

## СТАЦИОНАРНЫЕ КОНВЕКТИВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ПЛОСКОМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ С ПРОНИЦАЕМЫМИ ГРАНИЦАМИ

Д. Л. ШВАРЦБЛАТ

(Пермь)

В плоском горизонтальном слое жидкости, ограниченном нагретыми до разной температуры проницаемыми плоскостями, между которыми происходит поперечное течение с однородной скоростью, конвекция возникает при определенном критическом числе Рэлея. Исследование спектра возмущений и конвективной устойчивости, проведенное в рамках линейной теории в работе [1], показало, что конвективная неустойчивость в слое с проницаемыми границами, как и в случае задачи Рэлея, связана с развитием монотонных возмущений. Как оказывается, поперечное движение в слое приводит к значительному увеличению критического числа Рэлея. Линейная теория не позволяет проследить за развитием возмущений в надкритической области. Исследование развитого нелинейного движения можно провести лишь на основе полных нелинейных уравнений конвекции.

В данной работе проведено численное исследование нелинейных движений в надкритической области. Численные расчеты выполнены методом сеток на ЭВМ. Получены решения нелинейных уравнений движения в широком интервале чисел Рэлея для различных значений числа Пекле, определяющего интенсивность поперечного движения в слое.

1. Рассмотрим плоский горизонтальный слой вязкой несжимаемой жидкости, ограниченный бесконечными плоскостями  $y = 0$  и  $y = h$  (ось  $x$  направлена горизонтально, ось  $y$  — вертикально). Через поверхность  $y = 0$ , температура которой  $\theta$ , происходит однородное вдувание жидкости со скоростью  $v_0$ , а через поверхность  $y = h$  с нулевой температурой — однородное отсасывание с такой же скоростью.

Уравнение плоского конвективного движения жидкости для функции тока  $\psi$  и температуры  $T$  запишем в безразмерном виде

$$\frac{1}{P} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{1}{P} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \right) = \Delta \Delta \psi - R \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \Delta T \quad (1.2)$$

Здесь в качестве единиц расстояния, времени, функции тока и температуры выбраны соответственно величины  $h$ ,  $h^2/\chi$ ,  $\chi$ ,  $\theta$ . Функция тока  $\psi$  связана с компонентами скорости соотношениями

$$v_x = \partial \psi / \partial y, \quad v_y = -\partial \psi / \partial x \quad (1.3)$$

На горизонтальных границах слоя температура задана; горизонтальная компонента скорости обращается в нуль, а вертикальная равна  $v_0$ . Таким образом, для безразмерных величин имеем условия

$$T = 1, \quad \partial \psi / \partial y = 0, \quad \partial \psi / \partial x = -a \quad \text{при } y = 0 \quad (1.4)$$

$$T = 0, \quad \partial \psi / \partial y = 0, \quad \partial \psi / \partial x = -a \quad \text{при } y = 1 \quad (1.5)$$

Выбрав начало отсчета функции тока при  $x = 0$ , граничное условие  $\partial\psi/\partial x = -a$  при  $y = 0$  и  $y = 1$  перепишем в виде

$$\psi = -ax \quad \text{при } y = 0, y = 1 \quad (1.6)$$

В уравнения (1.1), (1.2) и граничные условия (1.4) — (1.6) входят три безразмерные параметра — числа Рэлея, Прандтля и Пекле

$$R = g\beta\theta h^3/\nu\chi, \quad P = \nu/\chi, \quad a = v_0 h/\chi$$

2. В работе [1] исследовалась устойчивость стационарного поперечного движения между горизонтальными границами, нагретыми до разных температур, с однородной скоростью  $v_0$  и стационарным распределением температуры

$$T_0 = (1 - e^a)^{-1}(e^{ay} - e^a) \quad (2.1)$$

В предельном случае отсутствия поперечного движения жидкости ( $a = 0$ ) из (2.1) получается  $T_0 = 1 - y$ , т. е. линейное по вертикали распределение температуры.

