

ГИПЕРЗВУКОВАЯ СТРУЯ, ИСТЕКАЮЩАЯ В ПОКОЯЩУЮСЯ СРЕДУ ИЛИ В СПУТНЫЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ ПОТОК

Л. И. ЗАК

(Москва)

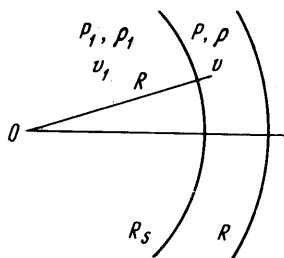
Расчет истекающих из сопла сверхзвуковых струй идеального термодинамически совершенного газа производился ранее во многих работах (например, работы [1, 2]) на основе численного метода характеристик. Здесь дано приближенное аналитическое решение задачи о сверхзвуковой струе, истекающей в затопленное пространство или в сверхзвуковой спутный поток.

1. Истечение сверхзвуковой струи в затопленное пространство. Рассмотрим сверхзвуковую струю, истекающую из расширяющегося сопла в пространство с заданным давлением p_a . Ограничимся случаем, когда $p_a \geq p_c$ (p_c — давление на срезе сопла), т. е. случаем расчетного или перерасширенного сопла. При таком истечении внутри струи возникает «бочкообразный» скачок уплотнения, и основная масса газа, истекающего из сопла, оказывается сосредоточенной в тонком слое между скачком и границей струи.

Если течение в сопле изоэнергетическое, скорость течения значительно превышает скорость звука и угол раствора сопла мал, то, как известно (см., например, [3]), после перехода от пространственной координаты x к времени t по формуле $x/V = t$ задача о стационарном гиперзвуковом истечении газа из сопла станет аналогичной задаче о нестационарном одномерном движении, возникающем при разлете цилиндрического объема или плоского слоя газа с заданными распределениями скорости, давления и плотности в пространстве с постоянным давлением p_a . Схематически картина такого движения изображена на фиг. 1, где $R_s(t)$ — ударная волна, $R_p(t)$ — поверхность, на которой задано постоянное давление.

За основные искомые функции примем расстояние R частиц от центра симметрии, плотность ρ и давление p . За независимые переменные примем время t и лагранжеву координату τ , определяемую следующим образом: τ есть момент совпадения частицы с поверхностью $R_s(t)$. Уравнения неразрывности, движения и энергии, описывающие движение газа в слое между ударной волной и ограничивающей газ поверхностью запишутся в виде

$$\begin{aligned} R^{v-1} \frac{\partial R}{\partial \tau} &= - \frac{\rho_1}{\rho} (v_1 - R_s) R_s^{v-1} \\ R^{v-1} \frac{\partial p}{\partial \tau} &= \rho_1 (v_1 - R_s) R_s^{v-1} \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{p}{\rho^v} &= 0, \quad \frac{\partial R}{\partial t} = v \end{aligned} \quad (1.1)$$



Фиг. 1

В этих уравнениях $\nu = 1, 2, 3$ соответственно для течений с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами, индексом 1 обозначены величины в газе перед прохождением им ударной волны, $R_s = R_s(\tau)$, $v_1 = v_1[R_s(\tau), \tau]$ и $\rho_1 = \rho_1[R_s(\tau), \tau]$. Предположив [3], что плотность газа ρ в слое между ударной волной и контактной поверхностью много больше, чем плотность ρ_1 перед ударной волной, будем искать решение системы (1.1) в виде следующих рядов по степеням малого параметра ε , характеризующего отношение плотностей газа перед ударной волной и за ней

$$R = R_0 + \varepsilon R_1' + \dots \quad p = p_0 + \varepsilon p_1' \dots, \quad \rho = \frac{\rho_0}{\varepsilon} + \rho_1' + \dots$$

$$(\varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1))$$

Для определения R_0 , p_0 и ρ_0 получаем систему уравнений

$$\frac{\partial R_0}{\partial \tau} = 0, \quad R_0^{\nu-1} \frac{\partial p_0}{\partial \tau} = \rho_1 (v_1 - R_s) R_s^{\nu-1} R_0'', \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = 0$$

интегрируя которую, находим

$$R_0 = R_0(t), \quad p_0 = \vartheta_0^\gamma(\tau) \rho_0^\gamma \quad (1.2)$$

$$R_0^{\nu-1} [p_0 - p''(t)] = R_0'' \int_{\tau_0}^{\tau} \rho_1 (v_1 - R_s) R_s^{\nu-1} d\tau$$

