№ 6 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1969

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ПЛОСКОЕ ВРАЩЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ОТ ИСТОЧНИКА

Ю. А. ГОСТИНЦЕВ

(*Москва*)

Получено решение уравнений Навье — Стокса для одного класса нестационарных осесимметричных плоских вращающихся потоков при наличии в жидкости линейного источника или стока постоянной интенсивности.

1. В общем виде проблема формулируется следующим образом. Пусть в рассматриваемой области вязкой несжимаемой жидкости (эта область может быть как бесконечной, так и ограниченной) к моменту $t = 0$ существует заданное стационарное поле тангенциальной v_φ и радиальной v_r скоростей течения, причем радиальное движение можно рассматривать как результат действия линейного источника или стока постоянной мощности q, расположенного на оси вращения. (В частном случае жидкость при $t < 0$ может иметь либо одно радиальное, либо одно тангенциальное движение, либо вообще покоиться.)

Пусть теперь, начиная с момента $t = 0$, у границ течения жидкости по той или иной причине происходит изменение граничных условий на скорость вращения (при $t > 0$ эти условия в общем случае могут зависеть от времени).

Если при этом плоское течение остается осесимметричным, а радиальная скорость — стационарной (не меняются во времени ни мощность источника — стока, ни граничные условия на v_r), то полная система уравнений Навье — Стокса сводится к двум уравнениям для давления и для круговой скорости

$$v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{v_\varphi^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{v_r}{r^2}\right) \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{v_r v_\varphi}{r}=\nu\left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\frac{v_\varphi}{r^2}\right) \qquad (1.2)$$

Введем в рассмотрение безразмерные переменные

$$W=\frac{v_\varphi}{v_0},\quad \xi=r\frac{v_0}{\nu},\quad \tau=t\frac{v_0^2}{\nu},\quad R_r=\frac{q}{2\pi\nu},\quad \Omega=\frac{p}{\rho v_0^2}$$

где v_0 — некоторая характерная величина скорости вращения, а R_r имеет смысл числа Рейнольдса для радиального движения (R_r положительно в случае радиального течения от оси вращения, равно нулю при $v_r = 0$ и отрицательно при течении к оси).

Тогда, с учетом того что из уравнения неразрывности для осесимметричного потока следует $v_r = q / (2\pi r)$, уравнения (1.1) и (1.2) принимают вид

$$\frac{R_r^2}{\xi^3}+\frac{W^2}{\xi}=\frac{\partial\Omega}{\partial\xi} \qquad (1.3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial\tau}+\frac{R_r}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial\xi}(W\xi)=\frac{\partial^2 W}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial W}{\partial\xi}-\frac{W}{\xi^2} \qquad (1.4)$$

Уравнение (1.4) можно проинтегрировать независимо от (1.3). Исследуем его решение с граничными условиями наиболее общего вида

$$k_1 W + k_2 \frac{\partial W}{\partial \xi} = \psi_1(\tau) \text{ при } \xi = a,$$

$$k_1' W + k_2' \frac{\partial W}{\partial \xi} = \psi_2(\tau) \text{ при } \xi = b \tag{1.5}$$

и начальным условием

$$W(0, \xi) = \frac{C_1}{\xi} + c_2 \xi^{(1+R_r)} \tag{1.6}$$

Выбор начального условия в таком виде дает возможность рассматривать наиболее интересные с практической точки зрения случаи развития течения из состояния покоя ($C_1 = C_2 = 0$), потенциального ($C_2 = 0$) и «квазитвердого» ($C_1 = 0$, $R_r = 0$) вращения, или из состояния стационарного вращения жидкости, имеющего место в поле радиального течения от источника ($C_2 \neq 0, R_r \neq 0$).

Кроме этого, такое начальное условие позволяет существенно упростить решение задачи. В самом деле, введем в рассмотрение новую переменную

$$\vartheta(\xi, \tau) = W(\xi, 0) - W(\xi, \tau) \tag{1.7}$$

Легко видеть, что тогда вид уравнения (1.4) и граничных условий не изменится, а начальное условие станет нулевым. Таким образом, для переменной $\vartheta(\xi, \tau)$ получаем краевую задачу с нулевым начальным условием и зависящими от времени граничными условиями. Такую задачу можно сначала решить с граничными условиями, не зависящими от времени (ψ_1 и ψ_2 — постоянные), а затем с помощью интеграла Дюамеля провести обобщение на случай, когда ψ_1 и ψ_2 — функции времени.