Для исследования конвективной устойчивости подогреваемого слоя жидкости с проницаемыми границами [1] рассматривались малые нормальные возмущения скорости и температуры вида

$$v', T' \sim \exp[-\lambda t + i(k_1 x + k_2 z)] \quad (2.2)$$

Здесь  $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$  — комплексный декремент возмущений,  $k_1$  и  $k_2$  — вещественные волновые числа.

При отсутствии вдувания в случае подогрева снизу ( $R > 0$ ) исследование спектров характеристических возмущений [1] показало, что возможны только монотонные возмущения; при наличии вдувания возможны как монотонные возмущения (им соответствуют вещественные  $\lambda$ ), так и колебательные (комплексные  $\lambda$ ). Неустойчивость возникает, однако, в результате развития монотонных возмущений. Граница устойчивости определяется из условия обращения в нуль вещественного декремента:  $\lambda_r = 0$ . Это условие определяет нейтральную кривую устойчивости

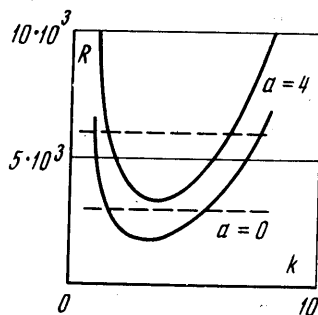
$$R = R(k), \quad k = (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}$$

При этом числа Пекле  $a$  и Прандтля  $P$  будут параметрами. Вид нейтральных кривых при  $P = 1$  для  $a = 0$  и  $a = 4$  приведен на фиг. 1 по данным работы [1]<sup>1</sup>. Выше нейтральной кривой расположена область неустойчивости; малые возмущения в этой области монотонно нарастают. Оказалось, что поперечное движение в слое приводит к значительному увеличению критических чисел Рэлея, т. е. к повышению конвективной устойчивости жидкости.

3. Для решения нелинейной задачи (1.1), (1.2), (1.4) — (1.6) воспользуемся методом конечных разностей.

Будем искать периодические вдоль оси  $x$  решения с длиной волны  $l$ . Используя симметрию задачи, можно ограничиться нахождением решения в области, длина которой равна половине пространственного периода, т. е. расчетом одной конвективной ячейки. Таким образом, задача сводится к нахождению численного решения в прямоугольной области  $0 \leq x \leq l/2$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , где  $l$  — безразмерная (в единицах толщины слоя  $h$ ) длина волны периодического решения.

<sup>1</sup> Заметим, что в данной работе числа Рэлея определены через полную толщину слоя и полную разность температуры и поэтому они в 16 раз больше соответствующих значений из [1]. Числа Пекле определены через полную толщину слоя и отличаются в два раза от соответствующих значений из [1].



Фиг. 1

На горизонтальных границах прямоугольной области граничные условия (1.4)–(1.6) поставлены выше. Вертикальные границы области  $x = 0$  и  $x = l/2$  разделяют соседние конвективные ячейки. На этих границах выполняются условия симметрии — исчезают тепловой поток, нормальная компонента скорости, а также касательная компонента вязкого напряжения

$$\partial T / \partial x = 0, \quad v_x = 0, \quad \partial v_y / \partial x = 0 \quad \text{при } x = 0, x = l/2 \quad (3.1)$$

Учитывая (1.3), имеем

$$\partial T / \partial x = 0, \quad \partial \psi / \partial y = 0, \quad \partial^2 \psi / \partial x^2 = 0 \quad \text{при } x = 0, x = l/2 \quad (3.2)$$

Второе из условий (3.2) означает, что функция тока  $\psi$  не изменяется вдоль вертикальных границ области; ее значения на этих границах в силу (1.6) таковы:

$$\psi = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad \psi = -l/2 a l \quad \text{при } x = l/2 \quad (3.3)$$

Введем прямоугольную пространственную сетку с координатами узлов

$$x_i = (i-2)h_1, \quad h_1 = l/2 / I, \quad y_k = 1 - (k-1)h_2, \quad h_2 = 1 / K$$

(области  $0 \leq x \leq l/2$ ,  $0 \leq y \leq 1$  соответствуют номера узлов  $i = 2, 3, 4, \dots, I+2$ ;  $k = 1, 2, 3, \dots, K+1$ ; дополнительные ряды узлов  $i = 1$  и  $i = I+3$  вводятся для аппроксимации условия исчезновения теплового потока на боковых границах (см. ниже (3.9)) и временную сетку

$$t_n = \tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_j + \dots + \tau_{n-1}$$

