

РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ НА ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТОКА В СЛОЕ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Г. В. ВИКТОРОВ, И. В. ВУЧКОВА

(Москва)

Дано решение задачи обтекания решетки на осесимметричной поверхности тока в слое переменной толщины, являющейся составной частью приближенного решения трехмерной задачи для пространственной решетки. С использованием обобщенных аналитических функций получено интегральное уравнение для потенциальной функции, которое решалось методом итераций путем сведения к системе линейных алгебраических уравнений. Составлен алгоритм и программа для ЭВМ «Минск-2». Оценена точность алгоритма, приведены в качестве примера результаты расчета одной решетки.

В постановке [1, 3] задача обтекания пространственной решетки турбомашин приближенно сводится к совместному решению двухмерных задач осредненного осесимметричного течения и течения на осесимметричной поверхности тока в элементарном слое переменной толщины.

Ниже приведено решение второй задачи для произвольной телесной решетки, обтекаемой идеальной жидкостью и вращающейся с постоянной угловой скоростью, реализованное на ЭВМ «Минск-2».

Этой задаче посвящен ряд работ. В [2] изложен метод решения прямой задачи для решетки пластин в гиперболическом слое. В [1, 3] развиты методы построения течения на случай канала с переменной толщиной, которые приближенно применимы для густых решеток, но дают существенную погрешность для слабоагрессивных решеток гидромашин. Развитое в [4] решение, частично напоминающее [2], применимо для тонких, слабо изогнутых профилей в слое с монотонно изменяющейся толщиной. Известно решение для круговой решетки для слоев, изменяющихся по логарифмическому [5] и линейному [6] законам. Приближенные методы для слабоизогнутых профилей в монотонно меняющемся слое, при учете переменности слоя только в расходной составляющей, рассмотрены в [7-9]. В [10] предложено решение для произвольного слоя методом релаксаций, дающим весьма приближенную картину течения. Общее решение задачи при использовании теории потенциала и метода особенностей, изложенное в [11], содержит неточность из-за неучета перетекания через скелетную линию. Практически реализованное на ЭВМ решение [12] содержит неоцененную погрешность при расчетах в произвольном слое. В работе [13] применен конечно-разностный метод решения дифференциального уравнения течения, иллюстрированный численными примерами для монотонных слоев осевых турбомашин. Численное решение [13] представляется весьма сложным.

Излагаемое ниже решение найдено в общей постановке в отношении геометрических параметров решетки и осесимметричной поверхности, а также закона изменения толщины слоя. Численный расчет, реализованный на ЭВМ «Минск-2», занимает для одной решетки ~ 15 мин машинного времени.

1. Постановка задачи. Для течения на осесимметричной поверхности в элементарном слое переменной толщины уравнения неразрывности и отсутствия вихря для принятой (фиг. 1) системы координат (q_1, q_2, q_3) имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(c_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(c_2 H_3) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial q_1}(c_2 H_2) - \frac{\partial c_1}{\partial q_2} = 0 \quad (1.1)$$

$$H_1 = 1, \quad H_2 = R/R_0, \quad H_3 = h, \quad h(q_1) = \delta(q_1) / \delta(0)$$

Здесь c_1, c_2, c_3 — проекции абсолютной скорости c на оси координат; H_1, H_2, H_3 — параметры Ламэ; h — относительная толщина слоя.

Решение задачи будем искать на плоскости z (фиг. 1) в области круговой решетки с таким же, как и на F , числом профилей m . При этом

$$r = R_0 \exp \int_0^{q_1} \frac{dq_1}{R(q_1)}, \quad s_2 = q_2, \quad |v| = |c| \frac{R}{r} \quad (1.2)$$

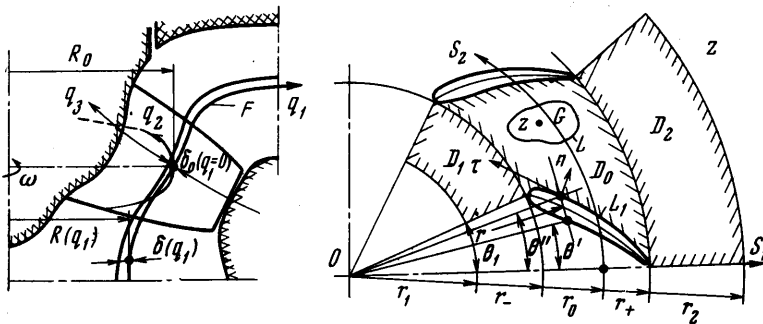
Здесь v — абсолютная скорость на z .