Итак, получим сначала решение для следующей краевой задачи

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + \frac{R_r}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi}(\vartheta \xi) = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} - \frac{\vartheta}{\xi^2} \tag{1.8}$$

$$\beta_1 \vartheta + \beta_2 d\vartheta / d\xi = \beta_3 \text{ при } \xi = a, \ \beta_1' \vartheta + \beta_2' d\vartheta / d\xi = \beta_3' \text{ при}$$

$$\xi = b, \ \vartheta = 0 \text{ при } \tau = 0$$

где приняты обозначения

$$\beta_1 = -k_1, \ \beta_2 = -k_2, \ \beta_3 = k_3 - k_1 W(a, 0) - k_2 [dW / d\xi]_{\xi=a}$$

$$\beta_1' = -k_1', \ \beta_2' = -k_2', \ \beta_3' = k_3' - k_1' W(b, 0) - k_2' [dW / d\xi]_{\xi=b}$$

а k_3 и k_3' — значения $\psi_1(\tau)$ и $\psi_2(\tau)$ при $\tau = 0$. Для решения (1.8) воспользуемся интегральным преобразованием Лапласа [1]

$$\Theta(\xi, s) = \int_0^\infty \vartheta(\xi, \tau) e^{-s\tau} d\tau$$

где $\Theta(\xi, s)$ — изображение по Лапласу функции $\vartheta(\xi, \tau)$, s — параметр преобразования, а $\vartheta(\xi, \tau)$ — оригинал функции.

Уравнение (1.8) после преобразования сводится к уравнению Бесселя для функции мнимого аргумента

$$\xi^2 \ddot{\Theta} + \xi \dot{\Theta} (1 - R_r) - \Theta (1 + R_r + s\xi^2) = 0 \tag{1.9}$$

с граничными условиями

$$\beta_1 \Theta + \beta_2 d\Theta / d\xi = \beta_3 / s \text{ при } \xi = a, \qquad \beta_1' \Theta + \beta_2' d\Theta / d\xi = \beta_3' / s \text{ при } \xi = b$$

Общее решение (1.9) имеет вид

$$\Theta = \xi^{n-1}[AI_n(\xi\sqrt{s}) + BK_n(\xi\sqrt{s})] \quad (n = 1 + {}^1/_2R_r)$$

Если в соответствии с граничными условиями определить значения постоянных интегрирования, то будет иметь место соотношение

$$Q = \Theta s\Delta(s) = (\xi a)^{n-1}[I_n(\xi\sqrt{s})\{\beta_3(b/a)^{n-1}[(\beta_2'(n-1)b^{-1} + \beta_1')K_n(b\sqrt{s}) -$$
$$- m'(K_{n-1}(b\sqrt{s}) + K_{n+1}(b\sqrt{s}))] - \beta_3'[(\beta_2(n-1)a^{-1} + \beta_1)K_n(a\sqrt{s}) -$$
$$- m(K_{n-1}(a\sqrt{s}) + K_{n+1}(a\sqrt{s}))]\} + K_n(\xi\sqrt{s})\{\beta_3'[(\beta_2(n-1)a^{-1} + \beta_1)I_n(a\sqrt{s}) +$$
$$+ m(I_{n-1}(a\sqrt{s}) + I_{n+1}(a\sqrt{s}))] - (b/a)^{n-1}\beta_3[(\beta_2'(n-1)b^{-1} + \beta_1')I_n(b\sqrt{s}) +$$
$$+ m'(I_{n-1}(b\sqrt{s}) + I_{n+1}(b\sqrt{s}))]\}]$$
$$\Delta(s) = (ab)^{n-1}\{[(\beta_2(n-1)a^{-1} + \beta_1)I_n(a\sqrt{s}) + m(I_{n-1}(a\sqrt{s}) +$$
$$+ I_{n+1}(a\sqrt{s}))][\beta_2'(n-1)b^{-1} + \beta_1')K_n(b\sqrt{s}) - m'(K_{n-1}(b\sqrt{s}) + K_{n+1}(b\sqrt{s}))] -$$
$$- [(\beta_2'(n-1)b^{-1} + \beta_1')I_n(b\sqrt{s}) + m'(I_{n-1}(b\sqrt{s}) +$$
$$+ I_{n+1}(b\sqrt{s}))][(\beta_2(n-1)a^{-1} + \beta_1)K_n(a\sqrt{s}) - m(K_{n-1}(a\sqrt{s}) + K_{n+1}(a\sqrt{s}))]\}$$
$$(m = {}^1/_2\beta_2\sqrt{s}, \quad m' = {}^1/_2\beta_2'\sqrt{s}) \tag{1.10}$$

В соответствии с формулой обращения для преобразования Лапласа изображению $\Theta(\xi, s)$ соответствует оригинал

$$\vartheta(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} e^{s\tau}\Theta(\xi, s)\,d\tau = \frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} e^{s\tau}\frac{Q(\xi, s)}{s\Delta(s)} \tag{1.11}$$

На основании формул (10) и (11) можно получить точное решение любой задачи о развитии плоского нестационарного осесимметричного вращения вязкой жидкости в поле стационарного радиального течения от источника или стока, если только начальное распределение тангенциальной скорости удовлетворяет условию (1.6). Рассмотрим некоторые из таких задач.