Значения функций в узлах пространственно-временной сетки обозначим так:

$$q(x_i, y_k, t_n) = q_{i,k}^n$$

Уравнения движения (1.1), (1.2) запишем в конечно-разностной форме, используя центральные разности для аппроксимации пространственных производных и вводя вихрь скорости  $\varphi = \text{rot}_z v = -\Delta \psi$

$$\varphi_{i,k}^{n+1} = \varphi_{i,k}^n + \left\{ \Delta \varphi_{i,k}^n + \frac{R}{2h_1} (T_{i+1,k}^n - T_{i-1,k}^n) + \right. \quad (3.4)$$

$$\left. + \frac{1}{P} \frac{1}{4h_1 h_2} [(\psi_{i,k+1}^n - \psi_{i,k-1}^n)(\varphi_{i+1,k}^n - \varphi_{i-1,k}^n) - (\psi_{i+1,k}^n - \psi_{i-1,k}^n)(\varphi_{i,k+1}^n - \varphi_{i,k-1}^n)] \right\} \tau_n P$$

$$T_{i,k}^{n+1} = T_{i,k}^n + \left\{ \Delta T_{i,k}^n + \frac{1}{4h_1 h_2} \left[ (\psi_{i,k+1}^{n+1} - \psi_{i,k-1}^{n+1})(T_{i+1,k}^n - T_{i-1,k}^n) - \right. \right. \quad (3.5)$$

$$\left. \left. - (\psi_{i+1,k}^{n+1} - \psi_{i-1,k}^{n+1})(T_{i,k+1}^n - T_{i,k-1}^n) \right] \right\} \tau_n$$

$$\Delta \psi_{i,k}^{n+1} = -\varphi_{i,k}^{n+1} \quad (3.6)$$

Здесь лапласианы  $\Delta \varphi_{i,k}$ ,  $\Delta T_{i,k}$  и  $\Delta \psi_{i,k}$  определены формулой

$$\Delta q_{i,k} = \frac{1}{h_1^2} (q_{i+1,k} - 2q_{i,k} + q_{i-1,k}) + \frac{1}{h_2^2} (q_{i,k+1} - 2q_{i,k} + q_{i,k-1}) \quad (3.7)$$

Граничные условия (1.4)–(1.6) на горизонтальных границах  $y = 0$  и  $y = 1$  в разностной форме имеют вид

$$\begin{aligned} T_{i,K+1}^n &= 1, & \psi_{i,K+1}^n &= -ah_1(i-2) \\ T_{i,1}^n &= 0, & \psi_{i,1}^n &= -ah_1(i-2) \quad (i = 2, 3, 4, \dots, I+2) \\ \varphi_{i,K+1}^n &= [-a(i-2)h_1 - \psi_{i,K}^n] 2 / h_2^2 \\ \varphi_{i,1}^n &= [-a(i-2)h_1 - \psi_{i,2}^n] 2 / h_2^2 \quad (i = 3, 4, 5, \dots, I+1) \end{aligned} \quad (3.8)$$

На вертикальных границах  $x = 0$  и  $x = l/2$  из (3.2), (3.3) имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{2,k}^n &= \varphi_{I+2,k}^n = 0, & \psi_{2,k}^n &= 0, & \psi_{I+2,k}^n &= -al/2 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, K+1) \\ T_{1,k}^n &= T_{3,k}^n, & \psi_{1,k}^n &= -\psi_{3,k}^n, & \varphi_{1,k}^n &= -\varphi_{3,k}^n \quad (k = 1, 2, 3, \dots, K+1) \\ T_{I+3,k}^n &= T_{I+1,k}^n, & \psi_{I+3,k}^n &= -\psi_{I+1,k}^n - 2ah_1, & \varphi_{I+3,k}^n &= -\varphi_{I+1,k}^n \end{aligned} \quad (3.9)$$

Для аппроксимации условия на вертикальных границах  $\partial T / \partial x = 0$  к пространственной сетке, покрывающей прямоугольную область, было добавлено по одному ряду узлов слева ( $i = 1$ ) и справа ( $i = I + 3$ ).

