

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ О СМЕШАННОМ ТЕЧЕНИИ В СОПЛАХ

М. Я. ИВАНОВ, А. Н. КРАЙКО

(Москва)

Большая часть известных результатов теории сопла Лавала относится к обратной задаче, в которой задается не контур сопла, а распределение скорости на некоторой линии (обычно на оси симметрии). В итоге многочисленных исследований, основные результаты которых и обширная библиография приведены в монографии О. С. Рыжова [1], были выявлены многие важные свойства трансзвуковых течений. В последнее время решение обратной задачи использовалось не только для анализа качественных особенностей, но и для построения интересных для практики сопел с довольно резким изменением угла наклона образующей. В этой связи отметим работу У. Г. Пирумова [2], а также исследования Гопкинса и Хилла [3, 4]. Последние, кроме классического сопла Лавала, рассмотрели ряд схем сопел с центральным телом. У. Г. Пирумов применил для решения обратной задачи специально разработанный численный метод (напомним, что в дозвуковой части сопла соответствующая задача Коши некорректна), в то время как Гопкинс и Хилл использовали разложение в ряды, которому предшествовала некоторая замена переменных.

Работ, посвященных решению прямой задачи о смешанном течении в соплах, значительно меньше. Так, численные методы применяли А. Н. Алихашкин, А. П. Фаворский и П. И. Чушкин [5], А. П. Фаворский [6] и Ю. М. Данилов [7], причем в первых двух работах использовался метод интегральных соотношений. Наконец, в последнее время интенсивно разрабатывался метод разложения по степеням $\epsilon^{1/2}$, где ϵ — отношение радиуса (или полуширины) сопла к радиусу кривизны стенки, вычисленным в критическом сечении. Для исследования течения в классических соплах Лавала такие разложения применялись Холлом [8] и Клителем и Кваном [9], а в соплах с центральным телом — Муром [10] и Муром и Холлом [11]. Заметим, что метод разложения по $\epsilon^{1/2}$ пригоден лишь в тех случаях, когда радиусы кривизны стенки велики.

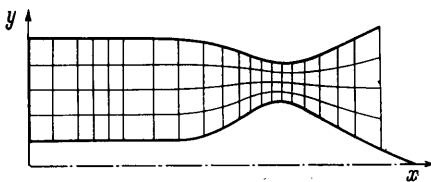
Ниже решение прямой задачи о смешанном течении в соплах проведено методом установления. При этом чрезвычайно сложная краевая задача для эллиптического-гиперболической системы с двумя независимыми переменными сводится к задаче Коши (вернее, к смешанной задаче с начальными данными в ограниченной двумерной области и граничными условиями, независимыми от третьей переменной) для гиперболической системы от трех независимых переменных. Интегрирование уравнений, описывающих двумерное (плоское или осесимметричное) нестационарное течение, осуществлялось при помощи разностной схемы С. К. Годунова, А. В. Забродина и Г. П. Прокопова [12]. Кроме классического сопла Лавала, рассчитывалось несколько типов сопел с центральным телом. Контуры дозвуковых частей сопел были либо замкнутыми (конечная «камера сгорания»), либо разомкнутыми (сопло примыкает к бесконечной цилиндрической трубе). В первом случае течение осуществляется за счет объемных источников массы и энергии, которые вводятся в некоторой фиксированной части камеры сгорания. Во втором случае источники массы и энергии отсутствуют, а на некоторой плоскости, перпендикулярной оси сопла и расположенной на конечном расстоянии от критического сечения, ставится граничное условие, которое при удалении указанной плоскости в бесконечность переходит в условие равномерности потока.

1. Рассмотрим течение невязкого и нетеплопроводного газа в плоском ($\nu = 0$) или осесимметричном ($\nu = 1$) сопле. Оси координат x и y , которые в осесимметричном случае расположены в меридианальной плоскости, выберем, как показано на фиг. 1, где жирной линией изображен контур стенки.