2. Пусть в пространстве между бесконечно длинными коаксиальными вращающимися цилиндрами с пористыми стенками существует стационарное плоское радиальное течение и тангенциальное движение, удовлетворяющее (1.6). Пусть теперь в момент $\tau = 0$ на обоих цилиндрах имеет место изменение граничных условий, которые принимают вид (1.5).

В этом случае, возвращаясь к выражениям (1.10) и (1.11), можно видеть, что подынтегральная функция в (1.11) является однозначной функцией s с простым полюсом при $s = 0$ и простыми полюсами в $s = -\alpha_i^2$, где α_i — корни (все действительные и простые) уравнения

$$[(\beta_2'(n-1)b^{-1} + \beta_1')J_n(\alpha b) + {}^1/_2\beta_2'\alpha(J_{n-1}(\alpha b) - J_{n+1}(\alpha b))] \times$$
$$\times [(\beta_2(n-1)a^{-1} + \beta_1)Y_n(\alpha a) + {}^1/_2\beta_2\alpha(Y_{n-1}(\alpha a) - Y_{n+1}(\alpha a))] -$$
$$- [(\beta_2(n-1)a^{-1} + \beta_1)J_n(\alpha a) + {}^1/_2\beta_2\alpha(J_{n-1}(\alpha a) - J_{n+1}(\alpha a))] \times$$
$$\times [(\beta_2'(n-1)b^{-1} + \beta_1')Y_n(\alpha b) + {}^1/_2\beta_2'\alpha(Y_{n-1}(\alpha b) - Y_{n+1}(\alpha b))] = 0 \tag{2.1}$$

При выводе (2.1) из (1.10) использовались известные соотношения

$$K_n(ze^{{}^1/_2\pi j}) = {}^1/_2\pi j e^{-{}^1/_2 n\pi j}[-J_n(z) + jY_n(z)]$$
$$I_n(ze^{{}^1/_2\pi j}) = e^{{}^1/_2 n\pi j}J_n(z) \tag{2.2}$$

Согласно теореме о разложении мероморфной функции вида $Q(s) / s\Delta(s)$ (2.1) можно представить в виде суммы вычетов функции $\Theta(s, \xi)$ по всем особым точкам, т. е.

$$\vartheta(\tau, \xi) = \operatorname{res}\Theta(0, \xi) + \sum_{s_i} \operatorname{res}\Theta(s_i, \xi) = \frac{Q(0, \xi)}{\Delta(0, \xi)} + \sum_{i=1}^{\infty} e^{s_i \tau} \frac{Q(s_i, \xi)}{s_i \, \partial\Delta(s_i, \xi)/\partial s}$$

Из (1.10) легко найти вычет $\Theta(s, \xi)$ относительно простого полюса $s = 0$

$$\operatorname{res}\Theta(0, \xi) = \frac{1}{D_0 - C_0}\left(A_0 + B_0 \frac{b^{2n}}{\xi^{2n}}\right)\left(\frac{\xi}{b}\right)^{2n-1} \tag{2.3}$$

$$A_0 = \beta_3 \sigma^{1-n}(\beta_1' - \beta_2' b^{-1}) - \beta_3' \sigma^{-n}(\beta_1 - \beta_2 a^{-1})$$

$$B_0 = \beta_3' \sigma^n (\beta_2(2n-1)a^{-1} + \beta_1) - \beta_3 \sigma^{1-n}(\beta_2'(2n-1)b^{-1} + \beta_1')$$