При условии сохранения толщины слоя в соответствующих точках F и z получим для течения в плоскости z

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_1) + \frac{\partial}{r^2 \partial \theta} (rv_2) = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dr} v_1 \quad (\operatorname{div} h\mathbf{v} = 0) \quad (1.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial r} (rv_2) - \frac{\partial}{r \partial \theta} (rv_1) = 0 \quad (1.4)$$

Считаем, что на поверхности F на достаточном удалении перед решеткой, где поток с достаточной точностью можно принять осесимметрич-



Фиг. 1

ным, известны удельный расход $Q_1 = 2\pi R_1 c_1(R_1)$ и циркуляция $\Gamma_1 = 2\pi R_1 c_2(R_1)$, которые сохранят свои значения для соответствующего контура на z .

Для безотрывного обтекания нормальная составляющая абсолютной скорости на профиле $c_n = -\omega R \sin \gamma$, где ω — угловая скорость вращения решетки, γ — угол между касательной к профилю и касательной к окружности. На основании (1.2) для профиля в плоскости z

$$v_n(\sigma) = \frac{1}{h} \frac{d\psi}{d\sigma} = -\omega \frac{R^2}{r} \sin \gamma, \quad \psi(\sigma) = -\omega \int_0^\sigma h \frac{R^2}{r} dr \quad \left(\sin \gamma = \frac{dr}{d\sigma} \right) \quad (1.5)$$

Здесь σ — криволинейная координата контура профиля в плоскости z . Для известных граничных условий перед решеткой и на контуре профиля, при выполнении постулата Чаплыгина — Жуковского, система (1.3), (1.4) имеет единственное решение.

2. Общее решение. Система вида (1.3), (1.4) рассмотрена Т. Карлеманом, доказавшим для ее решений теорему единственности. Подробное исследование решений систем более общего вида проведено И. Н. Векуа [14].

Вводя комплексную скорость $\bar{v}(z) = v_x(x, y) - iv_y(x, y)$ в плоскости z , систему (1.3), (1.4) представим в комплексной форме

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (2.1)$$

Решение (2.1) при условии, что v_x и v_y в области течения обладают непрерывными частными производными, можно представить обобщенной аналитической функцией [14]

$$\bar{v}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{v}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \quad (2.2)$$

где G — произвольная область с границей L , $z \in G$ (фиг. 1). Для периодической области плоскости z

$$\bar{v}(z) = \frac{Q_1 - i\Gamma_1}{2\pi} \frac{1}{z} + \frac{mz^{m-1}}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\bar{v}(\zeta) d\zeta}{z^m - \zeta^m} + \frac{mz^{m-1}}{2\pi} \iint_D \frac{q(\xi, \eta)}{z^m - \zeta^m} d\xi d\eta \quad (2.3)$$

Здесь L_1 — контур основного профиля, D — область течения в одном периоде решетки, $q(\xi, \eta) = \text{div } v$. Выражение (2.3) дает общее представление для скорости в области круговой решетки. При условии, что при $r < r_1$ и $r > r_2$ (фиг. 1) поток осесимметричен, область интегрирования D ограничена радиусами r_1 и r_2 и течение в областях $r < r_1$ и $r > r_2$ не оказывает влияния на течение в области решетки. Аналогичный результат получается в случае $h = \text{const}$ при $r < r_1$ и $r > r_2$. Можно показать, что двойной интеграл в (2.3) сходится всюду для ограниченной области D . Контурный интеграл в (2.3) содержит сингулярную особенность.

Для практического решения задачи использовано интегральное уравнение для потенциальной функции φ , которое получается путем интегрирования (2.3), выделения действительной части и осуществления предельного перехода при $z \rightarrow z_0$ (z_0 — точка гладкого контура профиля L_1). В результате

$$\begin{aligned} \varphi(s) + \int_{L_1} \varphi(\sigma) \frac{dM(s, \sigma)}{d\sigma} d\sigma &= a(s) + \iint_D q(\sigma) N(s, \sigma) r dr d\theta \quad (2.4) \\ \zeta &= re^{i\theta}, \quad z_0 = \rho e^{i\beta} \\ a(s) &= \frac{Q_1}{\pi} \ln \rho(s) + \frac{\Gamma_1}{\pi} \beta(s) + \Gamma M(s, \sigma_0) + \int_{L_1} [\Psi(s) - \Psi(\sigma)] \frac{dN(s, \sigma)}{d\sigma} d\sigma \\ \frac{1}{\pi} \ln(\zeta^m - z_0^m) &= N(s, \sigma) + iM(s, \sigma), \quad \Psi(\sigma) = \int_{\sigma_0} \frac{d\psi}{h} = -\omega \int_{\sigma_0} \frac{R^2}{r} dr \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь Γ — циркуляция по контуру профиля L_1 ; $s(\rho, \beta)$, $\sigma(r, \theta)$ — координаты фиксированной и текущей точек, σ_0 — начальная точка интегрирования.

