

О ДЕФОРМАЦИИ ПРОФИЛЯ СКОРОСТИ ПРИ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

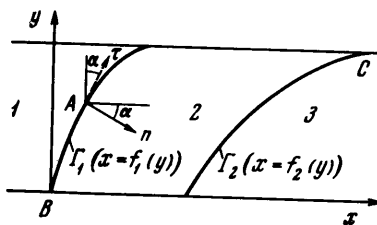
А. Б. ВАТАЖИН

(Москва)

В последнее время большую актуальность приобретают исследования течений униполярно заряженных жидкостей при наличии внешних и индуцированных электрических полей. В ряде выполненных в этом направлении работ выясняются особенности одномерных электрогазодинамических течений [1, 2], а также развитых ламинарных течений вязкой жидкости [3]. Однако изучение пространственных движений таких сред, по существу, только начинается. При этом наряду с анализом пограничных слоев и струй [4] большой интерес представляют исследования пространственных (двумерных и трехмерных) электрогидродинамических течений невязкой жидкости, так как в ряде технических устройств зона взаимодействия потока с электрическими полями не превышает нескольких калибров канала, что дает возможность пренебречь эффектами вязкости.

В данной работе рассматриваются некоторые аспекты двумерных электрогидродинамических течений невязкой несжимаемой среды при бесконечно больших электрических числах Рейнольдса. Определяются возмущения гидродинамических параметров потока за зоной действия электростатических сил. Показывается, что в ряде случаев параметры потока вне этой зоны можно определить, не решая полной системы электрогидродинамических уравнений в частных производных.

1. Рассмотрим плоский канал постоянной высоты h , по которому движется поток несжимаемой, невязкой жидкости, имеющий однородную скорость U при $x \rightarrow -\infty$ (фиг. 1). Пусть носители заряда вводят в жидкость в точках линии $x = f_1(y)$ и извлекаются из нее в точках линии $x = f_2(y)$, где f_1 и f_2 непрерывно дифференцируемые и однозначные функции своего аргумента, причем $f_2 > f_1$. Указанные гипотетические линии соответствуют сеткам-электродам (эмиттеру Γ_1 и нейтрализатору Γ_2), введение которых в поток, по предположению, не возмущает течение жидкости, если через эмиттер не подаются носители заряда.



Фиг. 1

Будем предполагать, что заряженные частицы движутся во внешнем плоском электрическом поле E^0 , которое в области течения между линиями $x = f_1(y)$ и $x = f_2(y)$ (которую в дальнейшем будем обозначать областью 2) удовлетворяет уравнениям $\text{div } E^0 = 0$ и $\text{rot } E^0 = 0$. Это поле существует в канале и тогда, когда в потоке нет заряженных частиц.

Носители заряда увлекаются потоком жидкости, вследствие чего в области 2 появляется объемный электрический заряд q , индуцирующий собственное плоское электрическое поле $E^{\infty} = -\nabla\phi^{\infty}$. Между эмиттером и нейтрализатором при этом возникает индуцированная разность потенциалов.

В области 2 на жидкость действует электростатическая сила $q(E^0 + E^{\infty})$, которая в общем случае не уравновешивается градиентом

давления и вызывает деформацию течения. В областях 1 и 3 (расположенных соответственно левее и правее зоны 2) электростатические силы равны нулю (так как в них $q \equiv 0$). Однако течение в этих зонах также отличается от однородного, что объясняется распространением возмущений из зоны 1 вверх и вниз по потоку. Таким образом, течение жидкости во всей области $|x| < \infty, 0 < y < h$ имеет двумерный характер.

Распределение гидродинамических параметров в канале описывается уравнениями эллиптического типа. Основным свойством этих уравнений является довольно быстрое затухание возмущений от зоны их генерирования. Поэтому на расстояниях порядка h от границ¹ области 2 параметры течения практически перестают зависеть от координаты x . При этом в верхней по потоку зоне 1 течение переходит в однородное, а в нижней зоне 3 — в некоторое квазиразвитое течение, характеризующееся условиями: $\mathbf{v} = \mathbf{v}^+(y) = (u^+(y), 0), p = p^+ = \text{const}$.

Указанное движение жидкости в предположении нулевой подвижности носителей заряда описывается следующей системой уравнений электрогидродинамики [5]:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + Nq \left(E_x^\circ - N_* \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial x} \right), & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + Nq \left(E_y^\circ - N_* \frac{\partial \varphi^\circ}{\partial y} \right), & u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} &= 0 \\ \Delta \varphi^\circ &= -q \quad \left(N = \frac{q_* E_* h}{\rho U^2}, \quad N_* = \frac{4\pi q_* h}{\epsilon E_*} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Система уравнений (1.1) записана в безразмерных переменных. За характерные скорость, давление и размер выбраны величины $U, \rho U^2$ и h (ρ — плотность среды), а характерными значениями для E°, q и φ° являются E_*, q_* и $4\pi q_* h^2 / \epsilon$ (ϵ — диэлектрическая постоянная).

