

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

В. Н. ВАРАПАЕВ, В. И. ЯГОДКИН

(Москва)

Изучается устойчивость течения, образующегося в плоском канале при втекании несжимаемой вязкой жидкости через его проницаемые параллельные стенки. При некоторых предположениях исследование устойчивости сводится к решению модифицированного уравнения Орра — Зоммерфельда, учитывающего поперечную составляющую скорости основного течения. В результате численного интегрирования этого уравнения находится зависимость локального критического числа Рейнольдса от числа Рейнольдса вдува R_0 , определяемая двумя факторами: изменением профиля продольной составляющей скорости с R_0 и наличием поперечной составляющей скорости. Производится качественное сравнение результатов расчета с экспериментальными данными о переходе от ламинарного режима течения к турбулентному в каналах с пористыми стенками, подтверждающее необходимость учета поперечной составляющей скорости основного течения на его устойчивость в рассматриваемой задаче.

Течения в каналах с проницаемыми стенками представляют интерес для теории гидродинамической устойчивости ввиду того, что они могут быть описаны точными решениями уравнений Навье — Стокса аналогично известным течениям Пуазейля и Куэтта. Однако в отличие от последних течения в каналах с проницаемыми стенками, изучавшиеся, например, в [1], будут непараллельными.

Теория гидродинамической устойчивости параллельных течений часто применялась к непараллельным течениям (например, в пограничном слое). При этом непараллельный характер течения учитывался лишь через изменение профилей продольной составляющей скорости. В работах [2, 3] изучалось влияние поперечной составляющей скорости основного течения на его устойчивость. В случае пограничного слоя в сжимаемом газе в [2] обнаружено значительное влияние поперечной составляющей скорости на критическое число Рейнольдса, подтвержденное экспериментально. В работе [3], где изучалась устойчивость течения в пограничном слое с отсосом для несжимаемой жидкости также имело место сильное влияние поперечной составляющей скорости на область неустойчивости.

1. Рассмотрим течение в плоском канале с параллельными проницаемыми стенками в случае, когда вязкая несжимаемая жидкость протекает через стенки с постоянной скоростью v_0 и растекается симметрично относительно некоторого сечения канала, которое совпадает с плоскостью $x = 0$. Ось x расположена на одинаковом расстоянии от стенок, равном a . Такое течение описывается точным решением уравнений Навье — Стокса, полученным в [1] и имеющим вид

$$\psi_0 = xF(y) \quad (-\infty < x < \infty, -1 \leq y \leq 1) \quad (1.1)$$

Функция $F(y)$ удовлетворяет уравнению

$$F'F'' - FF''' = R_0^{-1}F'''' \quad (1.2)$$

Здесь ψ_0 — функция тока, $R_0 = av_0/\nu$ — число Рейнольдса вдува. Граничными условиями для $F(y)$ служат постоянство скорости втекания жидкости, отсутствие продольной составляющей скорости на стенках канала и симметрия течения относительно оси x

$$F(1) = 1, \quad F(0) = F''(0) = F'(1) = 0 \quad (1.3)$$

Из (1.1) следует, что продольная составляющая скорости линейно растет с x : $u = xF'(y)$, а поперечная — $v = -F(y)$ и относительный про-

филь скорости $w = u / U$ не зависят от x . Здесь $U = u(x, 0) = xF'(0)$ — скорость на оси канала. Отношение $v / U = -F(y) / xF'(0)$, являющееся одной из характеристик непараллельности течения, убывает с ростом длины канала. Профиль скорости $w = w(y, R_0)$ зависит от R_0 так, что при $R_0 = 0$ он переходит в параболический, а при $R_0 \rightarrow \infty$ стремится к профилю $w = \cos^{1/2} \pi y$, получающемуся из вихревого решения идеального уравнения. На фиг. 1, построенной в результате численного интегрирования уравнения (1.2) с условиями (1.3), видно, что как w , так и величина w'' , оказывающая сильное влияние на устойчивость течения, мало меняются при $R_0 > 20$.

2. Получим уравнение плоского возмущенного движения. Линеаризуя уравнение Гельмгольца для функции тока и полагая функцию тока возмущенного движения ψ в виде

$$\psi = e^{\sigma t} P(x, y)$$

получим уравнение для $P(x, y)$

$$\sigma \Delta P + x \frac{\partial}{\partial x} (F' \Delta P - F''' P) - F \frac{\partial \Delta P}{\partial y} + F'' \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{R_0} \Delta^2 P \quad (2.1)$$

Здесь $F(y)$ — решение уравнения (1.2),

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Считаем, что возмущения скорости на стенках канала отсутствуют, т. е.