Пусть $y = y_+(x)$ — уравнение образующей стенки, удаленной от оси симметрии (верхней стенки на фиг. 1), а $y = y_-(x)$ — уравнение образующей стенки центрального тела. Для классического сопла Лавала центральное тело отсутствует и $y_-(x) \equiv 0$.

В изображенном на фиг. 1 случае конечной камеры сгорания течение осуществляется за счет введения в поток объемных источников массы и энергии с интенсивностями q_p и q_e соответственно, причем на всей стенке сопла, включая ее торцовую часть, реализуется условие непротекания. При этом будем полагать, что источники массы и энергии занимают весь объем сопла соответственно при $x < l_p$ и $x < l_e$, и, кроме того, в указанных областях $q_p \equiv \text{const}$ и $q_e \equiv \text{const}$. Принятую схему течения можно рассматривать как некоторую модель процесса в случае, когда горючее и окислитель подаются в камеру сгорания в жидком виде. Тогда источники массы газа отвечают испарению капель, а источники энергии — выделению тепла при горении. В соответствии с этим естественно положить, что $l_e \geq l_p$.

Если торцовая стенка отсутствует, то необходимость в источниках массы и энергии отпадает. Здесь будем считать, что сопло плавно (что, впрочем, для используемого метода несущественно) примыкает к бесконечной цилиндрической трубе с



Фиг. 1

$y_+(x) \equiv \text{const}$ и $y_-(x) \equiv \text{const}$, а энтальпия торможения и энтропия газа известны. При этом на стационарном режиме при $x = -\infty$ реализуется равномерный поступательный поток, скорость которого, а следовательно и расход газа через сопло, находятся в процессе решения.

В качестве граничного условия при $x = -\infty$ для стационарного течения можно использовать равенство (u — проекция скорости на ось x)

$$\partial u / \partial x = 0 \quad (1.1)$$

которое в случае постоянства энтропии и энтальпии торможения эквивалентно условию равномерности потока. При численном решении, когда граничное условие ставится не при $x = -\infty$, а в некотором конечном сечении цилиндрического участка $x = x_0$, условие (1.1) оказывается особенно удобным.

В задаче с замкнутым контуром расход газа на стационарном режиме равен интенсивности источников q_p , проинтегрированной по соответствующему объему, и поэтому известен, а в результате решения определяются прочие параметры газа, в частности, его энтропия и энтальпия торможения. Так как в этом случае разные линии тока проходят в области источников энергии разным путем, то в итоге энтропия и энтальпия торможения разных частиц газа оказываются различными. Однако увеличение (при фиксированных l_p и l_e) длины цилиндрического участка камеры приводит к тому, что и здесь поток в области, свободной от источников, становится безвихревым.

2. Пусть t — время, p — давление, ρ — плотность, e — удельная внутренняя энергия, а v — компонента скорости газа на ось y . При этом $e = e(p, \rho)$, в частности, для совершенного газа с постоянным показателем адиабаты κ имеем $e = p / (\kappa - 1) \rho$.

Будем считать, что интенсивности источников массы и энергии введены так, что уравнения рассматриваемого нестационарного течения газа за-

писываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho y^v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u y^v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v y^v}{\partial y} &= q_0 y^v \\ \frac{\partial \rho u y^v}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho u^2) y^v}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v y^v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \rho v y^v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v y^v}{\partial x} + \frac{\partial (p + \rho v^2) y^v}{\partial y} &= v y^{v-1} p \\ \frac{\partial \rho (2e + w^2)}{\partial t} + \frac{\partial \rho u (2i + w^2) y^v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v (2i + w^2)}{\partial y} &= 2q_e y^v \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$(w^2 = u^2 + v^2, \quad i = e + p / \rho)$$

где w — модуль скорости, а i — удельная энтальпия газа.

Заметим, что в (2.1) не учитывается, в частности, приращение количества движения газа, вызванное наличием источников. Это эквивалентно предположению, что осредненные по элементарному объему компоненты скорости «выпрыскиваемого» газа равны нулю.