Критерий N характеризует величину электростатической силы и может быть назван параметром электрогидродинамического взаимодействия. Величина N_* по порядку величины равна отношению индуцированного и приложенного электрических полей.

Граничным условием для определения электрического заряда в области 2 является задание величины q на эмиттере $x = f_1(y)$

$$q = q(f_1(y), y) = g(y) \text{ на } \Gamma_1 \quad (1.2)$$

Для того чтобы получить уравнения для областей 1 и 3, в соотношениях (1.1) необходимо положить $q \equiv 0$.

В дальнейшем будет предполагаться, что параметр N достаточно мал, и для решения задачи можно использовать метод возмущений. Представляя искомые функции в виде следующих рядов по степеням N (1.3)

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 1 + Nu_1(x, y) + \dots \\ v(x, y) &= Nv_1(x, y) + \dots \\ p(x, y) &= p_{00} + Np_1(x, y) + \dots \\ q(x, y) &= q_0(x, y) + Nq_1(x, y) + \dots \end{aligned}$$

$$\varphi^\circ(x, y) = \varphi_0(x, y) + N\varphi_1(x, y) + \dots \quad (p_{00} = \text{const})$$

¹ Для схемы расположения сеток на фиг. 1 длина порядка h отсчитывается вверх по потоку от точки B и вниз по потоку от точки C .

и подставляя эти выражения в систему (1.1), находим в области Z

$$\frac{\partial q_0}{\partial x} = 0, \quad q_0 = g(y), \quad \Delta \varphi_0 = -g(y) \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = g(y) \left(E_x^\circ - N_* \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial y} = g(y) \left(E_y^\circ - N_* \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)$$

Здесь величина $g(y)$ определена формулой (1.2).

Требование в непрерывности давления и скорости приводит к следующим условиям на линиях Γ_1 и Γ_2 :

$$\{p_1\} = 0, \quad \{u_1\} = 0, \quad \{v_1\} = 0 \text{ на } \Gamma_i$$

$$(\{\xi\}_1 = \xi_1^+ - \xi_1^-, \{\xi\}_2 = \xi_2^+ - \xi_2^-) \quad (i=1,2) \quad (1.6)$$

В соотношениях (1.6) и далее величины ξ_i^+ и ξ_i^- представляют собой предельные значения функции $\xi(x, y)$ в точках Γ_i при приближении к ним справа и слева от Γ_i соответственно.

Из (1.6) следуют соотношения:

$$\left\{ \frac{\partial p_1}{\partial \tau} \right\} = 0, \quad \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial \tau} \right\} = 0, \quad \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial \tau} \right\} = 0 \text{ на } \Gamma_i \quad (i=1,2) \quad (1.7)$$

Здесь τ — длина, отсчитываемая вдоль Γ_i .

Однако нормальные производные от гидродинамических параметров на линиях Γ_i в общем случае могут терпеть разрыв.

Определим вначале разрыв вихря скорости $\Omega = 1/2\omega$, $\omega = \partial v_1 / \partial x - \partial u_1 / \partial y$. Для этого выберем систему координат (n, τ) , связанную с некоторой точкой A на линии Γ , и запишем проекцию на ось τ линейаризованного уравнения импульсов (см. фиг. 1).

$$\cos \alpha \left(\sin \alpha \frac{\partial u_1}{\partial n} + \cos \alpha \frac{\partial v_1}{\partial n} \right) + \sin \alpha \left(\sin \alpha \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \cos \alpha \frac{\partial v_1}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial p_1}{\partial \tau} =$$

$$= g \left(E_\tau^\circ - N_* \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} \right) \quad (1.8)$$

Здесь α — угол между нормалью n к линии Γ и осью x .