$$(\sigma = a / b)$$

$$C_0 = \sigma^n (\beta_2(2n-1)a^{-1} + \beta_1)(\beta_2' b^{-1} - \beta_1'),$$

$$D_0 = \sigma^{-n}(\beta_2'(2n-1)b^{-1} + \beta_1')(\beta_2 a^{-1} - \beta_1)$$

Для определения вычета в полюсе $s = -\alpha_i^2$ имеем

$$[d\Delta(s)/ds]_{s=-\alpha_i^2} = {}^1\!/_2 [\mu \, d\Delta(\mu)/d\mu]_{\mu=\jmath\alpha_i} = {}^1\!/_4 \pi (ab)^{n-1} [\{[\alpha_i b J_n'(\alpha_i b)(\beta_1' + n\beta_2' b^{-1}) +$$
$$+ {}^1\!/_2 \beta_2' \alpha_i^2 b (J_{n-1}'(\alpha_i b) - J_{n+1}'(\alpha_i b))] [(\beta_1 + \beta_2 (n-1) a^{-1}) Y_n(\alpha_i a) +$$
$$+ {}^1\!/_2 \beta_2 \alpha_i (Y_{n-1}(\alpha_i a) - Y_{n+1}(\alpha_i a))] + [\alpha_i a (\beta_1 + \beta_2 n a^{-1}) Y_n'(\alpha_i a) +$$
$$+ {}^1\!/_2 \beta_2 \alpha_i^2 a (Y_{n-1}'(\alpha_i a) - Y_{n+1}'(\alpha_i a))] [(\beta_1' + \beta_2'(n-1) b^{-1}) J_n'(\alpha_i b) +$$
$$+ {}^1\!/_2 \beta_2' \alpha_i (J_{n-1}(\alpha_i b) - J_{n+1}(a_i b))]\} - \{[\alpha_i a (\beta_1 + \beta_2 n a^{-1}) J_n'(\alpha_i a) +$$
$$+ {}^1\!/_2 \beta_2 \alpha_i^2 a (J_{n-1}'(\alpha_i a) - J_{n+1}'(\alpha_i a)] [(\beta_1' + \beta_2'(n-1) b^{-1}) Y_n(\alpha_i b) +$$
$$+ {}^1\!/_2 \beta_2' \alpha_i (Y_{n-1}(\alpha_i b) - Y_{n+1}(\alpha_i b))] + [\alpha_i b (\beta_1' + \beta_2' n b^{-1}) Y_n'(\alpha_i b) +$$
$$+ {}^1\!/_2 \beta_2' \alpha_i^2 b (Y_{n-1}'(\alpha_i b) - Y_{n+1}'(\alpha_i b))] [(\beta_1 + \beta_2 (n-1) a^{-1}) J_n(\alpha_i a) +$$
$$+ {}^1\!/_2 \beta_2 \alpha_i (J_{n-1}(\alpha_i a) - J_{n+1}(\alpha_i a))]\}]$$

$$Q(s, \xi)|_{s=-\alpha_i^2} = {}^1\!/_2 \pi (\xi a)^{n-1} [J_n(\alpha_i \xi) \{(b/a)^{n-1} \beta_3 [-(\beta_1' + \beta_2'(n-1) b^{-1}) Y_n(\alpha_i b) -$$
$$- {}^1\!/_2 \beta_2' \alpha_i (Y_{n-1}(\alpha_i b) - Y_{n+1}(\alpha_i b))] + \beta_3' [(\beta_1 + \beta_2 (n-1) a^{-1} Y_n(\alpha_i a) -$$
$$- {}^1\!/_2 \beta_2 \alpha_i (Y_{n-1}(\alpha_i a) - Y_{n+1}(\alpha_i a))]\} - Y_n(\alpha_i \xi) \{\beta_3' [(\beta_1 + \beta_2 (n-1) a^{-1}) J_n(\alpha_i a) +$$
$$+ {}^1\!/_2 \beta_2 \alpha_i (J_{n-1}(\alpha_i a) - J_{n+1}(\alpha_i a))] - (b/a)^{n-1} \beta_3 [J_n(\alpha_i b)(\beta_1' + \beta_2'(n-1) b^{-1}) +$$
$$+ {}^1\!/_2 \beta_2' \alpha_i (J_{n-1}(\alpha_i b) - J_{n+1}(\alpha_i b))]\}] \qquad (2.4$$

(штрих над функциями Бесселя означает дифференцирование по аргументу).

Подставляя полученные разложения, будем иметь общее решение уравнения (1.8) для $\vartheta(\tau, \xi)$. Скорость вращения жидкости определяется после этого из соотношения

$$W(\tau, \xi) = W(0, \xi) - \vartheta(\tau, \xi) \tag{2.5}$$

В частном случае, когда оба цилиндра мгновенно приводятся во вращение с разными, но постоянными линейными скоростями W_1 и W_2, а жидкость при $\tau \leqslant 0$ покоится, в (1.10), (2.3) и (2.4) следует положить

$$\beta_1 = \beta_1' = -1, \quad \beta_2 = \beta_2' = 0, \quad \beta_3 = W_1, \quad \beta_3' = W_2, \ W(0, \xi) = 0$$

