

## К АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РАСЧЕТА ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ ОКОЛО УГЛОВОЙ ТОЧКИ ТЕЛА

В. Я. НЕЙЛАНД

(Москва)

Излагается метод расчета распределения тепловых потоков, напряжений трения и давления вблизи угловой точки контура тела, в окрестности которой внешний сверхзвуковой поток проходит через волну разрежения. Метод основан на исследовании асимптотических решений уравнений Навье — Стокса при стремлении числа Рейнольдса  $R$  к бесконечности для области течения, в которой продольные градиенты функций течения велики, и поэтому не пригодна обычная теория пограничного слоя. Эта задача частично рассматривалась в работе [1], в которой в первом приближении получено распределение трения и давления в области с длиной порядка нескольких толщин приближающегося пограничного слоя. Главный член разложения для теплового потока к поверхности тела обращается в нуль при значении числа Прандтля, равном единице, а при других значениях числа Прандтля не сопрягается непосредственно с его величиной в невозмущенном пограничном слое.

Получено распределение тепловых потоков для значений числа Прандтля  $\sigma$ , близких к единице. Для этого оказалось необходимым рассмотреть более общий двойной предельный переход  $\sigma \rightarrow 1$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$  при конечном значении параметра  $B = \{(\sigma - 1) / \sigma\} [-\ln \varepsilon^{1/4} / \varepsilon]^{1/4}$ , характеризующего соотношение эффектов теплопроводности, вязкой диссипации и конвекции. Решение, полученное ранее [1], соответствует частному случаю  $|B| \rightarrow \infty$  и поэтому для реальных значений чисел  $R = 10^4 - 10^6$ ,  $\sigma \sim 0.7$  существенно переоценивает влияние диссипативного члена на теплообмен, хотя уже в первом приближении хорошо описывает распределение давления и удовлетворительно — трения. Для гладкого срачивания решений с соответствующими функциями течения в невозмущенном пограничном слое оказалось необходимым ввести в рассмотрение область течения со «свободным взаимодействием» для течения разрежения. Приведены уравнения и краевые условия, описывающие течение в целом. Даны примеры численных расчетов и сравнение с экспериментом.

1. На фиг. 1 показана схема рассматриваемого течения. Вдали от поверхности тела в области 1 находится равномерный сверхзвуковой поток с давлением  $p_0^\circ$ . Пусть длина тела от передней кромки или критической точки равна  $l^\circ$ . Тогда толщина невозмущенного пограничного слоя по порядку величины равна  $\varepsilon l^\circ$ , где  $\varepsilon = R^{-1/2}$ ,  $R = \rho_0^\circ u_0^\circ l^\circ / \mu^\circ$  ( $\rho_0^\circ$ ,  $\mu^\circ$ ,  $u_0^\circ$  — соответственно размерные плотность, динамический коэффициент вязкости и скорость в невозмущенном сверхзвуковом потоке). При прохождении сверхзвукового потока через волну разрежения около угловой точки давление в нем меняется на длине  $\varepsilon l^\circ$  на основной порядок по величине. Поэтому в области 2 с толщиной  $\varepsilon l^\circ$  необходимо ввести следующие безразмерные переменные:

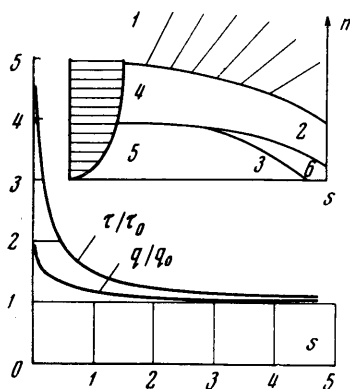
$$S = s^\circ / \varepsilon l^\circ, \quad N = n^\circ / \varepsilon l^\circ, \quad \psi = \psi^\circ / \varepsilon \rho_0^\circ u_0^\circ l^\circ$$

где градусом отмечены размерные величины. Асимптотические разложения для функций течения имеют вид

$$\begin{aligned} \rho^\circ(s^\circ, n^\circ; \varepsilon) &= \rho_0^\circ \rho_2(S, N) + \dots, & p^\circ(s^\circ, n^\circ; \varepsilon) &= \rho_0^\circ u_0^{\circ 2} p_2(S, N) + \dots \\ u^\circ(s^\circ, n^\circ; \varepsilon) &= u_0^\circ u_2(S, N) + \dots, & v^\circ(s^\circ, n^\circ; \varepsilon) &= u_0^\circ v_2(S, N) + \dots \end{aligned} \quad (1.1)$$

Индексом снизу отмечен номер области.

