partial x$$

(M_∞ — число Маха набегающего потока)

Следующее тождество может быть проверено непосредственно

$$\frac{\partial}{\partial x} \iint_{\tau} \frac{\alpha d\xi d\eta}{r} = \frac{\pi \alpha(x, y)}{\beta} - \frac{\partial}{\partial y} \iint_{\tau} \frac{\alpha(\xi, \eta)}{r} \frac{y - \eta}{x - \xi} d\xi d\eta \quad (1.2)$$

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 - \beta^2(y - \eta)^2}$$

Первое слагаемое в правой части выражения (1.2) соответствует обтеканию профиля, в то время как второе слагаемое учитывает пространственный характер течения.

Используя (1.2), можно получить для коэффициента подъемной силы следующее известное из работы [2] выражение:

$$C_y = \frac{2}{S} \iint_D C_p dx dy = \frac{4}{\beta S} \iint_D \alpha dx dy \quad (1.3)$$

Здесь S — площадь крыла, D — область, занятая крылом.

Коэффициент волнового сопротивления C_x может быть выражен через функцию $\alpha(x, y)$ следующим образом:

$$C_x = \frac{2}{S} \iint_D C_p \alpha dx dy = \frac{4}{\beta S} \iint_D \alpha^2(x, y) dx dy - \frac{4}{\pi S} \iint_D \alpha \frac{\partial}{\partial y} \iint_{\tau} \frac{\alpha(\xi, \eta)}{r} \frac{y - \eta}{x - \xi} d\xi d\eta dx dy \quad (1.4)$$

Формула (1.4) верна для крыльев со сверхзвуковыми кромками произвольной формы в плане, но для рассматриваемого класса крыльев с прямой задней кромкой четырехкратный интеграл в (1.4) может быть преобразован, если поменять местами порядок интегрирования по области τ и переменной y , предварительно освободившись от производной по y интегрированием по частям.

Таким образом, выражение для C_x приобретает следующий вид:

$$C_x = \frac{4}{\beta S} \iint_D \alpha^2(x, y) dx dy + \frac{4}{\beta S^3 \pi} \int_0^b dx \iint_{\tau(x)} \alpha(\xi, \eta) (x - \xi) d\xi d\eta \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} \sqrt{1 - t^2} dt \quad (1.5)$$

$$(t = \beta(y - \eta) / x - \xi)$$

В этой формуле b — длина корневой хорды крыла; $\tau(x)$ — часть крыла, расположенная впереди прямой $x = \text{const}$.

В частности, если $\alpha = a(x) + b(x)y^2$, то из (1.5) легко могут быть получены формулы, приведенные в работах [2, 3].

2. Полученные в предыдущем пункте соотношения позволяют решить вариационную задачу методом Ритца, если принять в качестве координационных функций полиномы по степеням x и y .

Представим функцию местных углов атаки $\alpha(x, y)$ в виде

$$\alpha(x, y) = \beta C_y \sum_{m, n=0}^{M, N} a_{mn} \left(\frac{x}{b}\right)^n \left(\frac{y}{y_0}\right)^{2m} = \beta C_y \alpha_1(x_1, y_1) \quad (2.1)$$

$$(x_1 = x/b, y_1 = y/y_0)$$

Здесь y_0 — полуразмах крыла.

Подставив (2.1) в (1.3), найдем, что

$$\sum_{m, n=0}^{M, N} \frac{4}{S_1} \iint_{D_1} a_{mn} x_1^n y_1^{2m} dx_1 dy_1 = \sum a_{mn} C_{mn} = 1 \quad \left(S_1 = \frac{S}{by_0}\right) \quad (2.2)$$

Область D_1 — это область D в переменных x_1, y_1 . Коэффициент волнового сопротивления C_x можно представить следующим образом:

$$\frac{C_x}{C_y^2 \beta} = \sum_{m,n,j,i=0}^{M,N} a_{mn} a_{ji} A_{mn,ji} \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq m, j \leq M \\ 0 \leq n, i \leq N \end{array} \right) \quad (2.3)$$

Коэффициент $A_{mn,ji}$ вычисляется по формуле

$$A_{mn,ji} = \frac{8}{S_1} \sum_{k=0}^m \frac{1}{\beta_1^{2k}} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{C_{2m}^{2k}}{2m+2j-2k+1} \times \quad (2.4)$$

$$\times \int_0^1 x_1^i [f(x_1)]^{2m+2j-2k+1} dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \int_1^{x_1} \xi_1^n (\xi_1 - x_1)^{2k} d\xi_1$$

$$\beta_1 = \frac{\beta y_0}{b}$$

Здесь $y_1 = f(x_1)$ — уравнение передней кромки крыла при $y_1 \geq 0$. В случае крыла треугольной формы в плане $f(x_1) = x_1$, $S_1 = 1$ и формула для коэффициента $A_{mn,ji}$ приобретает следующий вид:

$$A_{mn,ji} = \sum_{k=0}^m \frac{8}{\beta_1^{2k}} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{C_{2m}^{2k} (2m+2j-2k+1)^{-1}}{C_{2m}^{2k} (2m+2j+n+i+2)} \quad (2.5)$$

Для определения оптимальной деформации, обеспечивающей минимум волнового сопротивления, необходимо решить следующую задачу: найти минимум выражения (2.3) при изометрическом условии (2.2).