Все величины удобно считать безразмерными. Припишем размерным параметрам верхний индекс — градус, и пусть l° и $u^{*\circ}$ и ρ^* — константы с размерностями длины, скорости и плотности. Приведение к безразмерному виду достигается отношением пространственных координат к l° , времени — к $l^\circ / u^{*\circ}$, скорости — к $u^{*\circ}$, плотности — к $\rho^{*\circ}$, давления — к $\rho^{*\circ} u^{*\circ 2}$, внутренней энергии и энтальпии — к $u^{*\circ 2}$, и наконец, интенсивностей источников массы и энергии — к $\rho^{*\circ} u^{*\circ} / l^\circ$ и к $\rho^{*\circ} u^{*\circ 3} / l^\circ$ соответственно. Если в качестве $u^{*\circ}$ и $\rho^{*\circ}$ взять $u^{*\circ} = (q_e^\circ / q_\rho^\circ)^{1/2}$ и $\rho^{*\circ} = q_\rho^\circ / u^{*\circ}$, то в (2.1) следует положить $q_\rho \equiv 1$ при $x < l_\rho$ и $q_\rho \equiv 0$ при $x > l_\rho$ и аналогично $q_e \equiv 1$ при $x < l_e$ и $q_e \equiv 0$ при $x > l_e$.

3. Решение задачи велось путем численного интегрирования (2.1) по разностной схеме работы [12]. При этом разбиение области течения в плоскости xy в продольном направлении производилось на N слоев отрезками вертикальных прямых, которым приписывались номера $n = 0, 1, \dots, N$. В местах, где ожидаются большие градиенты параметров (например, в районе критического сечения), разбиение делалось более густым. Кроме того, как показали расчеты, по одному «тонкому» слою следует помещать также слева или справа от линий $x = l_\rho$ и $x = l_e$, которые включаются в число границ разбиения. Слои нумеруются слева направо, и каждому из них ставится в соответствие число $n - 1/2$, где $n = 1, \dots, N$.

Вертикальные границы слоев разбиваются по y на K равных отрезков, и точки разбиения соединяются, как показано на фиг. 1. Получающиеся слои и границы нумеруются снизу вверх, причем слоям приписываются номера $k - 1/2$, где $k = 1, \dots, K$, а границам — номера $k = 0, 1, \dots, K$. Таким образом, каждой четырехугольной ячейке ставится в соответствие два числа $(n - 1/2, k - 1/2)$. Средним по ячейке параметрам в момент t присваиваются нижние индексы ($\rho_{n-1/2, k-1/2}$, $u_{n-1/2, k-1/2}$ и т. д.), а в момент $t + \tau$, где τ — шаг по времени, — верхние индексы ($\rho^{n-1/2, k-1/2}$, $u^{n-1/2, k-1/2}$ и т. д.). Параметрам на отрезках границ, разделяющих ячейки, приписываются один целый и один полужелый индекс, причем их численные значения и порядок определяются положением рассматриваемых участков границ (например, на вертикальных границах первые индексы всегда целые, а вторые — полужелые).

Построение расчетной схемы, при помощи которой по величинам с нижними полужелыми индексами (т. е. в момент t) определяются величины с такими же верхними индексами (т. е. в момент $t + \tau$), проводится в соответствии с [12, 13]. Для этого уравнения системы (2.1) интегрируются в пространстве xyt по объемчикам, основаниями которых служат по-

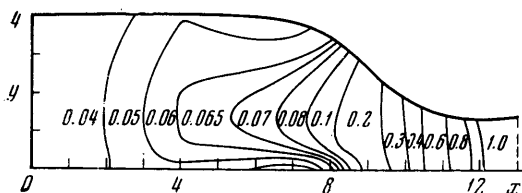
лученные выше четырехугольные ячейки, а высота равна τ . Отсюда после интегрирования по частям, применения к интегралам по границам теоремы о среднем и использования обычных допущений о средних от произведений получим уравнения, связывающие величины с нижними и верхними полуцелыми индексами. Так, например, из первого уравнения (2.1) найдем