Составляя разность уравнений (1.8), записанных для двух близких к A точек, соответственно расположенных справа и слева от A , получаем

$$R \cos \alpha = \left\{ g \left(E_\tau^\circ - N_* \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} \right) \right\}, \quad R = \cos \alpha \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial n} \right\} + \sin \alpha \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial n} \right\}$$

С другой стороны, легко убедиться в выполнении равенства

$$\{\omega\} = \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right\} = \cos \alpha \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial n} \right\} + \sin \alpha \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial n} \right\} = R \quad (1.9)$$

Таким образом, имеем

$$\{\omega\} = \frac{1}{\cos \alpha} \left\{ g \left(E_\tau^\circ - N_* \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} \right) \right\} \quad (1.10)$$

Так как заряд в областях 1 и 3 равен нулю, а $\omega = 0$ в области 1, то из (1.10) находим

$$\omega_{\Gamma_1}^- = 0, \quad \omega_{\Gamma_1}^+ = \beta_1(y), \quad \{\omega\}_2 = -\beta_2(y) \quad (1.11)$$

$$\beta_1(y) = \frac{g(y)}{(\cos \alpha)_1} \left(E_{\tau}^{\circ} - N_* \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} \right)_1^+$$

$$\beta_2(y) = \frac{g(y)}{(\cos \alpha)_2} \left(E_{\tau}^{\circ} - N_* \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} \right)_2^- \quad \left((\operatorname{tg} \alpha)_i = \frac{df_i}{dy} \quad (i=1,2) \right)$$

(Индексы 1 и 2 — значения величин на линиях Γ_1 и Γ_2 .)

Найдем теперь связь между разрывами производных поперечной скорости v_1 . Воспользовавшись уравнением неразрывности, получаем

$$\left\{ \frac{\partial u_1}{\partial y} \right\} + \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha \left[\cos \alpha \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial x} \right\} - \sin \alpha \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial y} \right\} \right] = 0$$

Подставляя это выражение в формулу (1.10), имеем

$$(1 + \sin^2 \alpha) \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial x} \right\} - \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial y} \right\} = \frac{1}{\cos \alpha} \left\{ g \left(E_{\tau}^{\circ} - N_* \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} \right) \right\} \quad (1.12)$$

Заметим, что во многих случаях функции $\beta_1(y)$ и $\beta_2(y)$ обращаются в нуль. Например, это имеет место, если потенциалы вдоль Γ_i остаются постоянными и одновременно Γ_1 и Γ_2 выполняют функцию электродов, создающих внешнее электрическое поле E° .

Обратимся теперь к полученным ранее системам уравнений (1.4) и (1.5). Первая из них служит для определения индуцированного электрического потенциала в нулевом приближении $\varphi_0 = \varphi_0(x, y)$. Эта электростатическая задача требует сшивания соответствующих решений для области течения и окружающего пространства¹.

Из системы (1.5) находятся гидродинамические параметры. Составляя разность первого и второго уравнений в системе (1.5), соответственно проинтегрировав по y и x , и вводя согласно уравнению неразрывности функцию тока $\psi(x, y)$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = - \frac{dg}{dy} \left(E_x^{\circ} - N_* \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = - \Delta \psi \quad \left(u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_1 = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

При выводе соотношения (1.13) было использовано уравнение $\operatorname{rot} E = 0$.

Уравнения (1.13) и условия (1.10—1.12) дают возможность получить системы уравнений (1.13) как относительно функции тока ψ , так и поперечной скорости v_1 . Имеем

в области 1

$$\Delta \psi = 0, \quad \Delta v_1 = 0$$

в области 2

$$\Delta \psi = \frac{dg}{dy} \int_{f_1(y)}^x \Lambda dx - \beta_1(y), \quad \Delta v_1 = - \frac{dg}{dy} \Lambda \quad (1.14)$$

¹ В данной статье решения системы (1.4) не рассматриваются.

в области \mathcal{Z}

$$\Delta \psi = \frac{dg}{dy} \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} \Lambda dx + \beta_2(y) - \beta_1(y) = T(y), \quad \Delta v_1 = 0$$

$$(\Lambda = E_x^\circ - N_* \partial \varphi_0 / \partial x)$$

$$\psi = 0, \quad v_1 = 0 \quad (y = 0, y = 1)$$

$$\left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} = 0, \quad \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} = 0 \quad \text{на } \Gamma_i \quad (i=1, 2)$$

Условия шивания решений для v_1 на линиях Γ_i даются формулами (1.12) и соотношением $\{v_1\} = 0$.

Заметим, что если эмиттер и нейтрализатор будут электродами, то

$$T(y) = \frac{dg}{dy} (V^\circ - N_* V^{\circ\circ}), \quad V^\circ = \varphi_{\Gamma_1}^\circ - \varphi_{\Gamma_2}^\circ, \quad V^{\circ\circ} = (\varphi_0)_{\Gamma_2} - (\varphi_0)_{\Gamma_1} \quad (1.15)$$

Здесь V° — заданная разность потенциалов между эмиттером и нейтрализатором (внешнее электрическое поле), а $V^{\circ\circ}$ — индуцируемая (в первом приближении) разность потенциалов между нейтрализатором и эмиттером.