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{y=\pm 1} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_{y=\pm 1} = 0$$

Такие условия, по-видимому, выполняются, если стенки канала изготовлены из испаряющегося или пористого вещества с достаточно мелкими порами.

Вообще говоря, в задаче об устойчивости (2.1) требуется постановка граничных условий также при $x \rightarrow \pm \infty$. Эти условия, однако, не нужны в приближенном решении задачи, которое рассматривается ниже.

Предположим, что потеря устойчивости течения определяется свойствами потока вблизи рассматриваемого сечения. Такое предположение о локальном характере потери устойчивости обычно всегда принималось при исследовании «почти параллельных» течений. Тогда вблизи данного сечения влияние непараллельности сводится к влиянию поперечной составляющей скорости.

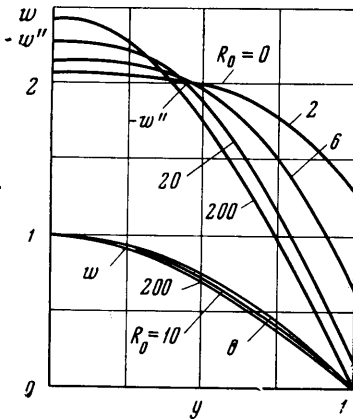
Фиксируя x в коэффициентах уравнения (2.1) $x = x^* = \text{const}$, представим возмущения в виде

$$P(x, y) = \varphi(y) e^{i\alpha x}$$

За масштаб скорости примем скорость на оси канала $U^* = x^* F'(0)$ и введем обозначения

$$R = x^* F'(0) R_0, \quad i\omega = -\sigma / x^*, \quad c = \omega / \alpha$$

Здесь R — число Рейнльдса, построенное по скорости на оси канала, ω — круговая частота, c — волновая скорость ($c = c_r + ic_i$, $c_i > 0$) для



Фиг. 1.

нарастающих возмущений). Уравнение и граничные условия для амплитуды возмущений $\varphi(y)$ примут вид

$$\begin{aligned} \varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi &= i\alpha R[(w - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - w''\varphi] - \\ &- R_0[F(\varphi''' - \alpha^2\varphi') - F''\varphi'], \quad \varphi(\pm 1) = \varphi'(\pm 1) = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

При $R_0/R \rightarrow 0$ это уравнение становится обычным уравнением Орра — Зоммерфельда. Последний член уравнения (2.2) учитывает влияние поперечной составляющей скорости основного течения. Ниже будет изучаться влияние R_0 на характеристики устойчивости течения. Это влияние проявляется двояко: через профиль скорости $w(y, R_0)$ и непосредственно через коэффициент при последнем члене уравнения (2.2).

3. Уравнение (2.2) при симметричном профиле скорости w и антисимметричном профиле поперечной составляющей скорости, как и обычное уравнение Орра — Зоммерфельда, имеет симметричные и антисимметричные собственные функции. Ограничимся рассмотрением симметричных решений. Тогда граничные условия для $\varphi(y)$ примут вид

$$\varphi'(0) = \varphi'''(0) = \varphi(1) = \varphi'(1) = 0 \quad (3.1)$$

При решении (2.2) с условиями (3.1) используем метод сведения краевой задачи к задаче Коши. Пусть $\varphi_1(y, \alpha, R, R_0, c)$ и $\varphi_2(y, \alpha, R, R_0, c)$ — два линейно-независимых решения, удовлетворяющих граничным условиям при $y = 0$. В силу граничных условий на стенке ($y = 1$) характеристическое уравнение имеет вид

$$D(\alpha, R, R_0, c) \equiv \varphi_1(1)\varphi_2'(1) - \varphi_1'(1)\varphi_2(1) = 0 \quad (3.2)$$

Из (3.2) при $c_i = 0$ получаются нейтральные кривые $H_1(\alpha, R, R_0) = 0$ и $H_2(c, R, R_0) = 0$, по которым можно найти наименьшее значение числа Рейнольдса R_* , когда впервые наступает неустойчивость, и соответствующие значения α_* и c_* . Эти величины зависят лишь от R_0 .