$$\begin{aligned} \rho^{n-1/2, k-1/2} = & \rho_{n-1/2, k-1/2} - \frac{\tau}{\alpha_{n-1/2, k-1/2}} \times \\ & \times \left[(RUy^v)_{n-1, k-1/2} \frac{\Delta_{n-1}}{h_{n-1/2}} - (RUy^v)_{n, k-1/2} \frac{\Delta_n}{h_{n-1/2}} + \right. \\ & + (RUy^v)_{n-1/2, k-1} \frac{y_{n-1, k-1} - y_{n, k-1}}{h_{n-1/2}} - (RUy^v)_{n-1/2, k} \frac{y_{n-1, k} - y_{n, k}}{h_{n-1/2}} + \\ & \left. + (RVy^v)_{n-1/2, k-1} - (RVy^v)_{n-1/2, k} \right] + q_0 \tau \quad (\alpha_{ij} = y_{ij}^v \Delta_i) \end{aligned}$$

Здесь R , U и V — осредненные по соответствующим вертикальным границам значения ρ , u и v ; $\Delta = (y_+ - y_-) / K$ и $h_{n-1/2} = x_n - x_{n-1}$. Последние две величины определяют размер ячеек в плоскости xy .

Для определения R , U , ... на каждой границе через параметры с нижними полуцелыми индексами (т. е. в момент времени t) рассматривается распад произвольного одномерного разрыва, начальные параметры с разных сторон которого совпадают с параметрами в ячейках, примыкающих к данному отрезку границы [12, 13]. Для расчета R , U , ... на стенке вводятся некоторые вспомогательные ячейки, симметричные относительно стенки. Параметры газа в этих ячейках выбираются так, что в результате распада разрыва скорость на стенке удовлетворяет условию непротекания. Аналогичным образом рассматриваются и другие возможные границы.

Все необходимые расчетные формулы приведены в [12, 13]. Там же указано, что получающаяся в результате явная разностная схема на гладких решениях аппроксимирует систему (2.1) и соответствующие граничные условия с первым порядком аппроксимации. После вычисления всех параметров с верхними полуцелыми индексами эти параметры рассматриваются в качестве начальных, и делается следующий шаг по времени. В соответствии с условием устойчивости шаг по времени τ выбирается таким, чтобы для всех ячеек плоскости xy волны, образующиеся при распаде каждого разрыва, не успевали за время τ достигнуть противоположных границ ячеек. При решении стационарной задачи данная процедура повторяется до тех пор, пока в пределах заданной точности поля параметров течения не перестают зависеть от t .



Фиг. 2

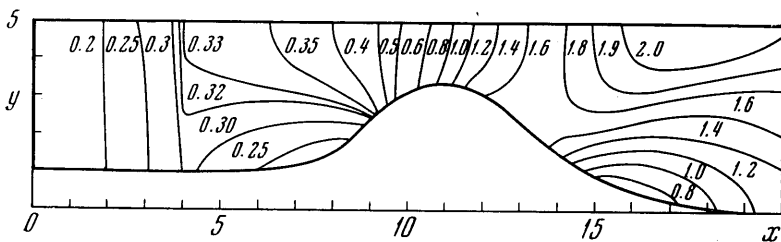
этом для вертикальной составляющей скорости берется линейное распределение $v = a + by$, где a и b — функции x , определенные из условий непротекания на стенках с использованием $u = u(x)$ одномерного приближения. Для сопел сложной конфигурации расчет проводится в два этапа. Сначала при помощи описанного выше метода при одной продольной полосе ($K = 1$) рассчитывается одномерное течение, начинающееся из состояния покоя, когда $p = \text{const}$, $\rho = \text{const}$ и $u = v = 0$. Полученные в результате установления одномерные стационарные распределения p , ρ и u , дополненные линейным по y распределением v , используются затем в качестве начальных данных для расчета двумерного потока. При рассмотрении сверхзвуковых режимов давление на срезе сопла поддерживается настолько низким, чтобы в результате установления в выходном сечении реализовывалось сверхзвуковое истечение.