Тогда получим

$$W(\xi, \tau) = -\vartheta(\xi, \tau) = -\left(\frac{\xi}{b}\right)^{n-1} \left\{\left[\frac{\xi^n}{a^n}(W_2 - \sigma W_1) + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{a^n}{\xi^n}(W_1 \sigma^{2n-1} - W_2)\right] \times (\sigma^n - \sigma^{-n})^{-1} - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_i^2 \tau)}{\Lambda_i} \times$$
$$\times (J_n(\alpha_i \xi)[W_2 Y_n(\alpha_i a) - W_1 \sigma^{1-n} Y_n(\alpha_i b)] +$$

$$
\left.+Y_n(\alpha_i\xi)[W_1\sigma^{1-n}J_n(\alpha_i b)-W_2J_n(\alpha_i a)]\right)\Bigg\}
$$

$$
\Lambda_i=\alpha_i[aJ_{n-1}(\alpha_i a)Y_n(\alpha_i b)-aJ_n(\alpha_i b)Y_{n-1}(\alpha_i a)+bJ_n(\alpha_i a)\times
$$

$$
\times Y_{n-1}(\alpha_i b)-bY_n(\alpha_i a)J_{n-1}(\alpha_i b)] \tag{2.6}
$$

Здесь α_i — корни (все действительные и простые) уравнения

$$
J_n(\alpha_i b)Y_n(\alpha_i a)-J_n(\alpha_i a)Y_n(\alpha_i b)=0
$$

При $\tau\to\infty$ из (2.6) имеем установившийся профиль скорости вращения жидкости между двумя цилиндрами при наличии радиального течения

$$
W=\frac{(\xi/b)^{2n-1}(W_1\sigma-W_2)+\sigma^{2n}b/\xi(W_2-W_1\sigma^{1-2n})}{\sigma^{2n}-1} \tag{2.7}
$$

В случае, когда скорости вращения цилиндров при $\tau>0$ будут произвольными заданными функциями времени $W_1(\tau)$ и $W_2(\tau)$, применяя теорему Дюамеля к (2.6), получаем общее решение

$$
W=-\left(\frac{\xi}{b}\right)^{n-1}\int\limits_0^\tau\Bigg(W_1(\lambda)\frac{\partial}{\partial\tau}F_1(\xi,\tau-\lambda)+
$$

$$
+W_2(\lambda)\frac{\partial}{\partial\tau}F_2(\xi,\tau-\lambda)\Bigg)d\lambda=2\left(\frac{\xi}{b}\right)^{n-1}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i e^{-\alpha_i^2\tau}}{\Lambda_i}\times
$$

$$
\times\int\limits_0^\tau e^{\alpha_i^2\lambda}\Bigg\{W_1(\lambda)\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}[J_n(\alpha_i\xi)Y_n(\alpha_i b)-Y_n(\alpha_i\xi)J_n(\alpha_i b)]+
$$

$$
+W_2(\lambda)[Y_n(\alpha_i\xi)J_n(\alpha_i a)-J_n(\alpha_i\xi)Y_n(\alpha_i a)]\Bigg\}d\lambda \tag{2.8}
$$

Формула (2.8) позволяет исследовать случай движения вязкой жидкости внутри вращающегося цилиндра. Для этого нужно положить $a\to0$ и $W_1\to0$. Тогда

$$
W=-2\left(\frac{\xi}{b}\right)^{n-1}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i e^{-\alpha_i^2\tau}}{bJ_n'(\alpha_i b)}\int\limits_0^\tau e^{\alpha_i^2\lambda}W_2(\lambda)J_n(\alpha_i\xi)\,d\lambda \tag{2.9}
$$

В случае $W_2=\mathrm{const}$ имеем

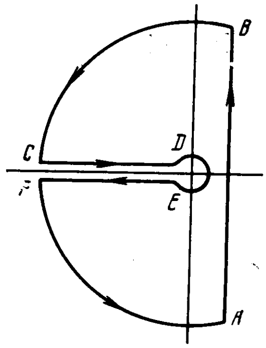
$$
\frac{W}{W_2}=\left(\frac{\xi}{b}\right)^{n-1}\left\{\left(\frac{\xi}{b}\right)^n+2\sum_{i=1}^{\infty}e^{-\alpha_i^2\tau}\frac{J_n(\alpha_i\xi)}{\alpha_i bJ_n'(\alpha_i b)}\right\} \tag{2.10}
$$

Здесь α_i — действительные и простые корни уравнения $J_n(\alpha_i b)=0$. Формула (2.10) дает распределение скорости вращения жидкости внутри цилиндра при наличии на его оси линейного источника постоянной интенсивности. При $\tau\to\infty$ получим асимптотический закон вращения

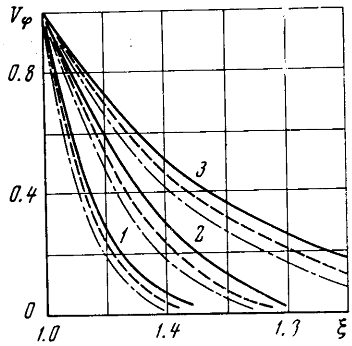
$$
\frac{W}{W_2}=\left(\frac{\xi}{b}\right)^{2n-1}
$$

В отсутствие радиального течения ($n=1$) жидкость при $\tau\to\infty$ вращается по закону твердого тела, а (2.10) приобретает хорошо известный вид [3]. Наличие на оси вращения источника или стока приводит к изменению асимптотического профиля: радиальное течение от источника препятствует вовлечению осевой зоны жидкости во вращение; течение к стоку, наоборот, переносит циркуляцию от вращающихся стенок к оси, увеличивая скорость вращения в приосевой зоне (при $n = 0$, когда $R_r = -2$, в вязкой жидкости асимптотически устанавливается потенциальное движение с $v_\varphi \sim b / \xi$ и $v_r \sim bR_r / \xi$).

