ДИФФУЗИЯ К ТВЕРДОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЕ В ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Ю. П. ГУПАЛО, Ю. С. РЯЗАНЦЕВ

(*Москва*)

Расчет диффузионного потока вещества на поверхность тела, обтекаемого жидкостью, представляет собой одну из основных задач физико-химической гидродинамики и находит приложение в химической макрокинетике [1].

Предельный диффузионный поток к твердой сферической частице, обтекаемой вязкой несжимаемой жидкостью, был вычислен В. Г. Левичем [1] в условиях стоксова течения, т. е. при числах Рейнольдса $\mathrm{R} \to 0$.

Ниже получено решение этой задачи при конечных числах Рейнольдса. Оно основано на результатах определения поля течения методом сращивания асимптотического внешнего (озееновского) и внутреннего (стоксова) разложений функции тока [2]. Как показывает сопоставление с численными расчетами и экспериментов [3], полученное этим методом решение хорошо описывает обтекание сферы в широком диапазоне значений R.

Задача рассматривается в рамках обычного предположения о наличии диффузионного пограничного слоя на поверхности частицы, где диффузионный перенос вещества вдоль поверхности пренебрежимо мал по сравнению с радиальным диффузионным переносом. Это справедливо при числах Пекле $P = Ua / D \gg 1$ (a — радиус частицы, D — коэффициент диффузии, U — скорость потока на бесконечности).

Уравнение стационарной конвективной диффузии в пограничном слое в сферических координатах (угол ϑ отсчитывается от радиуса, направленного в переднюю критическую точку) можно записать в виде

$$v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\vartheta \frac{\partial c}{\partial \vartheta} = D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right) \qquad (1)$$

Здесь c — концентрация вещества в потоке, v_r, v_ϑ — радиальная и касательная составляющие скорости потока.

Граничные условия

$$c = 0, \quad r = a; \qquad c = c_0, \quad r \to \infty \qquad (2)$$

Составляющие поля скоростей выразим через функцию тока

$$v_\vartheta = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \qquad v_r = -\frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}$$

В соответствии с результатами работы [2] будем считать, что

$$\psi \sim \frac{U}{4}(r-a)^2 \sin^2 \theta \left[\left(1 + \frac{3}{8} \mathrm{R} \right) \left(2 + \frac{a}{r} \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{3}{8} R \left(2 + \frac{a}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \right] \quad \left(R = \frac{Ua}{\nu} \right) \qquad (3)$$

В частном случае $\mathrm{R} = 0$ функция тока (3) принимает вид функции тока стоксова обтекания сферы, которая была использована при расчете диффузионного притока к частице В. Г. Левичем [1].

В уравнении диффузии перейдем от переменных $r\vartheta$ к переменным Мизеса $\psi\vartheta$, получим

$$\frac{\partial c}{\partial \vartheta} = D \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial \psi}\left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial c}{\partial \psi}\right) \tag{4}$$

Граничные условия примут вид

$$c = 0, \quad \psi = 0; \qquad c = c_0, \quad \psi \to \infty \tag{5}$$

Полагая, что толщина диффузионного слоя мала по сравнению с радиусом частицы, в окрестности сферы, где $\psi \sim (r-a)^2 \ll a^2$, запишем

$$r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} = a^2 \sin\theta \left[3U^* \left(1 - k^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right)\right]^{1/2} \psi^{1/2} + O(\psi)$$
$$U^* = (1 + {}^7/_8\mathrm{R})U, \qquad k^2 = \mathrm{R}(1 + {}^7/_8\mathrm{R})^{-1} \tag{6}$$

Далее ограничимся первым членом разложения (6).

Для решения задачи (4) — (6) введем новую переменную

$$\eta = \psi^{1/2}[Da^2(3U^*)^{1/2}A(\vartheta, k)]^{-1/3}, \qquad A(\vartheta, k) = \int_0^{\vartheta} \sin^2\vartheta \left(1 - k^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right)^{1/2} d\vartheta \tag{7}$$

Тогда уравнение (4) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, решение которого при граничных условиях (5) имеет вид

$$c = c_0 \left(\frac{4}{9}\right)^{1/3} \left[\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\right]^{-1} \int_0^{\eta} \exp\left(-\frac{4}{9}\eta^3\right) d\eta \tag{8}$$

В интеграле $A(\vartheta, k)$, определяемом формулой (7), нижний предел интегрирования был положен равным нулю по следующим соображениям: вблизи передней критической точки ($\vartheta = 0$) при сколь угодно малых расстояниях до поверхности частицы, т. е. при значениях ψ, сколь угодно мало отличных от нуля, должны иметь $c \neq 0$.

Формула (8) дает распределение концентрации вблизи частицы, на поверхности которой происходит полное поглощение диффундирующего вещества.

Диффузионный поток на поверхность частицы равен

$$j = D\left(\frac{\partial c}{\partial r}\right)_{r=a} = \frac{c_0}{6^{1/3}\Gamma({}^4/_3)}\left(\frac{U^* D^2}{a^2}\right)^{1/3} \sin\vartheta \left(1 - k^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)[A(\theta, k)]^{-1/3} =$$
$$= j_0 \left(1 - k^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right)^{1/2} \left[\frac{(1 + {}^7/_8R)(\vartheta - {}^1/_2 \sin 2\vartheta)}{2A(\vartheta, k)}\right]^{1/3} \tag{9}$$

Здесь j_0 — диффузионный поток на поверхность частицы при $\mathrm{R} = 0$.

