

К ЗАДАЧЕ О ВОЗДЕЙСТВИИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НА ВЕРТИКАЛЬНЫЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДР

Ю. З. АЛЕШКОВ

(Ленинград)

Рассматривается вопрос о волновом воздействии на вертикальный круговой цилиндр трехмерного нерегулярного волнения. Сваи в виде круговых цилиндров являются опорными элементами таких гидротехнических сооружений, как морские эстакады или стационарные причалы.

Теоретико-эмпирический подход к решению этой задачи при воздействии волны зыби развит в [1].

Учет нерегулярности основывается на гипотезах, принятых в спектральной теории волн. Приводятся примеры для частных случаев спектральной плотности волнения.

1. Воздействие гармонической волны. Рассмотрим безвихревое волновое движение идеальной несжимаемой тяжелой жидкости относительно системы осей x, y, z . Пусть ось z направлена вверх, а плоскость xy совмещена с невозмущенной свободной поверхностью.

Снизу жидкость ограничена поверхностью дна $z = -H, H = \text{const}$, сверху — свободной поверхностью $z = \zeta(x, y, t)$.

В жидкости находится вертикальный цилиндр $r = a$, где r, θ — полярные координаты в плоскости xy .

Малые колебания жидкости описываются с помощью потенциала скорости $\varphi(x, y, z, t)$, являющегося решением следующей задачи:

$$\Delta\varphi = 0, \quad (\varphi_{tt} + g\varphi_z)|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right|_{z=-H} = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0. \quad (1.1)$$

Помимо условий, указанных в (1.1), требуется удовлетворить условию излучения волн [2].

По функции $\varphi(x, y, z, t)$ находим возвышение свободной поверхности и давление

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left. \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right|_{z=0}, \quad p = -\rho \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \rho gz + f(t) \quad (1.2)$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность жидкости, $f(t)$ — произвольная функция времени.

Пусть из бесконечности в направлении $\theta = \alpha$ на цилиндр набегают гармоническая волна, движение которой характеризуется потенциалом [3]

$$\varphi_0 = \frac{h_0 g}{2\omega} \frac{\text{ch } k(z+H)}{\text{ch } kH} \sin[k(x \cos \alpha + y \sin \alpha) - \omega t + \varepsilon] \quad (1.3)$$

Здесь h_0 — высота волны, ε — фаза волны, частота ω и волновое число k связаны соотношением

$$\omega^2 = gk \text{th } kH \quad (1.4)$$

Потенциал скорости задачи (1.1) представим в виде

$$\varphi = \frac{h_0 g}{2\omega} \frac{\text{ch } k(z+H)}{\text{ch } kH} \text{Im} [\Phi(x, y) e^{i(\varepsilon - \omega t)}] \quad (1.5)$$

При помощи этого выражения для потенциала скорости удовлетворяет-
ся условие на дне и при $z = 0$.

Положим

$$\Phi = e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} + F(x, y) \quad (1.6)$$

где первое слагаемое характеризует набегающую волну, а второе — возму-
щение, вносимое цилиндром.

Для определения функции $F(x, y)$ получим уравнение Гельмгольца

$$\Delta F + k^2 F = 0 \quad (1.7)$$

и следующие условия:

$$\frac{\partial}{\partial r} [e^{ikr \cos(\theta - \alpha)} + F(r, \theta)]|_{r=a} = 0 \quad (1.8)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial F}{\partial r} - ikF \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} F = 0 \quad (1.9)$$

Методом разделения переменных решение задачи (1.7) — (1.9) получа-
ем в виде

$$F(r, \theta) = - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n \frac{J_{n-1}(ka) - J_{n+1}(ka)}{H_{n-1}(ka) - H_{n+1}(ka)} H_n(kr) \cos n(\theta - \alpha) \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 2 & (n > 0) \end{cases}, \quad H_n(x) = J_n(x) + iN_n(x)$$