3. Решение задачи о цилиндре, вращающемся в безграничной жидкости с заданной угловой скоростью, нельзя получить из уравнения (2.6), так как собственные значения задачи не являются дискретными, когда жид-



Фиг. 1



Фиг. 2

кость занимает безграничную область. В самом деле, если в жидкости существует стационарное радиальное течение от источника и в момент $t = 0$ цилиндр с проницаемыми стенками, ограничивающей область движения изнутри, начинает вращаться с постоянной скоростью W_1, то из (1.10) будем иметь при $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = W_1$, $\beta_2' = \beta_3' = 0$, $b \to \infty$, $W_2 \to 0$

$$\vartheta(\tau, \xi) = -\frac{W(\tau, \xi)}{W_1} = -\frac{1}{2\pi j}\left(\frac{\xi}{a}\right)^{n-1} \int\limits_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} e^{s\tau} \frac{K_n(\xi\sqrt{s})}{sK_n(a\sqrt{s})} ds \quad (3.1)$$

Подынтегральная функция в (3.1) имеет в плоскости комплексного переменного точку ветвления и простой полюс при $s = 0$, поэтому для вычисления интеграла нужно воспользоваться контуром, показанным на фиг. 1. Известно [2], что в этом контуре нулей функции $K_n(a\sqrt{s})$ нет и согласно теореме Коши интеграл по $ABCDEF$ равен нулю.

Так как в пределе при стремлении радиуса большой окружности к бесконечности интегралы по BC и AF стремятся к нулю, то интеграл (3.1) можно заменить суммой интегралов по CD, EF и по малой окружности с центром в начале координат. В рассматриваемом случае интеграл по небольшой окружности дает в пределе (при стремлении ее радиуса к нулю) $(-a / \xi)$.

Примем

$$s = u^2 e^{\pi j}, \quad \sqrt{s} = u e^{1/2\pi j}, \quad ds = -2udu \quad \text{вдоль } CD$$

$$s = u^2 e^{-\pi j}, \quad \sqrt{s} = u e^{-1/2\pi j}, \quad ds = -2udu \quad \text{вдоль } EF$$

Тогда, используя соотношения (2.2), окончательно имеем из (3.1)

$$W(\tau, \xi) = -\vartheta(\tau, \xi) = \frac{a}{\xi} + \left(\frac{\xi}{a}\right)^{n-1} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty e^{-u^2\tau} \times$$

$$\times \frac{J_n(\xi u) Y_n(au) - J_n(au) Y_n(\xi u)}{J_n^2(au) + Y_n^2(au)} \frac{du}{u} \quad (3.2)$$

Найдем приближенное решение задачи для малых времен. Используя асимптотическое разложение функции Бесселя, получим формулу для изображения $\Theta(s, \xi)$ в виде ряда по показательной функции, коэффициентами при которой служат члены ряда по $1/\sqrt{s}$. Так как при больших z

$$K_n(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z}\left\{1 + \frac{4n^2-1}{1!8z} + \frac{(4n^2-1)(4n^2-9)}{2!(8z)^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)\right\}$$

то

$$\Theta(s, \xi) = -\left(\frac{\xi}{a}\right)^{n-3/2} \frac{e^{-(\xi-a)\sqrt{s}}}{s}\left\{1 - \frac{4n^2-1}{8a\xi\sqrt{s}}(\xi - a) + \right.$$

$$\left. + \frac{(4n^2-1)}{128a^2\xi^2 s}[(4n^2-9)a^2 - 2(4n^2-1)a\xi + (4n^2+7)\xi^2] + \ldots\right\} \qquad (3.3)$$

Используя табличные формулы обращения [4], получаем для малых τ

$$W(\tau, \xi) = -\vartheta(\tau, \xi) = \left(\frac{\xi}{a}\right)^{n-3/2}\left\{\Phi_*\left(\frac{\xi-a}{2\sqrt{\tau}}\right) - \right.$$

$$- \frac{(4n^2-1)(\xi-a)}{4a\xi}\sqrt{\tau}j\Phi_*\left(\frac{\xi-a}{2\sqrt{\tau}}\right) + \frac{4n^2-1}{128a^2\xi^2} \times$$

$$\left. \times F(a, \xi) 4\tau j^2\Phi_*\left(\frac{\xi-a}{2\sqrt{\tau}}\right) + \ldots\right\} \qquad (3.4)$$