4. Изложенный метод был применен для расчета смешанного стационарного течения совершенного газа с $\kappa = 1.4$ в осесимметричных соплах разных типов. Некоторые результаты расчетов приведены на фиг. 2—7.

Первые четыре фигуры относятся к соплам с замкнутым контуром, образующие которых составлены из плавно сопрягающихся отрезков прямых и дуг окружностей. В начальных цилиндрических участках этих сопел ($x \leq 6$) располагались источники массы ($l_0 = 2$) и энергии ($l_e = 4$). Тонкими кривыми на фиг. 2—5 изображены линии постоянства чисел Маха, численные значения которых приведены рядом с кривыми.

Первое сопло (фиг. 2) представляет собой классическое сопло Лавалья. На его цилиндрическом участке $y_+(x) \equiv 4$, а криволинейная часть контура составлена из двух дуг окружностей одинакового радиуса $r = 4$, сопрягающихся в точке, где $y_+' \equiv dy_+/dx = -1$. Расчет течения в этом сопле, а также в соплах Лавалья с разомкнутым контуром, изображенных на фиг. 6 и 7, велся при $N = 41$ и $K = 12$.

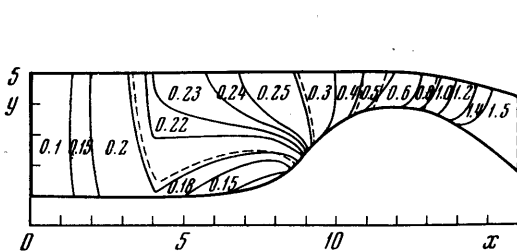
На цилиндрических участках сопел с центральным телом, приведенных на фиг. 3—5, $y_-(x) \equiv 1$, а $y_+(x) \equiv 5$. При этом криволинейная часть контура централь-



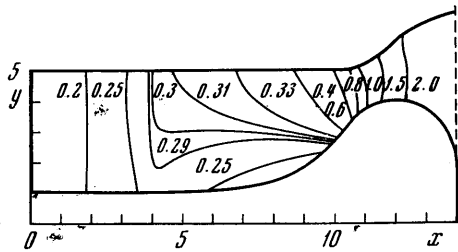
Фиг. 3

ного тела сопла с цилиндрической обечайкой (фиг. 3) состоит из трех следующих один за другим отрезков дуг окружностей, радиусы которых равны 4, 2.43 и 8.5, а центры лежат на вертикальных прямых $x = 6, 11$ и 19 соответственно. При $x = 19$ образующая центрального тела касается оси симметрии. Расчет проводился при $N = 60$ и $K = 8$.

Интересная особенность течения в сопле с цилиндрической обечайкой состоит в образовании на центральном теле местной дозвуковой зоны. Торможение потока в данном случае вызвано его поворотом против часовой стрелки и уменьшением



Фиг. 4



Фиг. 5

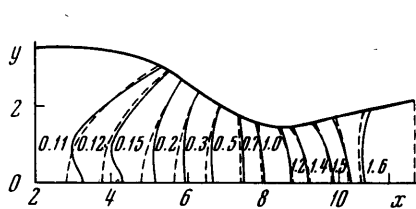
вблизи поверхности тела площади кольцевой трубки тока. Известно [14], что при сверхзвуковом обтекании произвольных задних остроконечных тел вращения второй эффект становится определяющим. В пределах точности расчета торможение газа происходило без образования ударных волн.

Криволинейная образующая верхней стенки сопла с прикрытой обечайкой (фиг. 4) образована отрезком дуги окружности радиуса $r = 11$ и с центром на прямой $x = 11$ и отрезком касательной с $y_+'(x) \equiv -0.2$. Криволинейная часть контура центрального тела состоит из отрезков двух дуг окружностей одинакового радиуса $r = 4$ и центрами, расположенными при $x = 6$ и $x = 12$, и замыкающего прямолинейного участка, на котором $y_-'(x) \equiv -0.8$. Для оценки точности результатов расчет течения в этом сопле велся при двух различных разбиениях. Сплошными линиями на фиг. 4 даны линии $M = \text{const}$, полученные при $N = 60$ и $K = 8$, а штриховыми — линии $M = \text{const}$, полученные при $N = 30$ и $K = 4$, т. е. при четырехкратном уменьшении числа расчетных ячеек.