Здесь $J_n(x)$, $N_n(x)$ — функции Бесселя и Вебера n -го порядка.
Для величины силы, действующей в направлении $\theta = \alpha$, будем иметь

$$P(t) = -\rho g \pi a^2 h_0 \operatorname{th} kH \frac{A(ka)}{ka} \cos[\varepsilon - \omega t - \psi(ka)] \quad (1.11)$$

$$A \cos \psi = \frac{J_0 - J_2}{(J_0 - J_2)^2 + (N_0 - N_2)^2} [N_1(J_0 - J_2) - J_1(N_0 - N_2)] \quad (1.12)$$

$$A \sin \psi = \frac{J_0 - J_2}{(J_0 - J_2)^2 + (N_0 - N_2)^2} [J_1(J_0 - J_2) + N_1(N_0 - N_2)] - J_1$$

Для проекций опрокидывающего момента на оси x' , y' , повернутые от-
носительно осей x , y на угол α , получим

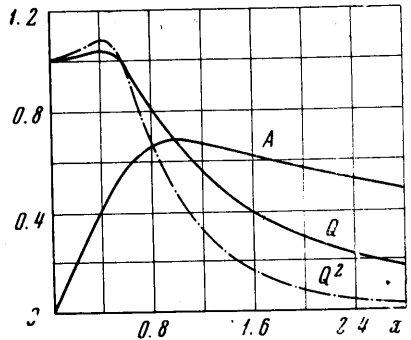
$$\begin{aligned} M_{x'} &= 0 \\ M_{y'} &= -\rho g \pi a^2 h_0 H \times \\ &\times \frac{1 + kH \operatorname{sh} kH - \operatorname{ch} kH}{kH \operatorname{ch} kH} \frac{A(ka)}{ka} \times \\ &\times \cos[\varepsilon - \omega t - \psi(ka)] \end{aligned} \quad (1.13)$$

Функции $A(x)$, $Q(x) = x^{-1}A(x)$ и $Q^2(x)$ представлены на фигуре.

**2. Воздействие нерегулярного волне-
ния.** Решение задачи о воздействии гар-
монической волны на цилиндр позволяет
учесть нерегулярный характер волнения согласно схеме, по которой строит-
ся спектральная теория волн [4].

Воздействие от гармонической волны высоты h_{0ij} , частоты ω_i и направ-
ления распространения θ_j согласно (1.11) и (1.13) представляется силой

$$P_{ij}(t) = -\rho g \pi a^2 h_{0ij} \operatorname{th} k_i H Q(k_i a) \cos [E_{ij} - \omega_i t - \psi(k_i a)] i \quad (2.1)$$



и моментом относительно точки $(0, 0, -H)$

$$M_{ij}(t) = -\rho g \pi a^2 h_{0ij} H \frac{1 + k_i H \operatorname{sh} k_i H - \operatorname{ch} k_i H}{k_i H \operatorname{ch} k_i H} Q(k_i a) \times \\ \times \cos[E_{ij} - \omega_i t - \psi(k_i a)] j \quad (2.2)$$

Здесь i — орт в направлении θ_j , j — орт в направлении, перпендикулярном направлению θ_j .

Выражения

$$P(t) = \sum_{i,j} P_{ij}(t), \quad M(t) = \sum_{i,j} M_{ij}(t) \quad (2.3)$$

представляют собой силу и момент при волнении, описываемом наложением гармонических волн.

Согласно спектральной теории волн [4, 5], фазу и высоту гармонической волны считают случайными независимыми величинами, причем фаза E_{ij} распределена равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$. Тогда сила $P(t)$ и момент $M(t)$ будут случайными вектор-функциями.

Основываясь на том, что выполнены условия центральной предельной теоремы [6], будем считать, что в любой момент t векторы P и M распределены по нормальному закону.

Остановимся на рассмотрении процесса $P(t)$. При симметричном распределении энергии волнения относительно направления $\theta = 0$ проекции $P_x(t)$ и $P_y(t)$ силы будут некоррелированными величинами для одного и того же момента t . Это следует из равенства

$$\langle \{P_x(t) P_y(t)\} \rangle = \frac{1}{4} \sum_{i,j} \sin 2\theta_j [\rho g \pi a^2 \operatorname{th} k_i H Q(k_i a)]^2 \langle h_{0ij}^2 \rangle \quad (2.4)$$

ибо сумма равна нулю, если $\langle h_{0ij}^2 \rangle$ как функция от θ_j симметрична относительно $\theta_j = 0$. Знак $\langle \dots \rangle$ означает осреднение.

