

К ТЕОРИИ ТРАНСЗВУКОВЫХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

В. Б. ГОРСКИЙ

(Саранск)

Строятся приближенные уравнения плоских и осесимметричных трансзвуковых вихревых течений газа для функции тока непосредственно на физической плоскости в окрестности точки звуковой линии, в которой энтропия экстремальна. Построены их некоторые частные решения, являющиеся обобщениями известных интегралов трансзвуковой газодинамики при отсутствии вихрей.

1. Основные уравнения. Установившиеся вихревые изоэнергетические течения невязкого и нетеплопроводного газа описываются следующей системой уравнений:

$$\nabla \rho w = 0, \quad w \times \text{rot } w + TVS = 0, \quad w \cdot \nabla S = 0, \quad p\rho^{-1} = RT \quad (1.1)$$

Здесь w , p , ρ , T , S — соответственно скорость, давление, плотность, температура и энтропия газа; R — газовая постоянная Больцмана.

Ограничимся изучением плоских и осесимметричных течений. Введем в плоскости потока прямоугольную декартову систему координат xy , причем для течений с осевой симметрией направим ось x по оси симметрии потока и через y будем обозначать расстояние до оси x .

Из (1.1) следует существование функции тока Ψ , так что

$$\partial \Psi / \partial x = -y^{\nu} \rho v_y (\rho_* w_*)^{-1}, \quad \partial \Psi / \partial y = y^{\nu} \rho v_x (\rho_* w_*)^{-1} \quad (1.2)$$

Здесь v_x , v_y — проекции скорости на оси координат; $\nu = 0$ для плоского потока, но $\nu = 1$ для течения с осевой симметрией; индекс * соответствует критической скорости звука.

Кроме того, для изучаемых течений завихренность Ω имеет вид

$$\Omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = y^{\nu} \rho a^2 (k R \rho_* w_*)^{-1} \frac{dS}{d\Psi} \quad (1.3)$$

где a — скорость звука, k — показатель адиабаты. Подставляя сюда выражения для v_x , v_y и используя интеграл Бернулли, получаем точное уравнение для Ψ , описывающее вихревые течения газа

$$\Psi_x^2 \Psi_{xx} + 2\Psi_x \Psi_y \Psi_{xy} + \Psi_y^2 \Psi_{yy} - (1 - M^{-2}) (\Psi_x^2 + \Psi_y^2) (\Psi_{xx} + \Psi_{yy}) - \\ - \nu M^{-2} y^{-1} \Psi_y (\Psi_x^2 + \Psi_y^2) = (kR)^{-1} M^{-2} (1 - M^{-2}) (\Psi_x^2 + \Psi_y^2)^2 \frac{dS}{d\Psi}$$

где M — число Маха. В несколько ином виде и для функции тока, определенной в другой форме, оно было найдено Л. Крокко [1].

2. Приближенные уравнения некоторых трансзвуковых вихревых течений. Найдем приближенные уравнения движения завихренного газа в окрестности точки звуковой линии, в которой энтропия экстремальна. Такие точки могут встретиться на звуковой линии. В частности, очень вероятно, что таким свойством обладает звуковая точка, расположенная на оси симметрии течения.

В отличие от [2] не предполагается, что завихренность возникла из первоначально безвихревого потока. Как и в [3, 4], будем считать, что

вблизи звуковой скорости энтропия достаточно гладкая функция, так что для нее выполняется разложение

$$(kR)^{-1}S = S_0 + S_1\psi + 1/2S_2\psi^2 + 1/3S_3\psi^3 + \dots \quad (2.1)$$

где S_i — некоторые коэффициенты, не зависящие от ψ . При этом из условия экстремальности S полагаем в (2.1) $S_1 = 0$ при $v = 0$ и $S_1 = S_2 = 0$ при $v = 1$.

Получим искомые уравнения с помощью метода малых возмущений. Для этого положим

$$v_x = w_*(1 + u), \quad v_y = w_*v; \quad \Psi = 2^{-v}y^{v+1} + \psi, \\ \Psi_x = \psi_x, \quad \Psi_y = y^v + \psi_y \quad (2.2)$$

Здесь u , v , ψ — компоненты скорости и функция тока возмущения. Таким образом, рассматриваются течения, мало отличающиеся от однородного звукового потока, параллельного оси x .