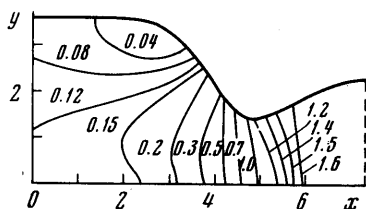
Тарельчатое сопло (фиг. 5) отличается от двух предыдущих сопел с центральным телом более сложной конфигурацией стенок в области критического сечения. Криволинейная часть его центрального тела состоит из двух отрезков дуг окружностей радиусов $r = 5.5$ и 2 , абсциссы центров которых равны соответственно 6 и 12 . Криволинейная часть обечайки образована дугами окружностей с $r = 2$ и 5 и центрами, лежащими на прямых $x = 10$ и $x = 15$. Расчет течения в тарельчатом сопле проводился при $N = 40$ и $K = 8$.

Некоторые результаты расчета течения в соплах Лавала с разомкнутой дозвуковой частью приведены на фиг. 6 и 7, где наряду с образующими сопел нанесены линии постоянства λ — отношения модуля скорости w к критической скорости звука (численные значения λ даны рядом с соответствующими кривыми). Энтропия и энтальпия торможения (а следовательно, и критическая скорость звука) на входе в сопло принимались постоянными. Поэтому здесь в отличие от случаев, рассмотренных ранее, кривые $\lambda = \text{const}$ совпадают с линиями уровня числа Маха, давления и плотности.

Для вычисления R , U , ... на левой границе каждой ячейки, примыкающей к начальному сечению ($x = 0$ на фиг. 6 и 7), слева от границы строится симметричная



Фиг. 6



Фиг. 7

ячейка, $u_{-1/2, k-1/2}$ в которой в соответствии с (1.1) кладется равным $w_{1/2, k-1/2}$. Затем $v_{-1/2, k-1/2}$ вычисляется по $v_{1/2, k-1/2}$ и известному распределению $w_{1/2, k-1/2}$ в соответствии с уравнением отсутствия вихря. Наконец, $p_{-1/2, k-1/2}$ и $\rho_{-1/2, k-1/2}$ определяются по найденным u и v и заданным (постоянным для всех ячеек) энтропии и энтальпии торможения. Как показали расчеты, результаты практически не изменяются, если $v_{-1/2, k-1/2}$ находить не из уравнения отсутствия вихря, а считать равным $v_{1/2, k-1/2}$.

Контур сопла фиг. 6 близок к контуру одного из сопел работы [2], определенного там как сопло с $\psi = 0.06$. Небольшое отличие заключается в том, что у сопла, изображенного на фиг. 6, сужающаяся часть примыкает слева к бесконечной цилиндрической трубе, а не к слегка расширяющемуся участку, как в [2]. Хотя это отличие и невелико (в пределах рассмотренного диапазона оси x относительные отклонения по y и по площади поперечного сечения примерно равны 0.006 и 0.012), однако его следует иметь в виду при сравнении полей λ , полученных в данной работе и в [2] и представленных на фиг. 6 соответственно сплошными и штриховыми линиями уровня.

Линии $\lambda = \text{const}$ фиг. 6 интересно также сравнить с аналогичными линиями более крутого сопла фиг. 7. Его контур получен двукратным уменьшением абсцисс точек контура фиг. 6 при неизменных значениях их ординат. Как видно из указанных фигур, подобная деформация существенно увеличивает неравномерность потока. Так если за меру неравномерности взять отношение максимальной и минимальной величин u при $x = 0$, то переход к более крутому соплу увеличивает неравномерность с 1.08 до 1.5 . В то же время последнее обстоятельство показывает, что в случае фиг. 7 для получения более правильных результатов необходимо рассматривать цилиндрический участок большей длины.