Итак, P_x и P_y некоррелированы, а следовательно, и независимы. Их средние значения равны нулю.

Для полного определения закона распределения вектора P найдем дисперсии его проекций по осям; непосредственные вычисления дают при некоррелированности слагаемых

$$\sigma_{P_x}^2 = \sum_{i,j} \cos^2 \theta_j \sigma_{P_{ij}}^2, \quad \sigma_{P_y}^2 = \sum_{i,j} \sin^2 \theta_j \sigma_{P_{ij}}^2 \quad (2.5)$$

$$\sigma_{P_{ij}}^2 = 1/2 [\rho g \pi a^2 \operatorname{th} k_i H Q(k_i a)]^2 \langle h_{0ij}^2 \rangle \quad (2.6)$$

Введем спектральную плотность морского волнения по формуле

$$1/2 \langle h_{0ij}^2 \rangle = 4 S_z(\omega_i, \theta_j) \Delta \omega \Delta \theta$$

Тогда в интегральной форме формулы (2.5) и (2.6) будут иметь вид

$$\sigma_{P_x}^2 = (2 \rho g \pi a^2)^2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \operatorname{th}^2 k H Q^2(k a) \cos^2 \theta S_z(\omega, \theta) d\theta d\omega \\ \sigma_{P_y}^2 = (2 \rho g \pi a^2)^2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \operatorname{th}^2 k H Q^2(k a) \sin^2 \theta S_z(\omega, \theta) d\theta d\omega \quad (2.7)$$

От проекций вектора \mathbf{P} перейдем к его величине P и направлению Φ по формулам: $P_x = P \cos \Phi$, $P_y = P \sin \Phi$. Плотность распределения вероятностей, случайных величин P , Φ будет равна

$$f(p, \varphi) = \frac{p}{2\pi\sigma_{P_x}\sigma_{P_y}} \exp\left[-\frac{p^2}{2}\left(\frac{\cos^2\varphi}{\sigma_{P_x}^2} + \frac{\sin^2\varphi}{\sigma_{P_y}^2}\right)\right] \quad (2.8)$$

Для величины силы получим следующий вид плотности вероятностей

$$(q) = (\gamma + \gamma^{-1})q \exp\{-1/4q^2(\gamma + \gamma^{-1})^2\} I_0[-1/4q^2(\gamma^2 - \gamma^{-2})] \quad (2.9)$$

$$q = p / (\sigma_{P_x}^2 + \sigma_{P_y}^2)^{1/2}, \quad \gamma = \sigma_{P_x} / \sigma_{P_y}$$

Интегрируя (2.8) по p от 0 до ∞ , находим закон распределения направления вектора \mathbf{P}

$$f(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{P_x}\sigma_{P_y}}{\sigma_{P_x}^2 \sin^2\varphi + \sigma_{P_y}^2 \cos^2\varphi} \quad (2.10)$$

Теперь можно определить закон распределения величины P силы при фиксированном направлении ее

$$f(p/\varphi_0) = \left(\frac{\cos^2\varphi_0}{\sigma_{P_x}^2} + \frac{\sin^2\varphi_0}{\sigma_{P_y}^2}\right) p \exp\left\{-\frac{p^2}{2}\left(\frac{\cos^2\varphi_0}{\sigma_{P_x}^2} + \frac{\sin^2\varphi_0}{\sigma_{P_y}^2}\right)\right\} \quad (2.11)$$

В частности, при $\varphi_0 = 0$ имеем

$$f(p/\varphi_0) = \frac{p}{\sigma_{P_x}^2} \exp\left(-\frac{p^2}{2\sigma_{P_x}^2}\right) \quad (2.12)$$