Сравнивая производные Ψ_x , Ψ_y в (1.2) и (2.2), имеем

$$\psi_x = -\rho\rho_*^{-1}y^v v, \quad \psi_y = y^v [(\rho\rho_*^{-1}(1 + u) - 1)] \quad (2.3)$$

Кроме того, используя интеграл Бернулли, легко получаем формулы

$$\rho\rho_*^{-1} = [1 - 1/2(k-1)(w_*^{-2}w^2 - 1)]^{1/(k-1)}, \\ M^2 = w_*^{-2}w^2 [1 - 1/2(k-1)(w_*^{-2}w^2 - 1)]^{-1} \quad (2.4)$$

Теперь для нахождения искомого приближения введем обычные в трансзвуковой газодинамике оценки [2]

$$x = O(1), \quad y = O(\varepsilon^{1/2}), \quad u = O(\varepsilon), \quad v = O(\varepsilon^{3/2}) \quad (2.5)$$

где ε — малый параметр. Тогда оставляя в (2.2) только главные члены, будем иметь

$$\psi_x = -y^v v, \quad \psi_y = -1/2(k+1)y^v u^2 \quad (2.6)$$

и, следовательно, компоненты u , v и модуль скорости w выражаются через функцию тока возмущения ψ , причем $\psi = O(\varepsilon^{(3-v)/2})$. Подставляя теперь (2.1), (2.2) в (1.4) и используя (2.4) — (2.6), находим уравнение для плоских ($v = 0$) и осесимметричных ($v = 1$) трансзвуковых вихревых течений газа

$$\psi_{yy} - v y^{-1} \psi_y \mp \sqrt{-2(k+1)y^{-v} \psi_y} (\psi_{xx} + S_{2+v} y^{2v} \psi^{v+1}) = 0 \quad (2.7)$$

Здесь верхний знак перед корнем соответствует сверхзвуковым, а нижний — дозвуковым потокам.

Полагая в (2.7) $S_{2+v} = 0$, получаем уравнение для безвихревых трансзвуковых течений [5, 6], соответствующее уравнению Кармана — Фальковича для потенциала скорости.

3. Примеры вихревых течений с околосзвуковой скоростью. Приведем несколько частных решений уравнения (2.7). В плоском случае, применяя при $M \geq 1$ метод разделения переменных, находим

$$\Psi = Q \sin^4 \frac{x}{4} \sqrt{S_2} \quad (S_2 > 0), \quad \Psi = Q \operatorname{sh}^4 \frac{x}{4} \sqrt{-S_2} \quad (S_2 < 0), \\ Q = \frac{128}{3(k+1)S_2^2 y^3} \quad (3.1)$$

Исследуем полученное решение при $S_2 < 0$. Здесь имеем

$$u^2 = 6Q(k+1)^{-1} y^{-1} \operatorname{sh}^{4/4} x \sqrt{-S_2}, \\ v = -Q(-S_2)^{1/2} \operatorname{sh}^{3/4} x \sqrt{-S_2} \operatorname{ch}^{1/4} x \sqrt{-S_2} \quad (3.2)$$

Отсюда видно, что звуковая скорость ($u = 0$) достигается на оси y и, следовательно, все течение годится только при малых x . Уравнение линий тока имеет вид

$$y + Q \operatorname{sh}^{4/3} x \sqrt{-S_2} = \text{const},$$

а характеристиками будут линии

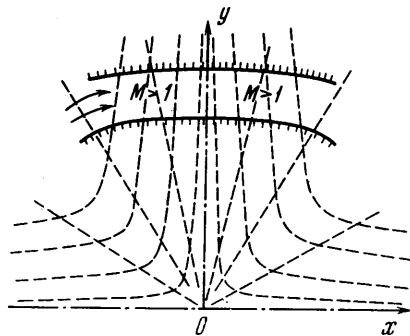
$$y = \alpha \operatorname{th}^{\pm 1/3} x \sqrt{-S_2},$$

где α — произвольная постоянная. Таким образом, рассмотренное решение описывает сверхзвуковой поток в канале с двумя осями симметрии. Схема верхней половины этого течения представлена на фиг. 1. Здесь штриховыми линиями изображены характеристики, а сплошными с поперечными рубчиками — линии тока. Качественно картина течения очень близка известному (для потенциала скорости) безвихревому потоку [7, 8] и в пределе при $S_2 \rightarrow 0$ точно переходит в него. Примечательно, что теперь и для безвихревого потока можно указать простое уравнение для линий тока

$$6^{-1}(k+1)^{-1} x^4 y^{-3} + y = \text{const}$$

Для осесимметричных течений можно также получить аналогичное частное решение. Так, разыскивая решение уравнения (2.7) при $\nu = 1$ в форме $\psi = y^{-2} f(x)$, имеем для f

$$f' + S_3 f^2 = 4(k+1)^{-1/2} f^{1/2} \quad (M \geq 1) \quad (3.3)$$



Фиг. 1

Отбрасывая произвольные постоянные интегрирования, находим

$$f(x) = \frac{4}{S_3^{2/3}(k+1)^{1/2}} \left[\frac{1 - \operatorname{cn}(hx)}{(\sqrt{3} \pm 1) + (\sqrt{3} \mp 1) \operatorname{cn}(hx)} \right]^2$$

$$h = 2 \cdot 12^{-1/4} |S_3(k+1)^{-1}|^{1/2} \quad (3.4)$$

Здесь модуль эллиптического косинуса $\kappa = 1/2 \sqrt{2 \mp \sqrt{3}}$, и там, где стоят двойные знаки, верхний знак соответствует $S_3 > 0$, а нижний — $S_3 < 0$. Для компонент скорости будем иметь