Функции R_1' , p_1' и ρ_1' удовлетворяют уравнениям

$$R_0^{\nu-1} \frac{\partial R_1'}{\partial \tau} = -\frac{\rho_1}{\rho_0} (v_1 - R_s) R_s^{\nu-1},$$

$$R_0^{\nu-1} \frac{\partial p_1'}{\partial \tau} = \rho_1 (v_1 - R_s) R_s^{\nu-1} \left[\frac{\partial^2 R_1'}{\partial t^2} - (\nu - 1) \frac{R_0''}{R_0} R_1' \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p_1'}{\rho_0} - \gamma \frac{\rho_1'}{\rho_0} \right) = 0$$

интегрирование которых дает

$$R_0^{\nu-1} [R_1' - R_1''(t)] = - \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\rho_1}{\rho_0} (v_1 - R_s) R_s^{\nu-1} d\tau$$

$$R_0^{\nu-1} [p_1' - p_1''(t)] = \int_{\tau_0}^{\tau} \left[\frac{\partial^2 R_1'}{\partial t^2} - (\nu - 1) \frac{R_0''}{R_0} R_1' \right] \rho_1 (v_1 - R_s) R_s^{\nu-1} d\tau \quad (1.3)$$

$$\frac{p_1'}{\rho_0} - \gamma \frac{\rho_1'}{\rho_0} = \vartheta_1(\tau)$$

В системах (1.2) и (1.3) $R_0(t)$, $\vartheta_0(\tau)$, $p''(t)$, $R_1''(t)$, $p_1''(t)$ и $\vartheta_1(\tau)$ — произвольные функции, τ_0 — нижний предел интегрирования при вычислении интегралов — может выбираться различно из соображений удобства написания формул. Произвольные функции определим из условий на ударной волне и на контактной поверхности. На ударной волне при $t = \tau$ и $R = R_s(t)$ из законов сохранения получаем

$$p_1 + \rho_1 (v_1 - R_s)^2 = p_s + \rho_s (v_s - R_s)^2$$

$$\rho_s = \rho_1 \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} A(\tau), \quad A(\tau) = \left[1 + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{a_1^2}{(v_1 - R_s)^2} \right]^{-1}$$

На граничной поверхности $R = R_p(t)$ должно выполняться условие $p = p_a$. После нахождения произвольных функций из этих условий первые уравнения в системах (1.2) и (1.3) можем записать в виде

$$p_a = p_1 + \rho_1 (v_1 - R_S \dot{})^2 - \frac{R_0''}{R_0^{\nu-1}} \int_{t_0}^t \rho_1 (v_1 - R_S \dot{}) R_S^{\nu-1} d\tau \quad (1.4)$$

$$R_1' = \frac{1}{R_0^{\nu-1}} \int_{\tau}^t \frac{\rho_1}{\rho_0} (v_1 - R_S \dot{}) R_S^{\nu-1} d\tau \quad (1.5)$$

$$\rho_0 = B^{-1}(\tau) [p_1 + \rho_1 (v_1 - R_S \dot{})^2 - \frac{R_0''}{R_0^{\nu-1}} \int_{\tau}^t \rho_1 (v_1 - R_S \dot{}) R_S^{\nu-1} d\tau]^{1/\gamma} \rho_1$$

$$B(\tau) = \{p_1(\tau) + \rho_1(\tau) [v_1(\tau) - R_S'(\tau)]^2\}^{1/\gamma} A^{-1}$$

В нулевом приближении по ε имеем $R_0 \equiv R_S$, поэтому уравнение (1.4) представляет собой интегродифференциальное уравнение относительно $R_S(t)$ — закона распространения ударной волны, причем для его решения необходимо знать ρ_1 и v_1 как функции времени.