Выражение (2.11) представляет собой распределение Рэлея при числовом параметре

$$\sigma^2 = \left(\frac{\cos^2\varphi_0}{\sigma_{P_x}^2} + \frac{\sin^2\varphi_0}{\sigma_{P_y}^2}\right)^{-1} \quad (2.13)$$

Из выражения (2.11) получаем, что величина силы, вероятность превышения которой равна i , будет определяться выражением

$$P_i(\varphi_0) = \sigma(\varphi_0) \sqrt{-2 \ln i} \quad (2.14)$$

Величина $P_i(\varphi_0)$ достигает максимума при $\varphi_0 = 0$. Для этого достаточно показать, что при $\varphi_0 = 0$ достигается

$$\min_{\varphi_0} \sigma^{-2}$$

Имеем

$$\frac{d\sigma^{-2}}{d\varphi_0} = \left(-\frac{1}{\sigma_{P_x}^2} + \frac{1}{\sigma_{P_y}^2}\right) \sin 2\varphi_0, \quad \frac{d^2\sigma^{-2}}{d\varphi_0^2} = 2' - \frac{1}{\sigma_{P_x}^2} + \frac{1}{\sigma_{P_y}^2} \cos 2\varphi_0$$

Первая производная равна нулю в точках $\varphi_0 = 0, \pm 1/2\pi$. Вторая производная при $\varphi_0 = 0$ положительна, а при $\varphi_0 = \pm 1/2\pi$ отрицательна, ибо $\sigma_{P_x} > \sigma_{P_y}$.

Следовательно, при $\varphi_0 = 0$ достигается максимум $P_i(\varphi_0)$. Тогда для $P_i = P_i(0)$ получим

$$P_i = \sigma_{P_x} \sqrt{-2 \ln i} \quad (2.15)$$

Дисперсия $\sigma_{P_x}^2$ определяется по первой формуле (2.7). В частности, при $S_Z(\omega, \theta) = f(\omega)\varphi(\theta)$ имеем

$$\sigma_{P_x}^2 = (2\rho g \pi a^2)^2 \int_0^\infty \text{th}^2 kHQ^2(ka) f(\omega) d\omega \alpha, \quad \alpha = \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \cos^2 \theta d\theta. \quad (2.16)$$

Рассмотрим случаи $\varphi(\theta) = \delta(\theta)$, где $\delta(\theta)$ — дельта-функция

$$\varphi(\theta) = \cos^n \theta \quad (|\theta| \leq 1/2\pi), \quad \varphi(\theta) = 0 \quad (|\theta| > 1/2\pi) \quad (n = 2, 3, 4) \quad (2.17)$$

Первый случай относится к плоскому движению набегающих волн, второй — к пространственному; будем их характеризовать в дальнейшем значениями $n = 0, 2, 3, 4$. Полагая, что $n = 0$ относится к случаю двумерного волнения, значения интеграла $\alpha = \alpha(n)$ в (2.16) соответственно будут

$$\alpha(0) = 1, \quad \alpha(2) = 3/8\pi, \quad \alpha(3) = 16/15\pi, \quad \alpha(4) = 5/8\pi$$

Если в спектре волн присутствуют гармоники одной частоты $\omega = \omega_0$, то

$$f(\omega) = \sigma_Z^2 \frac{\mu^{-1}(n)}{\omega_0} \delta\left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1\right) \quad (2.18)$$

$$\mu(0) = 1, \quad \mu(2) = 1/2\pi, \quad \mu(3) = 4/3\pi, \quad \mu(4) = 3/8\pi \quad (2.19)$$

Здесь σ_Z^2 — дисперсия волнения. При этом распределении удельной энергии получим

$$\sigma_{P_x}^2 = [2\rho g \pi a^2 \sigma_Z \text{th} k_0HQ(k_0a)]^2 \frac{\alpha(n)}{\mu(n)} \quad (2.20)$$

$$\alpha(0)/\mu(0) = 1, \quad \alpha(2)/\mu(2) = 0.75, \quad \alpha(3)/\mu(3) = 0.8, \quad \alpha(4)/\mu(4) = 0.834 \quad (2.21)$$

В силу (2.21) заключаем, что чем уже спектр направлений, тем больше нагрузка.