Здесь $F(a, \xi)$ обозначает выражение, стоящее в квадратных скобках в (3.3), а

$$\Phi_*(x) = 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^x e^{-\alpha^2}d\alpha, \quad j\Phi_*(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2} - x\Phi_*(x)$$

и вообще

$$2mj^m\Phi_*(x) = j^{m-2}\Phi_*(x) - 2xj^{m-1}\Phi_*(x)$$

На фиг. 2 согласно (3.4) представлено распределение безразмерной скорости $V_\varphi = v_\varphi / \omega r_0$; группы кривых *1*, *2*, *3* соответствуют значениям моментов времени $\sqrt{\nu t}/r_0 = 1/8, 1/4, 1/2$; при этом штриховая линия относится к случаю вращения цилиндра [3] с непроницаемыми стенками ($R_r = 0$, $n = 1$), штрих-пунктирная линия дает распределение скорости около пористого цилиндра при отсосе жидкости через его стенки ($R_r = -1$, $n = 1/2$), а сплошная кривая соответствует течению с подачей жидкости через боковую поверхность цилиндра ($R_r = 2$, $n = 2$).

Из приведенных графиков видно, как радиальное течение от вращающегося цилиндра ускоряет вовлечение жидкости во вращение, а течение к цилиндру замедляет этот процесс. Асимптотикой решения (3.4) при $\tau \to \infty$ служит выражение $W = a/\xi$ и жидкость вне цилиндра стремится к потенциальному вращению.

4. Пусть в начальный момент в жидкости имеется распределение скорости, соответствующее прямолинейной вихревой нити и источнику (стоку), размещенному в начале координат и имеющим соответственно интенсивности Γ_0 и q. Таким образом, при $t = 0$ проекции скорости на оси цилиндрических координат r, φ, z имеют значения

$$v_r = \frac{q}{2\pi r}, \qquad v_\varphi = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}, \qquad v_z = 0$$

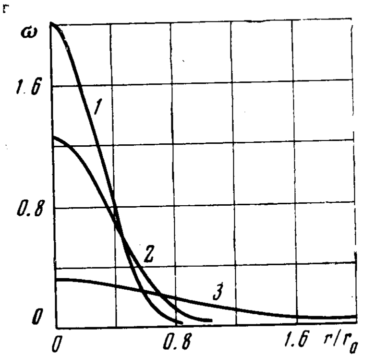
Требуется определить движение жидкости в любой следующий момент.

Такая задача сводится к рассмотренной в предыдущем пункте задаче о движении жидкости вне вращающегося цилиндра, если положить $\vartheta(\tau, \xi) = a / \xi - W(\tau, \xi)$ и устремить радиус цилиндра к нулю. Тогда, имея в виду (3.4), получим

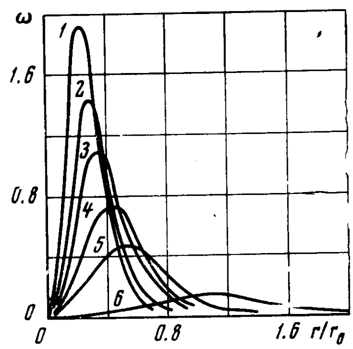
$$\vartheta(\tau,\xi) = \frac{a}{\xi}\left(1 - \frac{\xi^n}{2^{n-1}\Gamma(n)}\int\limits_0^\infty e^{-u^2\tau} J_n(u\xi)\, u^{n-1}\, du\right)$$

$$v_\varphi = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}\frac{\xi^n}{2^{n-1}\Gamma(n)}\int\limits_0^\infty e^{-u^2\tau} J_n(u\xi)\, u^{n-1}\, du = \frac{\Gamma_0}{2\pi r\Gamma(n)}\gamma\left(n, \frac{r^2}{4\nu t}\right) \qquad (4.1)$$

Здесь Γ_0 — начальная циркуляция около вихревой нити, $\Gamma(n)$ — гамма-функция, а $\gamma(n, r^2 / (4\nu t))$ — неполная гамма-функция.