Представим в области D

$$q(r, \theta) = q_0(r) + \Delta q(r, \theta), \quad q_0 = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dr} v_{10}(r) \quad (2.6)$$

$$v_{10} = \frac{1}{2\pi \varepsilon(r)} \int_0^{2\pi} v_1(r, \theta) d\theta \quad \text{при } 0 \leq \theta \leq \theta', \quad \theta'' \leq \theta \leq \frac{2\pi}{m}$$

$$v_{10} = 0 \quad \text{при } \theta' \leq \theta \leq \theta'', \quad \varepsilon(r) = 1 - \frac{m}{2\pi} [\theta''(r) - \theta'(r)]$$

Здесь v_{10} — осредненная по шагу расходная составляющая по скорости, $\varepsilon(r)$ — коэффициент стеснения.

Используя (2.6), найдем общее решение (2.4) (2.7)

$$\varphi(s) = Q_0\varphi_1(s) + \Gamma_1\varphi_2(s) + \Gamma\varphi_3(s) + \Omega\varphi_4(s) \quad (Q_0 = Q(r_0), \Omega = \omega r_0^2)$$

Здесь φ_p ($p = 1, 2, 3, 4$) определяется из уравнений

$$\varphi_p(s) + \int_{L_1} \varphi_p(\sigma) \frac{dM(s, \sigma)}{d\sigma} d\sigma = b_p(s) \quad (2.8)$$

$$b_1(s) = \frac{1}{\pi} \int_{r_1}^0 \frac{dr}{rh} + \frac{1}{2\pi^2} \left[\int_{r_-}^0 \frac{F_1}{\varepsilon} d\left(\frac{1}{h}\right) + \int_{\rho}^{r_+} \frac{F_2}{\varepsilon} d\left(\frac{1}{h}\right) \right] + \\ + \iint_D \frac{\Delta q_1}{Q_0} N(s, \sigma) r dr d\theta$$

$$b_2(s) = \frac{\beta(s)}{\pi} + \iint_D q_2(\sigma) N(s, \sigma) r dr d\theta$$

$$b_3(s) = M(s, \sigma_0) + \iint_D q_3(\sigma) N(s, \sigma) r dr d\theta$$

$$b_4(s) = \frac{1}{\Omega} \int_{L_1} [\Psi(s) - \Psi(\sigma)] \frac{dN(s, \sigma)}{d\sigma} d\sigma + \iint_D q_4(\sigma) N(s, \sigma) r dr d\theta$$

$$q_p = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dr} \frac{\partial \varphi_p}{\partial r} \quad (p = 2, 3, 4) \quad (2.9)$$

Функции F_1 и F_2 представлены рядами

$$F_{1,2}(\rho, \beta, r) = \frac{2}{m} \sum_{n=1} \frac{1}{n^2} \lambda_{1,2}^{nm} \sin nm \frac{\theta'' - \theta'}{2} \cos nm \left(\frac{\theta'' + \theta'}{2} - \beta \right)$$

$$\lambda_1 = r/\rho \quad (r < \rho), \quad \lambda_2 = \rho/r \quad (r > \rho) \quad (2.10)$$

Итак, для четырех уравнений (2.8) необходимо найти решения, которые зависят только от геометрических параметров решетки. Уравнения (2.8) есть интегральные уравнения типа Фредгольма второго рода с непрерывным ядром. Они решались итерационным методом, при котором свободный член $b_p(s)$ определялся по данным предыдущего приближения. В первом приближении двойные интегралы в (2.9) принимались равными нулю. Ввиду того что итерируемые члены в $b_p(s)$ малы, итерационный процесс сходится весьма быстро.