В процессе расчета течения проводился интегральный контроль по расходу, энергии и импульсу. Соответствующие относительные ошибки Δm , ΔE и ΔI определялись следующим образом:

$$\Delta m = (m - m_0) / m_0, \quad \Delta E = (E - E_0) / E_0, \quad \Delta I = (I - I_0 - \chi) / I_0$$

где m , E и I — потоки массы, энергии и импульса через сечение сопла при произвольном x ; индекс 0 приписан аналогичным величинам в некотором начальном сечении; χ — интеграл сил давления, действующих на участок стенки от начального до текущего сечения. Для сопел фиг. 2–5 за начальное сечение бралась правая граница области выделения энергии ($x = l_e = 4$), а для сопел фиг. 6 и 7 — сечение $x = 0$. При этом на стационарном режиме указанные ошибки по модулю составляли 0.004 – 0.015 по расходу, 0.002 – 0.012 по энергии и 0.0003 – 0.002 по импульсу.

Вычисления проводились на ЭВМ «М-220» и расчет до выхода на стационарный режим требовал от 3 до 6 час. Установление в соплах с замкнутым контуром происходило быстрее, чем в соплах с разомкнутой дозвуковой частью, где наиболее медленно устанавливается область малых дозвуковых скоростей. Отметим, что использованная разностная схема несмотря на кажущуюся сложность весьма проста при реализации на ЭВМ, причем время счета одного слоя существенно меньше, чем, например, для модифицированной Моретти и Аббеттом схемы Лакса — Вендрова [15].

Авторы признательны И. Ю. Браиловской за ценные советы при выборе разностной схемы, У. Г. Пирумову, любезно предоставившему результаты своих расчетов, и А. М. Конкиной и Л. П. Фроловой за помощь в работе.

Поступило 6 II 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжов О. С. Исследование трансзвуковых течений в соплах Лавала. Тр. ВЦ АН СССР, 1965.
2. Пирумов У. Г. Расчет течения в сопле Лавала. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2, стр. 10—22.
3. Hopkins D. F., Hill D. E. Effect of small radius of curvature on transonic flow in axisymmetric nozzles. AIAA Journal, 1966, vol. 3, No. 3, pp. 1337—1343.
4. Hopkins D. F., Hill D. E. Transonic flow in unconventional nozzles. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 5, pp. 838—842.
5. Алихашкин А. Н., Фаворский А. П., Чушкин П. И. О расчете течения в плоском сопле Лавала. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 6, стр. 1130—1134.
6. Фаворский А. П. Расчет сопел Лавала. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 5, стр. 955—959.
7. Данилов Ю. М. Об одном численном методе расчета сопла Лавала. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1966, вып. 92, стр. 66—71.
8. Hall I. M. Transonic flow in two-dimensional and axially-symmetric nozzles. Quart J. Mech. Appl. Math., 1962, vol. 15, pt 4, pp. 487—508.
9. Kliegel J. R., Quan V. Convergent-divergent nozzle flows. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 9, pp. 1728—1734.
10. Moore A. W. Transonic flow in two-dimensional and annular nozzles of arbitrary profile. ARC, Rep. and Mem, 1965, No. 3481.
11. Moore A. W., Hall I. M. Transonic flow in the throat region of an annular nozzle with arbitrary smooth profile. ARC, Rep. and Mem, 1965, No. 3480.
12. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отходящей ударной волной. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6, стр. 1020—1050.
13. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Матем. сб., 1959, т. 47 (89), вып. 3, стр. 271—306.
14. Никольский А. А. О течениях газа вблизи остроконечных задних кромок тел вращения. Сборник теоретических работ по аэродинамике, М., Оборонгиз, 1957, стр. 74—76.
15. Moretti G., Abbett M. A time-dependent computational method for blunt-body flows. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 12, pp. 2136—2141.