Рассмотрим следующее распределение удельной энергии по частотам

$$f(\omega) = \alpha \omega^{-p} e^{-\beta \omega^{-q}}, \quad \alpha = q \sigma_Z^2 \mu^{-1}(n) \omega_*^{p-1} \theta \quad (2.22)$$

$$\theta = \frac{\Delta^{(p-1)q}}{\Gamma((p-1)/q)} \quad \beta = \Delta \omega_*^q, \quad \Delta = \left[\frac{\Gamma((p-1)/q)}{\Gamma((p-3)/q)} \right]^{1/2q} \quad (2.23)$$

Здесь ω_* — средняя частота волнения.

Тогда дисперсия процесса $P_x(t)$ будет равна

$$\sigma_{P_x}^2 = (2\rho g \pi a^2 \sigma_Z)^2 q \theta \omega_*^{p-1} \frac{\alpha(n)}{\mu(n)} \int_0^\infty \omega^{-p} e^{-\beta \omega^{-q}} \text{th}^2 kHQ^2(ka) d\omega \quad (2.24)$$

Учитывая, что

$$2\omega d\omega = g \left(\text{th} kH + \frac{kH}{\text{ch}^2 kH} \right) dk \quad (2.25)$$

в интеграле (2.24) перейдем к переменной $x = ka$. Получим для $\sigma_{P_x}^2$

$$\sigma_{P_x}^2 = (2\rho g \pi a^2 \sigma_z)^2 \frac{q\theta}{2} \frac{\alpha(n)}{\mu(n)} v^{1/2(p-1)} \times \quad (2.26)$$

$$\times \int_0^\infty x^{-\frac{p+1}{2}} \operatorname{th}^{\frac{3-p}{2}} x H_* \left(\operatorname{th} x H_* + \frac{x H_*}{\operatorname{ch}^2 x H_*} \right) \exp \left[-\Delta \left(\frac{v}{x \operatorname{th} x H_*} \right)^{1/2 q} \right] Q^2(x) dx$$

$$H_* = H/a, \quad v = \omega_*^2 a/g \quad (2.27)$$

Для случая глубокой воды

$$\sigma_{P_x}^2 = (2\rho g \pi a^2 \sigma_z)^2 \frac{q\theta}{2} \frac{\alpha(n)}{\mu(n)} v^{1/2(p-1)} \int_0^\infty x^{-\frac{p+1}{2}} \exp \left[-\Delta \left(\frac{v}{x} \right)^{1/2 q} \right] Q^2(x) dx \quad (2.28)$$

Рассмотрим функцию

$$\chi(x; v; p, q) = v^{1/2(p-1)} x^{-1/2(p+1)} \exp \left[-\Delta \left(\frac{v}{x} \right)^{1/2 q} \right] \quad (2.29)$$

Она имеет максимум в точке

$$x_* = v \left(\frac{q\Delta}{p+1} \right)^{2/q} \quad (2.30)$$

Если для фиксированных p и q функция $\chi(x)$ быстро убывает справа от точки $x = x_*$ и $x_* < 0.5x_0$, $x_0 = 0.06$, то с учетом, что $x < x_0$, $Q(x) = 1$ из (2.28) получим приближенное выражение

$$\sigma_{P_x}^2 = (2\rho g \pi a^2 \sigma_z)^2 \frac{\alpha(n)}{\mu(n)} \quad (2.31)$$

Таким образом, в этом случае частотный спектр не изменяет нагрузки. Например, $q = 2$, $v = 0.05$, $\Delta = 3/2$, $x_* = 0.0214$ для $p = 6$.

Поступило 27 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаппо Д. Д. Силовое воздействие гравитационных волн при обтекании гидротехнических сооружений. М., Изд-во АН СССР, 1962.
2. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М., Физматгиз, 1962.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 1. М., Физматгиз, 1963.
4. Крылов Ю. М. Спектральные методы исследования и расчета ветровых волн. Л., Гидрометеоздат, 1966.
5. Свешников А. А. Определение вероятностных характеристик трехмерного волнения моря. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 3.
6. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., Физматгиз, 1962.