Радиальная составляющая скорости в области D , необходимая для последующих приближений, определялась так: (2.11)

$$v_{1p}^{(k)}(\rho, \beta) = \frac{\partial \varphi_p^{(k)}}{\partial \rho} = \frac{1}{2} \frac{\partial b_p^{(k-1)}(s)}{\partial \rho} - \frac{1}{2} \int_{L_1} \varphi_p^{(k)}(\sigma) d \left[\frac{\partial M(s, \sigma)}{\partial \rho} \right]$$

($k=1, 2, \dots$)

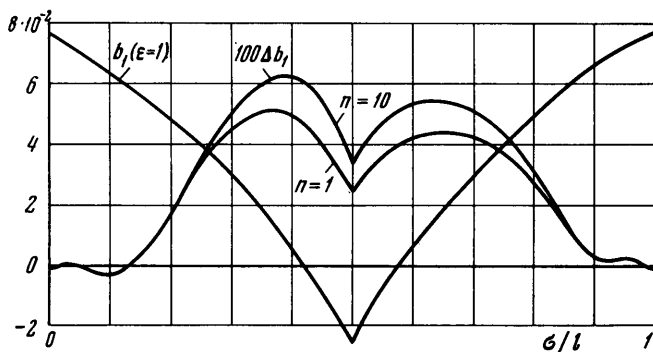
Циркуляция Γ определялась на основании постулата Чаплыгина — Жуковского, который в данном случае предусматривал равенство относительных скоростей в точках отрыва потока на округленной выходной кромке [13].

3. Схема численного решения. Интегральное уравнение (2.8) заменялось приближенно системой линейных алгебраических уравнений, для чего профиль разбивался на $n = 60$ участков. Тогда

$$\varphi_{pi} + \sum_{j=1}^{2n-1} \varphi_{pj} (M_{i,j+1} - M_{i,j-1}) = b_{pi} \quad (3.1)$$

Здесь $i, j = 1, 3 \dots 2n - 1$ — точки середины участков разбиения.

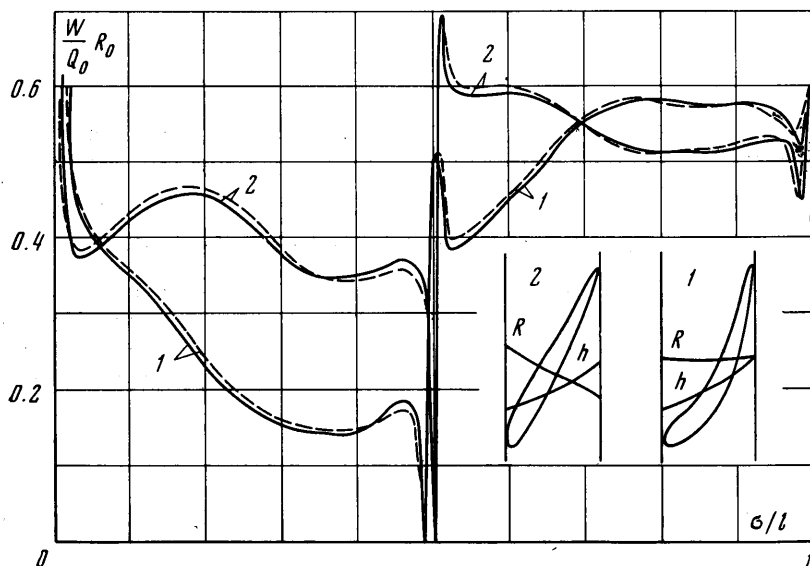
По заданным в табличной форме функциям $h(q_i)$, $R(q_i)$ на основании (1.2) в



Фиг. 2

i -точках определялись величины h и R , необходимые для вычисления b_{pi} , с использованием интерполяционных формул по методу наименьших квадратов.

Для вычисления интегралов с переменным пределом в (2.9) применена формула трапеций. Отметим, что ряды для F_1 и F_2 (2.10) быстро сходятся. Число членов ряда



Фиг. 3

(2.10), которые следует вычислять, зависит от ϵ и числа профилей m . Численные расчеты показали, что при большом m (например, $m = 16$) уже при $n = 1$ относительная величина второго члена в b_1 (2.9) невелика по сравнению с первым. На фиг. 2 показано влияние стеснения на величину свободного члена b_1 (2.9), где Δb_1 — слабое, учитывающее стеснение ϵ , подсчитано для $n = 1$ и $n = 10$ членов рядов (2.10).

При вычислении коэффициентов системы (3.1) и b_2 (2.9) выбор ветвей многозначной функции $M(s, \sigma)$ производился аналогично [15].

Свободный член b_4 (2.9) имеет непрерывное подынтегральное выражение, которое при $\sigma \rightarrow s$ имеет предел, равный $-\Psi'(s) = -v_n(s)$.