Интеграл $A(\vartheta, k)$ можно представить в виде

$$A(\vartheta, k) = \frac{2}{15}\left(1 - 3\cos\vartheta - \frac{2}{k^2}\right)\sin\vartheta\left(1 - k^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)^{1/2} - \\ - \alpha(k)F\left(\frac{\vartheta}{2}, k\right) + \beta(k)E\left(\frac{\vartheta}{2}, k\right) \tag{10}$$

$$\alpha(k) = \frac{8}{15}\frac{(1-k^2)(2-k^2)}{k^4}, \qquad \beta(k) = \frac{16}{15}\frac{k^4 - k^2 + 1}{k^4}$$

где $F(\vartheta/2, k)$ и $E(\vartheta/2, k)$ — эллиптические интегралы первого и второго рода.

В частном случае $\mathrm{R} = 8$ формула (9) примет вид

$$j = \frac{5^{1/3}}{\Gamma(4/3)}\frac{c_0 D}{a}\mathrm{P}^{1/3}(1 + \cos\vartheta)(7 + 3\cos\theta)^{-1/3}$$

Интегрируя выражение (9) по поверхности сферы, для полного потока на поверхность частицы получаем

$$I = \frac{3\pi c_0}{6^{1/3}\Gamma(4/3)}(U^* D^2 a^4)^{1/3}[B(k)]^{2/3} = I_0\left(1 + \frac{7}{8}\mathrm{R}\right)^{1/3}\left[\frac{2}{\pi}B(k)\right]^{2/3}$$

$$B(k) = \begin{cases} A(\pi, k), & \mathrm{R} \leqslant 8 \\ k^{-3}A(\pi, 1/k), & \mathrm{R} > 8 \end{cases} \tag{11}$$

Здесь I_0 — полный диффузионный поток при $\mathrm{R} = 0$.

При $\mathrm{R} = 0$ выражения (9) и (11) совпадают с полученными в работе [1].

Результаты расчета распределения диффузионного потока

$$j^* = j\mathrm{P}^{-1/3}\frac{a}{Dc_0}$$

и полного потока вещества

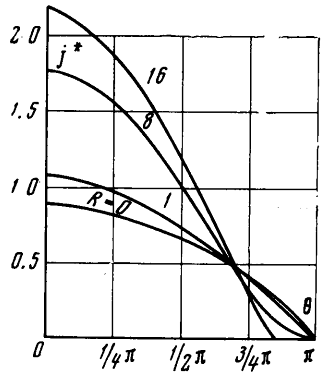
$$I^* = I\mathrm{P}^{-1/3}\frac{1}{Dc_0 a}$$

на сферическую частицу при различных значениях числа Рейнольдса приводятся на фиг. 1 и 2. На большей части поверхности сферы поток увеличивается с ростом числа Рейнольдса, а в областях, близких к кормовой части сферы, уменьшается (фиг. 1). При этом полный поток на частицу растет (фиг. 2). Возрастание полного потока является значительным и даже при $\mathrm{R} = 1$ достигает 14%.

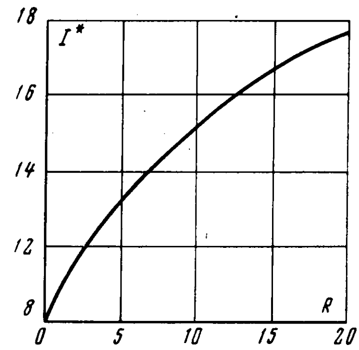
Следует отметить одну особенность полученных выражений для распределения концентрации и диффузионных потоков, связанную с характером вязкого обтекания сферической частицы при конечных числах Рейнольдса. Из формулы (3) видно, что при $\mathrm{R} > 8$ картина течения изменяется: позади сферы образуется зона с циркуляцией, размеры которой увеличиваются с ростом числа Рейнольдса. Поэтому формулы (8) и (9) имеют смысл лишь в диапазоне $0 \leqslant \vartheta < \vartheta_*$, где

$$\vartheta^* = \begin{cases} \pi & (\mathrm{R} \leqslant 8) \\ \pi - \arccos(3/4 + 2R^{-1}) & (\mathrm{R} > 8) \end{cases} \qquad (12)$$

При вычислении полного потока на сферу при $\mathrm{R} > 8$ область углов $\vartheta > \vartheta_*$ не учитывалась.



Фиг. 1



Фиг. 2

В заключение оценим при различных числах Рейнольдса толщину диффузионного пограничного слоя δ по формуле

$$\delta = \frac{Dc_0}{j}$$

Видно, что на большей, примыкающей к передней критической точке, части сферы, которая дает основной вклад в величину полного потока, толщина диффузионного пограничного слоя при отличных от нуля числах Рейнольдса оказывается меньше, чем при $\mathrm{R} = 0$.

Поступило 7 VIII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
2. Kaplun S., Lagerstrom P. A. Asimptotic expansions of Navier — Stokes solutions for small Reynolds numbers. J. Math. Mech., 1957, vol. 6, p. 585.
3. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.