Метод множителей Лагранжа приводит к рассмотрению следующей линейной системы:

$$\begin{aligned} a_{00} B_{00,00} + a_{01} B_{00,01} + \dots + a_{MN} B_{00,MN} + \lambda C_{00} &= 0 \\ a_{00} B_{01,00} + a_{01} B_{01,01} + \dots + a_{MN} B_{01,MN} + \lambda C_{01} &= 0 \\ \dots & \dots \\ a_{00} B_{MN,00} + a_{01} B_{MN,01} + \dots + a_{MN} B_{MN,MN} + \lambda C_{MN} &= 0 \\ a_{00} C_{00} + a_{01} C_{01} + \dots + a_{MN} C_{MN} &= 1 \\ B_{mn,ji} &= A_{mn,ji} + A_{ji,mn} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь λ — множитель Лагранжа.

Минимальное волновое сопротивление крыла определяется по формуле

$$C_x / C_y^2 \beta = -1/2 \lambda \quad (2.7)$$

Формула для вычисления деформаций имеет вид

$$z(x, y) = \beta C_y z_1(x_1, y_1) = \beta C_y b \sum_{m,n=0}^{M,N} a_{mn} \frac{1}{n+1} (1 - x_1^{n+1}) y_1^{2m}$$

3. Для иллюстрации приведенного метода рассмотрим несколько примеров расчета оптимальных крыльев, причем для большей наглядности деформацию крыла будем представлять в относительных координатах X, Z , определяемых следующим образом:

$$X = \frac{x - \psi(y)}{b(y)}, \quad Z = \frac{z_1}{b(y)}$$

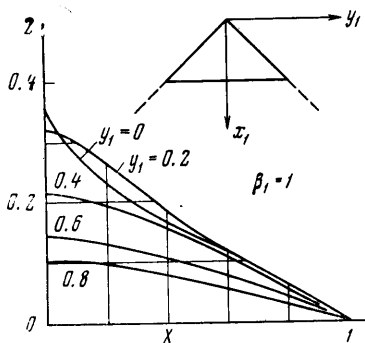
Здесь $b(y)$ — местная хорда крыла в сечении y ; $\psi(y)$ — уравнение передней кромки.

На фиг. 2 приведена оптимальная деформация треугольного крыла со звуковой передней кромкой. Число варьируемых коэффициентов a_{mn} было равно 36 ($M = 5, N = 5, \beta_1 = 1$). Из рассмотрения представленной деформации видно, что угол наклона местной хорды к плоскости $Z = 0$ в центральных сечениях имеет значительно большую величину, чем в концевых сечениях.

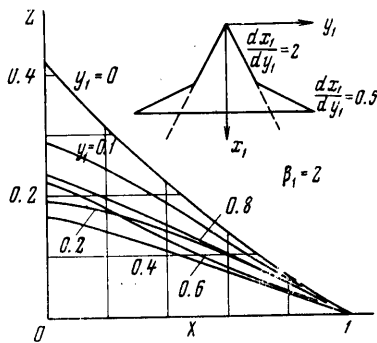
Приводим вычисленные значения волнового сопротивления треугольного крыла $C_0 = C_x / C_y^2 \beta$ в зависимости от чисел M и N

$M=0$	1	2	2	3	3
$N=0$	2	2	3	3	4
$C_0=0.25$	0.227143	0.226506	0.225249	0.224958	0.224345

Отсюда видно, что при увеличении чисел M и N волновое сопротивление очень быстро стремится к своей нижней границе, которая может быть определена методом, описанным в работе [1].



Фиг. 2



Фиг. 3

Деформация крыла с изломом передней кромки приведена на фиг. 3. Число коэффициентов a_{mn} равно 20 ($M = 3, N = 4$).

Приводим значения волнового сопротивления C_0

$M=0$	1	2	2	3	3
$N=0$	2	2	3	3	4
$C_0=0.25$	0.241884	0.238601	0.237643	0.235472	0.234858

Из всего изложенного следует, что для крыльев с указанными ограничениями на форму в плане метод Ритца дает возможность при заданной подъемной силе получить оптимальную деформацию крыла, волновое сопротивление которого мало отличается от своей нижней границы.

Поступило 17 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

- Жилин Ю. Л. Крылья минимального сопротивления. ПММ, 1957, вып. 2.
- Коган М. Н. Некоторые интегральные свойства сверхзвуковых течений. Тр. ЦАГИ, 1955, № 687.
- Булыгина Е. В. Оптимальная кривизна и крутка сверхзвуковых треугольных крыльев с изломом передней кромки. Госкомитет Совета Министров СССР по авиац. техн., 1963.

О КОЛЕБАНИЯХ ТОНКИХ ТЕЛ ПОД БОЛЬШИМИ УГЛАМИ АТАКИ В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

А. В. КРАСИЛЬНИКОВ

(Москва)

Проведено обобщение метода искривленных тел [1] на случай произвольных углов атаки в рамках закона плоских сечений [2].

1. Рассмотрим задачу обтекания тонкого тела, совершающего плоские угловые колебания относительно некоторого центра вращения с малой угловой скоростью гиперзвуковым потоком газа ($M_\infty \gg 1$). Для этого введем декартову систему координат x_1, y_1, z_1 , жестко связанную с телом (фигура), и инерциальную систему координат x, y, z , оси которой в момент времени $t = 0$ совпадают с одноименными осями x_1, y_1, z_1 ; $uV \sin \alpha$, $vV \sin \alpha$, $wV \sin \alpha$ — проекции вектора скорости на оси x, y, z ; $\rho \rho_\infty$ — плотность; $\rho \rho_\infty V^2 \sin^2 \alpha$ — давление; R — форма ударной волны. Тело считаем тонким, так что относительный максимальный поперечный размер $\tau = d/l \ll 1$.