Процедура решения конечно-разностной системы (3.4)–(3.6) описана в работе [2]. Шаг по времени определялся, исходя из условия устойчивости счета (см. [3]). Численные результаты получены на сетке с параметрами

$$I = 20, \quad K = 20 \quad (k = \pi)$$

$$I = 32, \quad K = 16 \quad (k < \pi); \quad I = 16, \quad K = 16 \quad (k > \pi)$$

Здесь  $k = 2\pi/l$  — волновое число.

Стационарные решения находились методом установления для фиксированных значений  $a, P, R$  и  $k$ . При нахождении решения для  $R \pm \Delta R$  в качестве начального приближения использовалось решение, полученное для значения  $R$ .

4. Обсудим вначале результаты расчетов для случая отсутствия вдувания ( $a = 0$ ).

Если число Рэлея  $R$  ниже критического, то слой находится в равновесии с линейным по вертикали распределением температуры. При увеличении числа Рэлея в надкритической области в результате кризиса равновесия развивается нелинейное стационарное движение. Зная поле температуры, можно вычислить полный поперечный тепловой поток через слой на участке длиной  $lh$  (на единицу длины вдоль оси  $z$ )

$$Q = -\kappa \int_0^{lh} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} dx \quad (4.1)$$

Здесь  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности жидкости, а все величины размерные. В подкритической области движения жидкости нет, и поперечный тепловой поток  $Q_0$  определяется только молекулярной теплопроводностью

$$Q_0 = \kappa \theta l \quad (l — безразмерная длина волны). \quad (4.2)$$

Определим безразмерный тепловой поток (число Нуссельта) следующим образом:

$$N = Q / Q_0 \quad (4.3)$$

В равновесии  $N = 1$ ; в надкритической области появляется дополнительный конвективный поперечный перенос тепла, и  $N > 1$ .

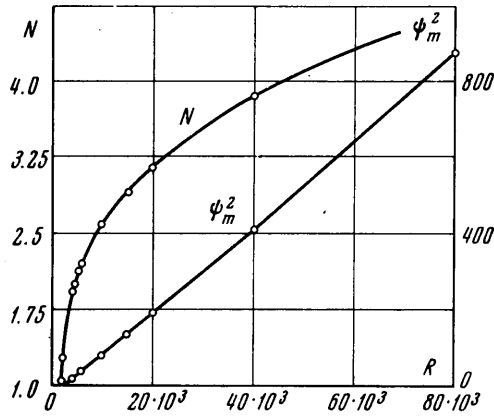
На фиг. 2 показана зависимость числа Нуссельта  $N$  и квадрата максимального значения функции тока  $\psi_m^2$  от числа Рэлея для  $P = 1$  и  $k = \pi$ . Экстраполяция зависимости  $N(R)$  на  $N = 1$  и  $\psi_m^2$  на нуль позволяет определить критическое число Рэлея  $R_c$ , которое оказывается равным 1780. Отличие  $R_c$  от критического числа Рэлея, даваемого линейной теорией (для  $k = \pi, R = 1710$ ), составляет 4%. Вблизи критической точки зависимость  $N(R)$  оказывается линейной

$$N = 1 + 6.7 \cdot 10^{-4} (R - R_c) \quad (4.4)$$

Максимальное значение функции тока  $\psi_m$  вблизи  $R_c$  изменяется по корневому закону