2. Решение систем (1.14) без труда может быть построено разложением в тригонометрические ряды. Интересным свойством этих систем является возможность определения параметров за зоной 2 с помощью простого обыкновенного дифференциального уравнения [6]. Действительно, из последнего уравнения для ψ в системе (1.14) для больших находим

$$\psi^+ = \psi^+(y), \quad v^+ = 0; \quad \frac{du_1^+}{dy} = T(y), \quad \int_0^1 u_1^+(y) dy = 0 \quad (2.1)$$

Верхним индексом плюс здесь и в дальнейшем обозначаются параметры, соответствующие псевдоразвитому течению (т. е. реализующиеся в области \mathcal{Z} на достаточно большом (практически равном калибру канала) расстоянии от зоны 2).

Интегрируя уравнение (2.1), получаем

$$u_1^+(y) = \int_0^y T(y) dy - \int_0^1 \left(\int_0^y T(y) dy \right) dy \quad (2.2)$$

Если выполняется соотношение (1.15), то из (2.2) находим

$$u_1^+ = (V^\circ - N_* V^{\circ\circ}) \Phi(y), \quad \Phi(y) = g(y) - \int_0^1 g(y) dy \quad (2.3)$$

Фиг. 2

На фиг. 2 показан профиль скорости псевдоразвитого течения (величина $\Phi(y)$), соответствующий произвольному начальному распределению заряда $g(y)$.

Для определения давления в нижнем по потоку участке зоны 3 проинтегрируем первое уравнение в (1.5) по x в пределах $(-\infty, x)$, где x принадлежит области псевдоразвитого течения. Учитывая условия $u_1 = 0$

и $p_1 = 0$ при $x = -\infty$ и соотношения (1.6), находим

$$u_1^+ + p_1^+ = g(y) \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} \Lambda dx \quad \left(\Lambda(x, y) = E_x^\circ - N_* \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) \quad (2.4)$$

Так как $v_1^+ = 0$, то согласно третьему уравнению в (1.5) получаем $\partial p_1^+ / \partial y = 0$. Таким образом, $p_1^+ = \text{const}$. Учитывая, что средняя величина u_1^+ по сечению канала равна нулю, из (2.4) находим

$$p_1^+ = \int_0^1 g(y) \left(\int_{f_1(y)}^{f_2(y)} \Lambda dx \right) dy \quad (2.5)$$

Формулы (2.4) и (2.5) можно также рассматривать как другое представление функции $u_1^+ = u_1^+(y)$. Нетрудно убедиться в полной эквивалентности соотношений (2.4) — (2.5) и (2.2).

Если потенциалы на контурах Γ_1 и Γ_2 постоянны, то

$$p_1^+ = (V^\circ - N_* V^{\circ\circ}) \int_0^1 g(y) dy \quad (2.6)$$

Таким образом, формулы (1.7), (2.3) и (2.6) дают возможность рассчитывать все характеристики за зоной действия электростатических сил.

3. В качестве примера решения систем двумерных уравнений (1.14) рассмотрим случай, когда индуцированным электрическим полем можно пренебречь ($N_* \ll 1$), эмиттер и нейтрализатор имеют постоянные по длине потенциалы и установлены перпендикулярно к невозмущенному потоку в сечениях $x = 0$ и $x = l$, а внешнее осевое электрическое поле однородно: $\Lambda \equiv 1$.

При этих условиях краевая задача состоит в решении системы уравнений (1.14) для v_1 (в случае $\Lambda = 1$) при следующих соотношениях на контурах Γ_i (см. (1.6) и (1.12)):

$$\{v_1\} = 0, \quad \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial x} \right\} = 0 \quad (x = 0, x = l) \quad (3.1)$$

Соответствующее решение имеет вид

$$v_1 = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n a_n}{n^2} e^{n\pi x} \sin n\pi y \quad (x < 0) \quad (3.2)$$

$$v_1 = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2} (b_n \operatorname{ch} n\pi x + a_n \operatorname{sh} n\pi x - 2) \sin n\pi y \quad (0 < x < l)$$

$$v_1 = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n d_n}{n^2} e^{-n\pi x} \sin n\pi y \quad (x > l)$$

$$a_n = -(1 - e^{-n\pi l}), \quad b_n = 1 + e^{-n\pi l}$$

$$d_n = 1 - e^{n\pi l}, \quad \gamma_n = -2 \int_0^1 \frac{dg}{dy} \sin n\pi y dy$$