Собственные значения уравнения (3.2) определяются методом, предложенным в [4] для обычного уравнения Орра — Зоммерфельда. Вместо уравнения (3.2) рассматривается эквивалентное ему уравнение

$$\Psi(1, \alpha, R, R_0, c) = 0 \quad (3.3)$$

Функция $\Psi(y, \alpha, R, R_0, c)$ будет решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \Phi' + \Phi^2 + 2f'\Psi - (\alpha^2 + \lambda - f) + \lambda_1(f\Psi + \Phi) - \mu_1\Psi &= 0 \\ \Psi' = 1 - \Psi(q + \Phi), \quad \Psi(0) = \Phi(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

а входящие в эту систему функции $f(y, \alpha, R, R_0, c)$ и $q(y, \alpha, R, R_0, c)$ — решением задачи Коши

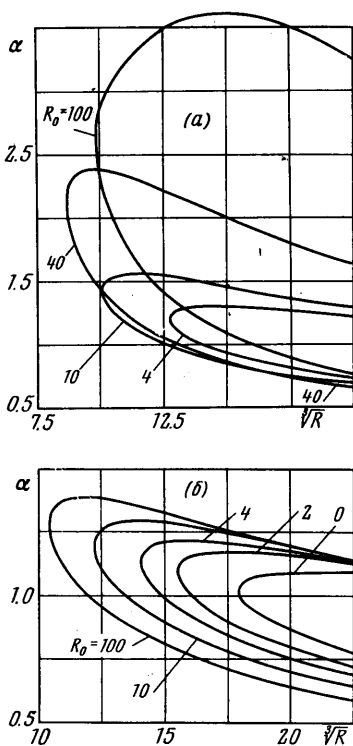
$$\begin{aligned} f'' + 2f'q + f^2 - \lambda f + \mu + \lambda_1(f' + fq) - \mu_1q &= 0 \\ q' = f + \alpha^2 - q^2, \quad q(0) = f(0) = 0, \quad f(0) = \lambda(0) & \quad (3.5) \\ \lambda = i\alpha R(w - c), \quad \mu = i\alpha R w'', \quad \lambda_1 = R_0 F, \quad \mu_1 = R_0 F'' \end{aligned}$$

Функции f, q, Ψ, Φ выражаются через φ_1 и φ_2 [4].

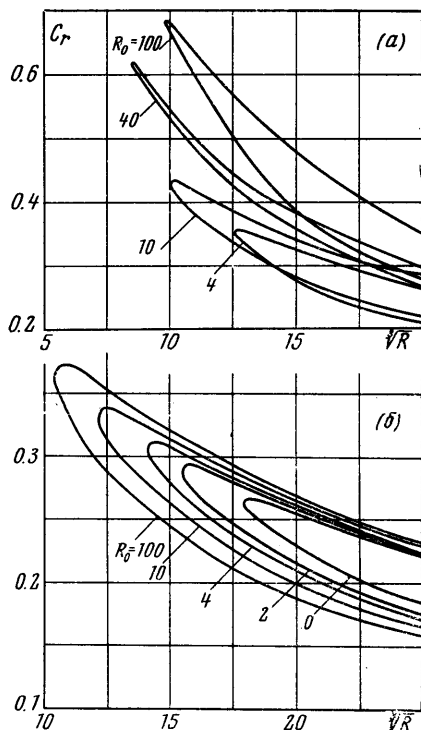
Задачи Коши (3.4) и (3.5) решались на ЭЦВМ М-20 методом Рунге — Кутты одновременно с задачей Коши для уравнения (2.2) с начальными условиями $F(0) = 0, F'(0) = \beta, F''(0) = 0, F'''(0) = \gamma$, где β и γ определялись заранее из решения краевой задачи (1.2), (1.3) для различных R_0 .

Корни уравнения (3.3) определялись модифицированным методом Ньютона. Расчет нейтральных кривых при различных значениях R_0 проводился, начиная с $R_0 = 0$ (течение Пуазейля). Это позволяло задавать хорошие начальные приближения для корней уравнения (3.3). Проводились расчеты также для случая $\lambda_1 = \mu_1 = 0$ с целью сравнения нейтральных кривых и величин R_* , α_* и c_{r*} для обычного и модифицированного уравнений Орра — Зоммерфельда.

5. На фиг. 2а и 3а в переменных $(\alpha, \sqrt[3]{R})$ и (c_r, \sqrt{R}) приведены нейтральные кривые для уравнения (2.2) при различных R_0 . Для сравнения на фиг. 2б и 3б приведены нейтральные кривые для уравнения Орра — Зоммерфельда при тех же профилях скорости $w(y, R_0)$. При увеличении R_0 область неустойчивости для уравнения (2.2) растет по α значительно быстрее (фиг. 2а) и нейтральные кривые в переменных