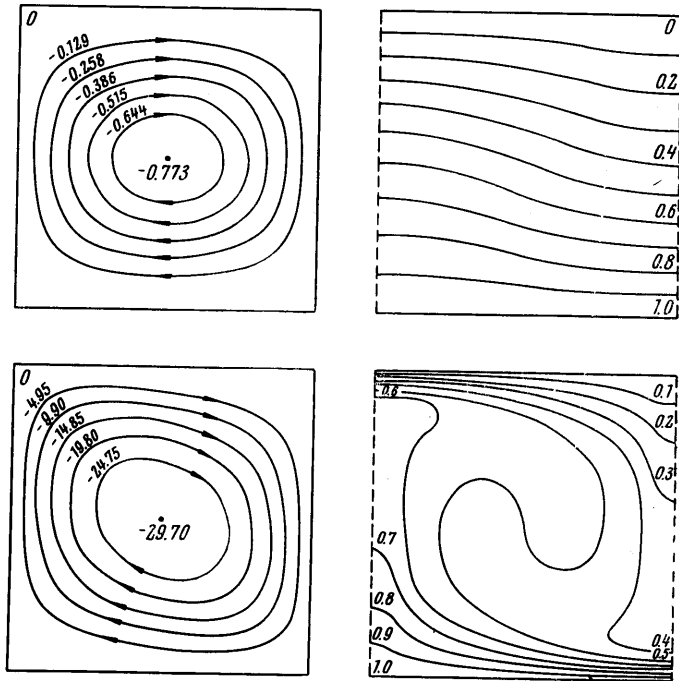
$$\psi_m = -0.092 (R - R_c)^{1/2} \quad (4.5)$$

Формулы (4.4), (4.5) свидетельствуют о «мягкой» неустойчивости подогреваемого снизу слоя жидкости.



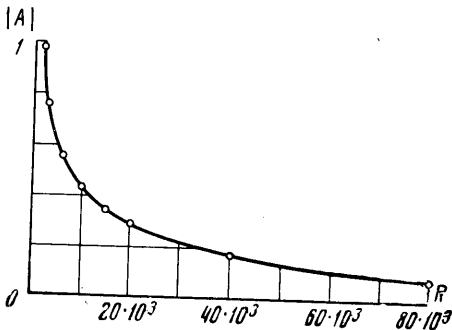
Фиг. 2

На фиг. 3 изображены для примера изолинии функции тока и изотермы для чисел Рэлея 1850 и  $80 \cdot 10^3$ . При  $R = 1850$ , близком к критическому значению, имеется медленное движение и почти горизонтальные изотермы. С ростом  $R$  движение становится более интенсивным. Градиент температуры, в центре области  $A$ , имевший



Фиг. 3

при равновесии вертикальное направление, поворачивается. Модуль градиента  $|A|$  с увеличением  $R$  уменьшается (фиг. 4), в центре слоя постепенно образуется изотермическое ядро (при  $R = 80 \cdot 10^3$   $|A|$  составляет 0,1 равновесного значения градиента). Полученные данные о тепловом потоке через полость при отсутствии поперечного движения жидкости ( $a = 0$ ) согласуются с результатами работы [4], в которой расчет проведен при  $P = 1$  для более узкого интервала значений  $R$  при фиксированном значении волнового числа  $k = \pi$ .



Фиг. 4

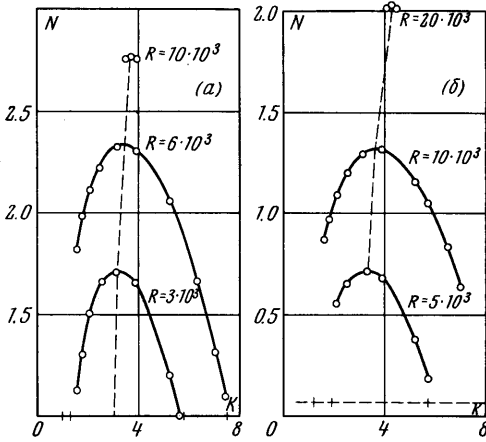
Для выяснения зависимости характеристик нелинейного движения в надкритической области от волнового числа  $k$  были проведены расчеты для трех фиксированных значений числа Рэлея:

$$R = 3 \cdot 10^3, 6 \cdot 10^3, 10 \cdot 10^3$$

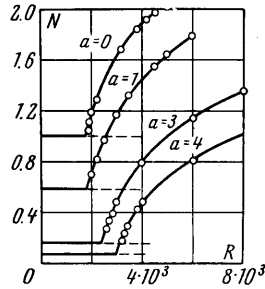
На фиг. 5а приведена полученная в результате расчетов зависимость безразмерного теплового потока  $N$  от волнового числа  $k$  для указанных выше значений числа Рэлея. На оси  $k$  этой фигуры указаны предельные значения  $k$ , между которыми согласно линейной