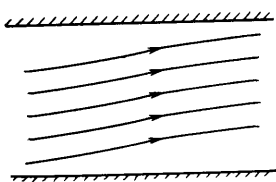
Если $l > 1$, то согласно (3.2) в центре области 2 поперечная скорость практически перестает зависеть от x и течение описывается соотношениями

$$u_1 = x \left[- \int_0^1 g dy + g(y) \right], \quad v_1 = y \int_0^1 g dy - \int_0^y g dy \quad (3.3)$$

При приближении к сечению $x = l$ скорость v_1 опять начинает сильно зависеть от x ; далее в зоне 3 при достаточно больших x имеем $v_1 \rightarrow 0$.

Линии тока в центре области 2 удовлетворяют уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{Nv_1 + \dots}{1 + Nu_1 + \dots} \approx Nv_1 + \dots, \quad N_1 x = \int \frac{dy}{v_1(y)} + \text{const}$$



Фиг. 3

Если, например, $g(y) = y$, то, учитывая полученные выше формулы (2.3), (2.5) и (3.3), находим

$$u_1 = x(y - 1/2), \quad v_1 = 1/2 y(1 - y)$$

(в центре зоны 2)

$$u_1^+ = l(y - 1/2), \quad v_1^+ = 0, \quad p_1^+ = 1/2 l$$

(псевдоразвитое течение)

Соответствующее размерное увеличение давления в канале равно $\rho U^2 N l / 2$. В рассматриваемом случае устройство работает как электрогидродинамический насос.

Линии тока в центре зоны 2 схематично изображены на фиг. 3.

4. Полученные выше результаты с помощью [6] могут без труда быть обобщены на случай движения униполярно заряженной жидкости в цилиндрическом канале $|x| < \infty$, $0 < r < 1$. В качестве примера рассмотрим движение при условиях, сформулированных в начале п. 3. Для определения возмущенной скорости v_1 необходимо решить следующую систему уравнений:

$$L(v_1) = 0 \quad (x < 0), \quad L(v_1) = - \frac{dq}{dr} \quad (0 < x < l)$$

$$L(v) = 0 \quad (x > l)$$

$$L(v_1) = \frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r^2} \quad (4.1)$$

$$v_1 = 0 \quad (r = 0, r = 1)$$

$$\{v_1\} = 0, \quad \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial x} \right\} = 0 \quad (x = 0, x = l)$$

Решение системы (4.1) имеет следующий вид:

$$v_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n a_n}{\chi_n^2} e^{\chi_n x} J_1(\chi_n r) \quad (x < 0) \quad (4.2)$$

$$v_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\chi_n} (b_n \text{ch}(\chi_n x) + a_n \text{sh}(\chi_n x) - 2) J_1(\chi_n r) \quad (0 < x < l)$$

$$v_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n d_n}{\chi_n^2} e^{-\chi_n x} J_1(\chi_n r) \quad (x > l)$$

Здесь $J_1(z)$ и $J_2(z)$ — цилиндрические функции первого рода (соответственно первого и второго порядков), а χ_n — корни уравнения $J_1(z) = 0$.

$$a_n = -(1 - e^{-\chi_n l}), \quad b_n = 1 + e^{-\chi_n l}$$

$$d_n = 1 - e^{\chi_n l}, \quad c_n^2 = 1/2 J_2^2(\chi_n)$$

$$\gamma_n = -\frac{1}{c_n^2} \int_0^1 \frac{dq}{dr} J_1(\chi_n r) r dr$$

Характеристики соответствующего псевдоразвитого течения определяются формулами

$$u_1^+ = l \left(g(r) - 2 \int_0^1 g(r) r dr \right), \quad p_1^+ = 2l \int_0^1 g(r) r dr$$

Поступило 24 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Бортников Ю. С., Рубашов И. Б. Одномерные течения в электрогазодинамике. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6.
2. Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е. Одномерные течения в электрогидродинамике. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
3. Копылов Г. Н. Ламинарное течение заряженной жидкости в плоской трубе под действием внешнего электростатического поля. Ж. техн. физ., 1963, т. 32, вып. 11.
4. Ушаков В. В. Приближенное решение уравнений плоской ламинарной электрогидродинамической струи. В сб.: «Некоторые вопросы аэродинамики и электрогидродинамика», вып. 2, Киев КИИГА, 1966.
5. Stuetzer O. Magnetohydrodynamics and electrohydrodynamics. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 5.
6. Вагажин А. Б. Определение параметров дозвукового течения в канале за зоной осевой неоднородности слабых возмущающих сил и источников тепла. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.