Фиг. 3



Фиг. 4

Вводя в рассмотрение интенсивность вихря

$$\Omega = \frac{1}{r}\frac{d(v_\varphi r)}{dr}$$

из (4.1) получим выражение, определяющее процесс диффузии вихря около плоского вихреисточника или вихрестока

$$\Omega = \frac{\Gamma_0}{4\pi t\nu\Gamma(n)}\left(\frac{r^2}{4\nu t}\right)^{n-1}\exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \qquad (4.2)$$

В частном случае $n = 1$ (радиальное течение отсутствует) формулы (4.1) и (4.2) приобретают известный вид [3, 5]

$$v_\varphi = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}\left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)\right), \qquad \Omega = \frac{\Gamma_0}{4\pi\nu t}\exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)$$

На фиг. 3 представлено распределение безразмерной завихренности $\omega = \Omega r_0^2 / \Gamma_0$ в пространстве около вихревой нити, подсчитанное по (4.2) для трех моментов времени $\sqrt{\nu t} / r_0 = {}^1/_5, {}^1/_4, {}^1/_2$, кривые *1*, *2*, *3* соответственно (r_0 — произвольный фиксированный радиус). Видно, что, несмотря на расплывание вихря, наибольшее значение завихренности всегда будет там, где первоначально находился вихрь. Присутствие в жидкости источника или стока приводит к искажению картины диффузии вихря. Так, если прямолинейная вихревая нить помещена в источнике ($R_r > 0$), то простое исследование (4.1) показывает, что расплывание вихря происходит быстрее, чем в отсутствие радиального течения.

При этом в каждый момент времени максимум завихренности удален от оси на расстояние $r = 2\sqrt{\nu t(n-1)}$, а изменение завихренности во времени в определенной точке пространства качественно аналогично случаю обычной диффузии вихря: до момента $t = r^2 / 4\nu n$ завихренность растет, в этот момент она достигает максимальной величины, после чего снова убывает до нуля.

На фиг. 4 приведена зависимость величины завихренности от безразмерного радиуса около вихреисточника с $R_r = 2$, построенная для моментов времени $\sqrt{\nu t} / r_0 = 1/8, 1/7, 1/6, 1/5, 1/4$ и $1/2$ (кривые с 1 по 6 соответственно). Сравнение фигур показывает, как радиальное течение ускоряет процесс расплывания вихря, стремясь «расчистить» пространство вблизи источника от завихренности. Скорость вращения жидкости у оси при этом пропорциональна величине

$$v_\varphi \sim \frac{\Gamma_0}{2\pi r}\left(\frac{r^2}{4\nu t}\right)^n$$

Если прямолинейная вихревая нить в момент $t = 0$ помещена в сток, то из (4.2) можно видеть, что при целых $n < 0$ $(R_r / 2 < -1.0)$ единственно возможным течением является безвихревое течение, когда везде в жидкости $\Omega = 0$; в этом случае скорость расплывания вихря из-за диффузии меньше скорости переноса завихренности радиальным течением. Ясно, что такая ситуация может иметь место, когда инерционные силы превышают вязкие.

Если $0 < h < 1{,}0$, то диффузия вихря в жидкость около стока будет происходить, но менее интенсивно, чем в случае без радиального течения.

5. Пусть в жидкости создано поле тангенциальной скорости $v_\varphi = \Gamma_0 / 2\pi r$ и вблизи оси имеется круговая цилиндрическая полость разрыва радиуса r_0. Радиальное течение отсутствует.

В момент $t = 0$ «включим» действие вязкости. За счет сил внутреннего трения потенциальное поле скорости будет изменяться, становясь вихревым. Если при этом движении жидкости остается плоским, то радиус r_0 полого вихря будет неизменным [6]. Граничные условия подобной задачи имеют вид

$$\sigma_{r\varphi} = \mu\left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r}\right) = 0 \quad \text{при } r = r_0, \quad v_\varphi \to 0 \quad \text{при } r \to \infty$$

а начальное условие: $v_\varphi = \Gamma_0 / 2\pi r$ при $t = 0$.

Переходя к принятым выше безразмерным и полагая $\vartheta(\tau, \xi) = a / \xi - W(\tau, \xi)$, получим

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} - \frac{\vartheta}{a} = \frac{2}{a} \quad \text{при } \xi = a, \quad \vartheta \to 0 \text{ при } \xi \to \infty, \quad \vartheta = 0 \text{ при } \tau = 0$$

Тогда в соответствии с (1.8) и (1.11) имеем

$$n = 1, \quad \beta_1 = -1 / a, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3' = 0, \quad b \to \infty$$

$$\vartheta(\tau, \xi) = -\frac{1}{2\pi j}\frac{2}{a}\int\limits_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} e^{s\tau}\frac{K_1(\sqrt{s}\xi)}{s\sqrt{s}K_2(\sqrt{s}a)}\,ds \tag{5.1}$$

Решение (5.1) доведено до конечных результатов в [6].

Поступило 23 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Теория функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965.
2. Ватсон Г. Н. Теория Бесселевых функций. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
3. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. Гостехиздат, 1955.
4. Карлслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964.
5. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. 2. М., Физматгиз, 1963.
6. Гостинцев Ю. А., Марголин А. Д. О пограничном слое на свободной поверхности полого вихря. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.