теории расположены области неустойчивости. Из фиг. 5а видно, что за пределами области неустойчивости  $N = 1$ , т. е. жидкость находится в равновесии. Число Нуссельта внутри интервала неустойчивости имеет максимум при определенном значении волнового числа  $k_m$ . Таким образом, при фиксированном значении числа Рэлея существует движение с волновым числом  $k_m$ , обеспечивающее максимальный перенос тепла в слое. Видно (фиг. 5а, пунктирная линия), что с ростом  $R$  происходит сдвиг волнового числа  $k_m$  в сторону больших  $k$  (т. е. в сторону коротких длин волн),

5. Пусть в слое происходит поперечное движение жидкости ( $a \neq 0$ ). В этом случае критическое число Рэлея зависит от числа Пекле [4]. Обсудим вначале результаты расчетов для фиксированного значения волнового



Фиг. 5



Фиг. 6

числа  $k = \pi$ . Число Нуссельта  $N$  будем, как и раньше, определять формулой (4.3), где по-прежнему  $Q_0 = \chi \theta l$ . Если число Рэлея меньше критического, то в слое имеется поперечное движение с однородной скоростью  $v_0$  и стационарным распределением температуры  $T_0$  (см. (2.1)). Вычисляя по (4.1) с помощью (2.1) тепловой поток  $Q$  через границу  $y = 0$ , находим число Нуссельта в подкритической области

$$N_0 = \frac{a}{l^a - 1} \tag{5.1}$$

В надкритической области возникает конвекция, поэтому  $N > N_0$ .

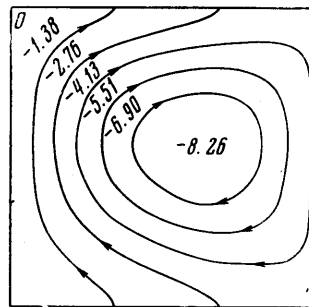
На фиг. 6 приведена зависимость  $N(R)$  для разных чисел Пекле, найденная в результате расчетов. Экстраполируя  $N(R)$  на  $N_0$  (зависящее, согласно (5.1), от  $a$ ), можно получить критические числа Рэлея для различных чисел Пекле. Для  $a = 1$  получается  $R_c = 1880$  (отличие от результатов линейной теории 5%); для  $a = 3$ ,  $R_c = 2400$  (отличие 7%); для  $a = 4$ ,  $R_c = 3020$  (отличие 11%). Вблизи критической точки сохраняется линейная зависимость  $N(R)$  и корневая зависимость  $\psi_m(R)$ .