Кратные интегралы в (2.9) представлялись в виде суммы интегралов $J_{p1} + J_{p0} + J_{p2}$ по областям D_1, D_0, D_2 (фиг. 1). Интегралы J_{p1}, J_{p2} особенностей не имеют и вычисляются как повторные с конечными пределами. Для вычисления J_{p0} выделялась особенность при $\sigma \rightarrow s$. Тогда

$$\begin{aligned}
 J_{p0}(s) = & \int_{D_0} \int q_p(s) N(s, \sigma) d\sigma = -\frac{1}{\pi} \int_{r_-} \frac{h'}{h} r dr \int_{\theta''(r)}^{\theta} [v_{1p}(r, \theta) - v_{1p}(\rho, \beta)] \times \\
 & \times \operatorname{Re} [\ln(\zeta^m - z^m)] d\theta - 2v_{1p}(\rho, \beta) \left\{ \int_{r_-}^{\rho} \left[\varepsilon(r) \ln \rho + \frac{F_1}{2\pi} \right] \frac{h'}{h} r dr + \right. \\
 & \left. + \int_{\rho}^{r_+} \left[\varepsilon(r) \ln r + \frac{F_2}{2\pi} \right] \frac{h'}{h} r dr \right\} \quad \left(\vartheta = \theta'(r) + \frac{2\pi}{m} \right) \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Заметим, что

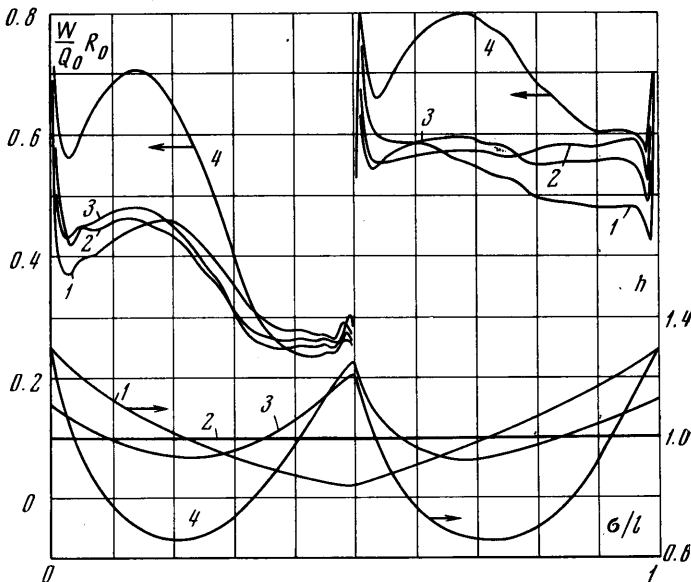
$$\lim [v_{1p}(r, \theta) - v_{1p}(\rho, \beta)] \operatorname{Re} \ln(\zeta^m - z^m) = 0 \quad (\sigma \rightarrow s, \zeta \rightarrow z)$$

Для определения $v_{1p}^{(k)}$ (2.11) необходимо вычислить кратные интегралы вида

$$\int_D \int q_p^{(k-1)}(\sigma) \frac{\partial}{\partial \rho} [N(s, \sigma)] r dr d\theta = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{h'}{h} r dr \int_{\theta''(r)}^{\vartheta} v_{1p}^{(k-1)}(r, \theta) \frac{\partial}{\partial \rho} [N(s, \sigma)] d\theta \quad (3.3)$$

Здесь при $\sigma \rightarrow s$ имеем

$$\lim_{\sigma \rightarrow \beta} v_{1p}^{(k-1)}(r, \theta) \frac{\partial}{\partial \rho} [N(s, \sigma)] = \frac{v_{1p}^{(k-1)}(\rho, \beta)}{2\pi\rho} m \quad (r = \rho) \quad (3.4)$$



Фиг. 4

Для вычисления кратных интегралов применялась кубатурная формула Симпсона. При выборе числа узлов в области интегрирования оценивалась величина интеграла. Получено, что значение кратного интеграла по области D весьма близко к значению интеграла по области D^* , являющейся окрестностью точки s_i , для которой определяется интеграл. Программа для ЭВМ «Минск-2» составлена так, что область

D^* ограничивается $(0.7-1.3) \rho_1$. Численные расчеты для ряда решеток показали, что величина члена, содержащего кратный интеграл в (2.9), составляет величину всегда $< 0.01 b_p(s)$. Поэтому решение $\varphi_p(s)$, полученное в первом приближении, обладает достаточной точностью, вполне удовлетворяющей целям практических расчетов, что ранее получено для аналогичного случая при решении обратной задачи [16].