Отметим при этом, что в ряде случаев, как указывается в экспериментальных [6] и теоретических [5] работах, при больших скоростях истечения сопло можно заменить эквивалентным сверхзвуковым источником. Примем, что течение в сопле с углом полураствора θ_0 представляет собой течение от источника и скорость газа при выходе из сопла близка к его максимальной скорости V_1 . Введем обозначения (1.6)

$$R = \frac{R_S}{R^0}, \quad t' = \frac{t}{t^0}, \quad K = \frac{p_a}{\rho_c V_1^2 \theta_0^2}, \quad K_1 = \frac{p_c}{\rho_c V_1^2 \theta_0^2} = \frac{1}{\gamma M_c^2 \theta_0^2}$$

тогда v_1 и ρ_1 можно представить в следующем виде:

$$v_1 = \frac{R}{t'} V_1 \theta_0, \quad \rho_1 = \rho_c \frac{1}{t'^{(\nu-1)}}$$

Опуская в дальнейшем штрихи при t , запишем уравнение (1.4) в безразмерном виде (1.7)

$$K = \frac{K_1}{t^{\nu(\nu-1)}} + \frac{1}{t^{\nu-1}} \left(\frac{R}{t} - R' \right)^2 - \frac{R''}{R^{\nu-1}} \int_1^R \frac{1}{\tau^{\nu-1}} \left(\frac{R}{\tau} - R' \right) R^{\nu-1} d\tau$$

Параметры K и K_1 будут параметрами подобия при истечении газа из сопла.

Таким образом, задача о расчете сверхзвуковой струи, истекающей в затопленное пространство свелась к интегрированию уравнения (1.7), после решения которого можно определить все остальные неизвестные функции.

Предположив, что R_S — форма скачка — есть нулевое приближение по ε для R , можно искать форму струи R_p по следующей формуле:

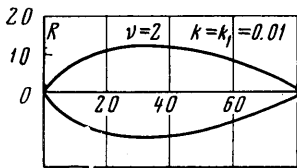
$$R_p = R + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{1}{R^{\nu-1}} \times \int_1^R \frac{R^{\nu-1}(\tau) c(\tau)}{D(t, \tau)} \left[\frac{K_1}{\tau^{\nu(\nu-1)}} + \frac{1}{\tau^{\nu-1}} c^2(\tau) \right]^{1/\gamma} \tau^{\nu-1} + \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{\tau^{(2-\nu)(\nu-1)} K_1}{c^2(\tau)} d\tau \quad (1.8)$$

В формуле (1.8) приняты следующие обозначения

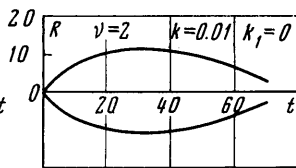
$$c(\tau) = \frac{R(\tau)}{\tau} - R'(\tau) \quad (1.9)$$

$$D(t, \tau) = \tau^{\nu-1} \left[\frac{K_1}{t^{\nu(\nu-1)}} + \frac{1}{t^{\nu-1}} c^2(t) - \frac{R''}{R^{\nu-1}} \int \frac{R^{\nu-1}}{\tau^{\nu-1}} c(\tau) d\tau \right]^{1/\nu}$$

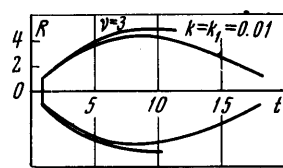
Уравнение (1.7) интегрировалось численно методом Рунге — Кутты. Результаты расчета примеров при $\nu = 1.4$ представлены на фиг. 2 и 3.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 4 дан пример определения формы скачка и формы границы струи. На фиг. 5 дана зависимость максимального радиуса расширения струи R_{\max} (кривые $\theta = \theta(x)$) и места его расположения t_{\max} (кривые $\phi = \phi(x)$) от K для случаев плоского $\nu = 2$ (индекс 2) и конического $\nu = 3$ (индекс 3) сопел; при этом $x = \lg K$, $\theta = \lg R_{\max}$, $\phi = \lg t_{\max}$.

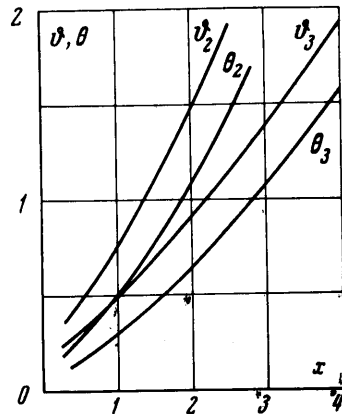
В работе [4], в которой также рассматривается в аналогичном приближении решение задачи о сверхзвуковой струе, истекающей в покоящуюся среду, определена форма скачка, но не дан метод для нахождения формы струи и не введены критерии подобия (1.6).