Например, для  $a = 4$

$$N = N_0 + 5.3 \cdot 10^{-4} (R - R_c) \tag{5.2}$$

$$\psi_m = 0.132 (R - R_c)^{1/2}$$

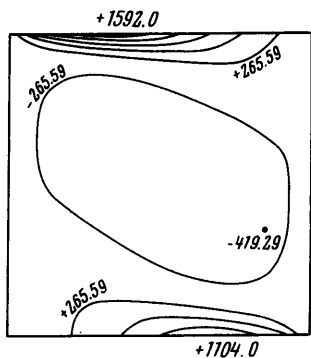
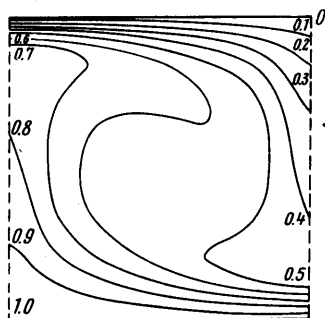
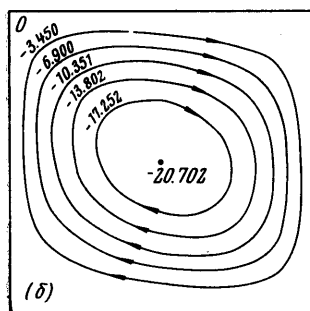
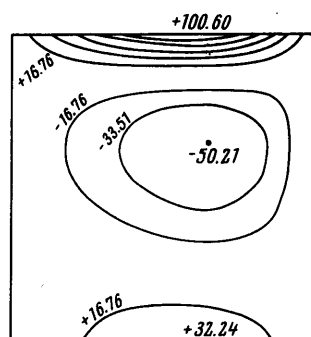
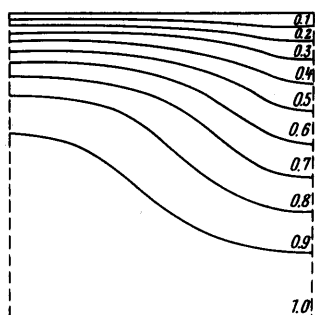
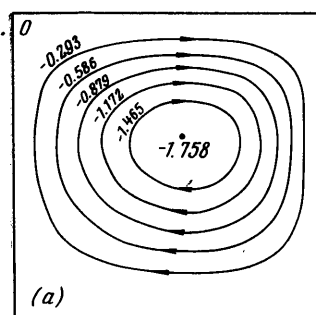
На фиг. 7 и 8 приведены для ( $a = 4$ ) линии тока надкритического конвективного движения (добавочного к поперечному течению), изотермы и изолинии вихря.



Фиг. 7

При  $R = 3.2 \cdot 10^3$  (вблизи  $R_c$ , фиг. 8а) интенсивность надкритического движения еще мала. Оно состоит поперечным движением. Стационарное распределение температуры (2.1) несколько искажено конвективным движением. С ростом  $R$  скорости конвективного движения растут и становятся сравнимыми со скоростями поперечного движения изотермы искривляются сильнее, а эффект «сдувания» линий поперечным потоком уменьшается. При  $R = 40 \cdot 10^3$  (фиг. 8б) конвективное движение становится преобладающим.

На фиг. 7 ( $a = 4$ ,  $R = 6 \cdot 10^3$ ,  $P = 1$ ) представлены изолинии функции тока суммарного движения, возникающего в результате наложения конвекции на поперечный поток.



Фиг. 8

Фиг. 9.

Фиг. 10

Для выяснения зависимости характеристик нелинейного движения в надкритической области от волнового числа  $k$  были проведены расчеты при фиксированном значении числа Пекле ( $a = 4$ ) для  $R = 5 \cdot 10^3$ ,  $10 \cdot 10^3$  и  $20 \cdot 10^3$  при различных волновых числах.

На фиг. 5б приведена зависимость безразмерного теплового потока  $N$  от волнового числа  $k$  для  $R = 5 \cdot 10^3$ ;  $10 \cdot 10^3$  в диапазоне существования надкритического движения и для  $R = 20 \cdot 10^3$  вблизи максимума  $N$ . С ростом  $R$  сдвиг волнового числа соответствующего максимуму  $N$  (фиг. 5б, пунктирная линия), как и в случае  $a = 0$ , происходит в сторону больших  $k$  (т. е. в сторону коротких волн). Интересно отметить, что при  $R = 5 \cdot 10^3$  не удалось получить стационарное решение при  $k < 1.79$ . Если задавалось начальное возмущение, соответствующее  $k = 1.79$ , то в результате процесса установления формировалось движение, соответствующее  $k = 3.58$ , т. е. заданный в начальный момент вихрь разбивался на два вихря с вдвое меньшей длиной волны. Аналогичное дробление вихря было обнаружено в работе [5], в которой численно исследовались вторичные стационарные движения в вертикальном слое жидкости.

Автор искренне благодарит Е. М. Жуховицкого за руководство, Г. З. Гершуни и Е. Л. Тарунина за постоянное внимание к работе и помощь.

Поступило 14 I 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шварцблат Д. Л. О спектре возмущений и конвективной неустойчивости плоского горизонтального слоя жидкости с проницаемыми границами. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Таруни Е. Л. Численное исследование конвективного движения в замкнутой полости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
3. Рихтмайер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
4. Chorin A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. J. Comput. Phys., 1967, vol. 2, No. 1, p. 12.
5. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Таруни Е. Л. Вторичные стационарные конвективные движения в плоском вертикальном слое жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.