Касательная составляющая v_τ скорости на контуре профиля определялась численным дифференцированием $\varphi(s)$ по интерполяционной формуле Лагранжа для пяти точек.

По разработанному алгоритму составлена программа для ЭВМ «Минск-2». Точность полученного результата оценивалась сравнением с решением, полученным в [12], для решетки в гиперболическом слое. На фиг. 3 показаны результаты определения относительной скорости двух вариантов гидротурбинных решеток:

$$1) R_0 = 0.48 \text{ м}, t = 16, Q_0 = 2.612 \text{ м}^2/\text{сек}, \Gamma_1 = -9.13 \text{ м}^2/\text{сек}, \omega = -6.8 \text{ 1/сек};$$

$$2) R_0 = 0.125 \text{ м}, t = 12, Q_0 = 0.7145 \text{ м}^2/\text{сек}, \Gamma_1 = -2.53 \text{ м}^2/\text{сек}, \omega = -27.8 \text{ 1/сек}.$$

Пунктиром изображен график относительной величины относительной скорости WR_0/Q_0 , вычисленной по методике [12]; l — полная длина развертки профиля.

На фиг. 4 представлены результаты расчета гидротурбинной решетки 2 для одного режима при различных вариантах функции изменения толщины слоя h .

В заключение отметим, что разработанный метод пригоден для расчета произвольных турбинных и наносных решеток с произвольным характером изменения толщины слоя.

Поступило 14 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М., Физматгиз, 1962.
2. Белехова Н. Г. Учет пространственности потока, обтекающего рабочее колесо турбомашин. Вестн. ЛГУ, 1958, № 1.
3. Wu Chung-Hua A theory of the direct and inverse problems of compressible flow past cascade of arbitrary blade sections lying in arbitrary stream filament of revolution in turbomachine. Scientia Sinica, 1959, vol. 8, No. 12.
4. Hoffmeister M. Ein Beitrag zur Berechnung der inkompressiblen reibungsfreien Strömung durch ein unendlich dünnes Schaufelgitter in einem Rotationshohlraum. Maschinenbautechnik, 1964, Bd 10, Nr. 8, S. 416.
5. Murata Susumu A theory of the impeller the breadth of which is a function of radius. Bull. ISME, 1962, vol. 5, No. 17, pp. 102—109. Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1961, vol. 27, No. 177, p. 681.
6. Murata Susumu A contribution to the theory of semiaxial pump impeller. Bull. ISME, 1962, vol. 5, No. 17, pp 110—117; Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1961, vol. 27, No. 177, p. 691.
7. Kubota Shigeo Cascade performance with accelerated or decelerated axial velocity. Bull. ISME, 1962, vol. 5, No. 9, pp. 450—459.
8. Pollard D., Horlock I. H. A theoretical investigation of the effect of change in axial velocity on the potential flow through a cascade of aerofoils. Great Brit. Aeronaut. Res. Council Current P. 1963, p. 619.
9. Kuruts I. Berechnung der Strömungstechnischen Kennwerte radial durchstromter Laufräder bei gegebener geometrischer Gestalt. Periodice polytechnica, 1964, Bd. 8, Nr. 2, S. 229—245.
10. Дайгудзи Хисааки. Приближенный анализ течения через решетки насосов и турбин диагонального типа. «Нихон кикай гаккай ромбунсю» Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 1966, vol. 32, No. 242, pp. 1527—1534.
11. Czibere T. Über die Berechnung der Schaufelprofile und der Strömung um die Schaufeln von Strömungsmaschinen. Ingr.—Arch., 1964, Bd. 33, Nr. 4.
12. Раухман Б. С. Прямая задача обтекания двумерной решетки профилей. Тр. центр. котлотурб. ин-та, 1965, вып. 61.
13. Жуковский М. И. Аэродинамический расчет потока в осевых турбомашинах. Л., «Машиностроение», 1967.
14. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959.
15. Лукашевич В. П., Самсонов В. Г. Расчет на ЭЦВМ плоских круговых вращающихся решеток из профилей произвольной формы. М., Тр. Всес. н.-и. ин-та гидромашиностр., 1968, вып. 37.
16. Викторов Г. В., Моргунов Г. М. Решение обратной задачи решеток профилей на осесимметричной поверхности тока в переменном слое. Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 4.