Фиг. 2



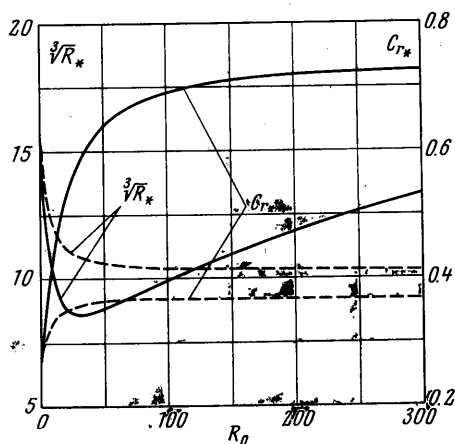
Фиг. 3

$(c_r, \sqrt[3]{R})$ изменяются немонотонно (фиг. 3а) по сравнению с нейтральными кривыми уравнения Орра — Зоммерфельда (фиг. 2б и 3б).

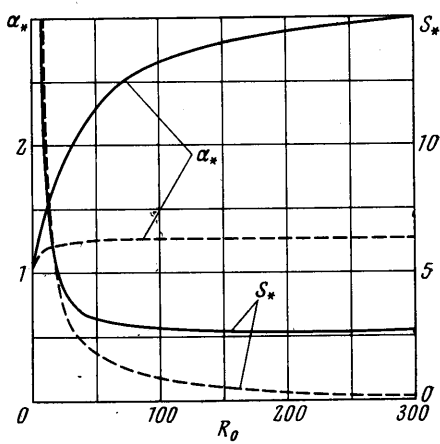
На фиг. 4 показаны зависимости R_* и c_{r*} от R_0 для уравнения (2.2) (сплошные линии) и уравнения Орра — Зоммерфельда (пунктирные линии). Влияние поперечной составляющей скорости приводит к тому, что зависимость $R_*(R_0)$ имеет минимум приблизительно при $R_0 = 35$. При $R_0 > 35$ рассмотренные здесь возмущения становятся все более устойчивыми. При $R_0 > 100$ зависимость $R_*(R_0)$ становится близкой к линейной. Так как $R = x^*F'(0)R_0$, а $F'(0) \rightarrow \pi/2$ при $R_0 \rightarrow \infty$, то существует такое значение $x_1 \approx 4.4$, что при $x^* < x_1$ кривые $R = x^*F'(0)R_0$ не пересекают кривой $R_* = R_*(R_0)$. Это означает, что при $x^* < x_1$ для любых чисел R_0 течение устойчиво по отношению к симметричным возмущениям функции тока. Отметим также, что фазовая скорость распространения возмущения c_{r*} и волновое число α_* для уравнения (2.2) существенно больше, чем для уравнения Орра — Зоммерфельда (фиг. 4 и 5). На фиг. 5 показано также изменение числа Струхала $S_* = a\omega_* / 2\nu_0 = (\alpha c_r R)_*$

$/2\pi R_0$ в зависимости от R_0 . Для уравнения (2.2) S_* становится почти постоянным при $R_0 > 100$, тогда как для уравнения Орра — Зоммерфельда $S_* \rightarrow 0$ при $R_0 \rightarrow \infty$.

В заключение сравним результаты расчетов с экспериментами по определению перехода от ламинарного режима течения к турбулентному в каналах с пористыми стенками [5]. Такое сравнение возможно качественно при достаточном удалении точки перехода от начального участка канала. В экспериментах (в трубе и в кольцевом



Фиг. 4



фиг. 5

канале) с ростом R_0 наблюдалось уменьшение критического числа Рейнольдса R_* , определяемого в момент появления колебаний скорости на некотором расстоянии от стенки при относительно высоком значении скорости (около 0.65 от осевой в случае кольцевого канала). Если эту величину относительной скорости считать равной фазовой скорости c_{r*} , то это лучше согласуется с результатом теории, учитывающей непараллельность течения. Кроме того, был подтвержден вывод о постоянстве числа Струхала S_* при достаточно больших значениях R_0 .

Поступило 2 I 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Bergman A. Laminar flow in channels with porous walls. J. Appl. Phys., 1953, vol. 24, p. 1232.
2. Yvon Brown. A stability criterion for three-dimensional laminar boundary layers. Boundary layer and flow control, 1962, vol. 2.
3. Алексеев Ю. И., Короткин А. И. Влияние поперечной скорости потока в несжимаемом пограничном слое на устойчивость ламинарной формы течения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.
4. Гольдштик М. А., Сапожников В. И. Устойчивость ламинарного потока в присутствии поля массовых сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
5. Ягодкин В. И. Применение каналов с пористыми стенками для исследования внутриканального горения твердых ракетных топлив. Тр. XVIII Междунар. астронавтического конгресса, 1967.