$$u^2 = 4(k+1)^{-1} y^{-4} f(x), \quad v = -y^{-3} f'(x)$$

поскольку $f(0) = 0$, то скорость звука ($u = 0$) достигается при $x = 0$. Форма линий тока определяется уравнением

$$y^{-2} f(x) + 1/2 y^2 = \text{const}$$

а характеристики приближенно (вблизи $x = 0$) имеют вид $y = \alpha x^{\pm \sqrt{3}/2}$, где α — произвольная постоянная. Качественно схема течения остается такой же, как на фиг. 1. Устремляя в (3.4) S_3 к нулю, в пределе получается решение [8] для функции тока безвихревого течения

$$\psi = 9^{-1}(k+1)^{-1} x^4 y^{-2}$$

Другое частное решение для плоского случая имеет вид

$$\psi = (a_1 \operatorname{sh} x \sqrt{-S_2} + a_2 \operatorname{ch} x \sqrt{-S_2})(a_3 y + a_4) \quad (S_2 < 0) \quad (3.5)$$

$$\psi = (a_1 \sin x \sqrt{S_2} + a_2 \cos x \sqrt{S_2})(a_3 y + a_4) \quad (S_2 > 0) \quad (3.6)$$

где a_i — произвольные постоянные. Легко видеть, что полученное решение пригодно как в сверхзвуковой, так и в дозвуковой областях. Рассмотрим случай $S_2 < 0$. Это соответствует окрестности точки на звуковой линии, где энтропия максимальна.

Пусть также $a_2 = a_4 = 0$. Тогда из (3.5) имеем

$$\psi = Ay \operatorname{sh} x\sqrt{-S_2}, \quad A = c(-S_2)^{-1/2}, \quad c = \text{const} \quad (3.7)$$

Исследуем это решение. Используя (2.6), находим

$$u^2 = -2(k+1)^{-1}A \operatorname{sh} x\sqrt{-S_2}, \quad v = -Ay\sqrt{-S_2} \operatorname{ch} x\sqrt{-S_2} \quad (3.8)$$

Следовательно, и здесь звуковая линия будет совпадать с осью y , а так как наши рассуждения верны лишь в околосзвуковой зоне, то рассматриваемое течение достаточно точно описывается только вблизи оси y . Линии тока имеют форму

$$y(1 + A \operatorname{sh} x\sqrt{-S_2}) = \text{const}$$

а характеристики вблизи $x = 0$ приближенно определяются уравнением ($M \geq 1$)

$$y = \pm^{4/3}x[-2(k+1)Ax\sqrt{-S_2}]^{-1/4} + \text{const}$$

Кроме того, характеристикой будет и сама звуковая линия $x = 0$. Таким образом, это решение можно интерпретировать как вихревой чисто дозвуковой или сверхзвуковой (с достижением скорости звука) поток в симметричном сужающемся (при $A > 0$) либо расширяющемся (при $A < 0$) канале. Схема течения изображена на фиг. 2. Интересно отметить, что рассмотренный поток, если не учитывать криволинейность линий тока, очень похож на известное течение сжимаемой жидкости в источнике и стоке. При $S_2 \rightarrow 0$ из (3.7) получаем аналогичное решение $\psi = cxy$ при отсутствии вихрей.

Автор благодарит Ю. Д. Шмыглевского за полезное обсуждение работы.

Поступило 20 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Гроссо L. Eine neue Stromfunktion fuer die Erforschung der Bewegung der Gas mit Rotation. ZAMM, 1937, Bd 17, Nr 1.
2. Овсянников Л. В. Уравнения околосзвукового движения газа. Вестн. ЛГУ, Сер. мат., 1952, № 6, стр. 47—54.
3. Шифрин Э. Г. Плоское вихревое течение в окрестности точки ортогональности звуковой линии вектору скорости. Изв. АН СССР, МЖТ, 1966, № 6, стр. 144—146.
4. Фидрус В. И., Шифрин Э. Г. Осесимметричное вихревое течение в окрестности точки ортогональности звуковой линии вектору скорости. Изв. АН СССР, МЖТ, 1967, № 1, стр. 91—93.
5. Seebass R. Mixed flows in magnetogasdynamics. Sympos. Trans., Springer-Verlag, Berlin, 1964, S. 471—490.
6. Горский В. Б. Осесимметричные смешанные течения в магнитной газодинамике. Изв. АН СССР, МЖТ, 1967, № 5, стр. 64—71.
7. Morgan A. On a class of two-dimensional channel flows with a straight sonic line. J. Aeronaut Sci, 1955, No. 5, pp. 573—575.
8. Жигулев В. Н. Об одном классе плоских и осесимметричных околосзвуковых течений. ПММ, 1956, № 5, стр. 613—620.