2. Истечение сверхзвуковой струи в спутный сверхзвуковой поток. При истечении в спутный сверхзвуковой поток так же, как и при истечении в затопленное пространство, внутри струи возникает бочкообразный скачок уплотнения. Но в этом случае во внешнем потоке также возникает скачок уплотнения, и, таким образом, картина течения будет такова: бочкообразный скачок уплотнения, граница струи — контактный разрыв, скачок уплотнения во внешнем потоке.

В этом случае так же как и в предыдущем, задача сводится к интегрированию уравнения, аналогичного уравнению (1.7), с той разницей, что здесь вместо постоянной K будет переменная величина, зависимость которой от R и ее производных берется из работы [3] и выглядит следующим образом:

$$K = m \left[R'^2 + \frac{R''}{\nu R^{\nu-1}} (R^\nu - 1) \right] \quad \left(m = \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{\rho_c V_1^2} \right)$$

Здесь индекс ∞ относится к величинам во внешнем потоке.



Фиг. 5

Аналогом уравнения (1.7) будет (2.1)

$$m \left[R'^2 + \frac{R''}{\nu R^{\nu-1}} (R^\nu - 1) \right] = \frac{K_1}{t^{\nu(\nu-1)}} + \frac{c^2(t)}{t^{\nu-1}} - \frac{R''}{R^{\nu-1}} \int_1^t \frac{R^{\nu-1}}{\tau^{\nu-1}} c(\tau) d\tau$$

В нулевом приближении по ε все три поверхности: бочкообразный скачок, граница струи и внешний скачок — совпадают. В первом приближении граница струи и внешний скачок определяются формулами (здесь за нулевое приближение по ε для R берется уравнение бочкообразного скачка)

$$R_p = R + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{1}{R^{\nu-1}} \int_1^t \frac{R^{\nu-1}(\tau)}{\tau^{\nu-1}} \frac{c(\tau)}{\rho_0''} d\tau \quad (2.2)$$

$$R_s = R + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{1}{R^{\nu-1}} \int_1^t \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{n}{m} \frac{1}{R'^2(\tau)} \right] \times \\ \times R^{\nu-1}(\tau) R^{2/\nu+1}(\tau) \frac{d\tau}{T(t, \tau)} \quad (2.3)$$

Здесь

$$\rho_0'' = \frac{1}{F(\tau)} \left[\frac{K_1}{t^{\nu(\nu-1)}} + \frac{c^2(t)}{t^{\nu-1}} - \frac{R''}{R^{\nu-1}} \int_1^t \frac{c(\tau)}{\tau^{\nu-1}} R^{\nu-1} d\tau \right]^{1/\nu}$$

$$F(\tau) = \left[\frac{K_1}{\tau^{\nu(\nu-1)}} + \frac{c^2(\tau)}{\tau^{\nu-1}} \right]^{1/\nu} \left[\tau^{\nu-1} + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \tau^{2-\nu(\nu-1)} \frac{K_1}{c^2(\tau)} \right]$$

$$T(t, \tau) = \left[R^2 + \frac{RR''}{\nu} \left(1 - \frac{R^\nu(\tau)}{R^\nu} \right) \right]^{1/\nu}, \quad n = \frac{P_\infty}{\rho_c V_1^2 \theta_0^2}$$

Таким образом, так же, как и в п.1, задача сводится к легковыполнимому интегрированию уравнения (2.1), после чего находятся все остальные искомые функции.

Автор выражает искреннюю признательность Г. Г. Черному за большое внимание, проявленное к данной работе.

НИИ механики МГУ

ЛИТЕРАТУРА

Поступило 18 III 1969

1. Волконская Т. Г. Расчет сверхзвуковых осесимметричных струй. В сб.: «Численные методы в газовой динамике», Сб. работ ВЦ МГУ, 1963, вып. 2.
2. Емельянов В. М. Расчет осесимметричной сверхзвуковой струи, истекающей в спутный сверхзвуковой поток или покоящуюся среду. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 3.
3. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
4. Гусев В. Н. К расчету гиперзвуковых осесимметричных струй. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
5. Ладыженский М. Д. Анализ уравнения гиперзвуковых течений и решение задачи Коши. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
6. J a s u h a g a M. Hypersonic self-similarity of barrel shock in sourcetype free jets. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 6. (Рус. перев.: Гиперзвуковое автомодельное решение для бочкообразного скачка уплотнения в свободной струе типа течения от источника. Ракетная техника и космонавтика, 1966, № 6).