Если подставить (1.1) в уравнения Навье — Стокса, то для первых членов разложения по  $\epsilon$  получаются уравнения Эйлера. Сращивание решений в областях 1 и 2 дает связь между величиной давления и углом наклона вектора скорости в области 2 при  $N \rightarrow \infty$  в форме обычного соотношения для волны разрежения в сверхзвуковом потоке. Другое краевое условие —  $v_2(S, 0) = 0$ . Для выполнения условий прилипания  $u^\circ(s^\circ, 0; \epsilon) = 0$  необходимо рассмотреть течение в области 3, в которой главные вязкие и инерционные члены уравнений Навье — Стокса имеют одинаковый порядок величин. Из этого условия следует, что толщина области должна по порядку быть равной  $\epsilon^{3/2}l^\circ$ . Поскольку скорость в новой



Фиг. 1

области в силу условия сращивания областей 2 и 3 сохраняет порядок  $u^\circ$ , то значение функции тока  $\psi^\circ$  по порядку должно быть равным  $\epsilon^{3/2}\rho_0^\circ u_0^\circ l^\circ$ . Безразмерные независимые переменные и асимптотические представления других функций течения имеют вид

$$\begin{aligned} S &= s^\circ / \epsilon l^\circ, & \Psi &= \psi^\circ / \epsilon^{3/2} \rho_0^\circ u_0^\circ l^\circ \\ u^\circ(s^\circ, n^\circ; \epsilon) &= u_0^\circ u_3(S, \Psi) + \dots \\ v^\circ(s^\circ, n^\circ; \epsilon) &= \epsilon^{1/2} u_0^\circ v_3(S, \Psi) + \dots \quad (1.2) \\ p^\circ(s^\circ, n^\circ; \epsilon) &= \rho_0^\circ u_0^{\circ 2} p_3(S, \Psi) + \dots \\ \rho^\circ(s^\circ, n^\circ; \epsilon) &= \rho_0^\circ \rho_3(S, \Psi) + \dots \end{aligned}$$

В работе [1] показано, что при значении числа Прандтля  $\sigma$ , равном единице, энтальпия торможения остается в первом приближении постоянной поперек области 3. Поэтому в данной работе исследуется первый переменный в области 3 член разложения для  $H^\circ(s^\circ, n^\circ; \epsilon)$  при стремлении числа Прандтля к единице

$$H^\circ(s^\circ, n^\circ; \epsilon) = u_0^{\circ 2} [H(S, 0) + \alpha(\epsilon) H_3(S, \Psi) + \dots]$$

Здесь  $H(S, 0)$  — заданная постоянная величина, соответствующая температуре поверхности тела;  $\alpha(\epsilon)$  — неизвестная функция, которая в дальнейшем будет определена при сращивании разложений, полученных в области 3, с разложениями, которые будут получены для других областей течения. На поверхности тела краевые условия имеют вид

$$u_3(S, 0) = v_3(S, 0) = H_3(S, 0) = 0$$

При подстановке (1.2) в уравнения Навье — Стокса и переходе к переменным Мизеса получаются уравнения

$$\begin{aligned} \rho_3 u_3 \frac{\partial H_3}{\partial S} &= \rho_3 u_3 \frac{\partial}{\partial \Psi} \left( \frac{\rho_3 \mu_3}{\sigma} u_3 \frac{\partial H_3}{\partial \Psi} \right) + \rho_3 u_3 \frac{\partial}{\partial \Psi} \left[ \rho_3 \mu_3 u_3^2 \frac{\sigma - 1}{\alpha(\epsilon)} \frac{\partial u_3}{\partial \Psi} \right], & \frac{\partial p_3}{\partial \Psi} &= 0 \\ \rho_3 u_3 \frac{\partial u_3}{\partial S} + \frac{\partial p_3}{\partial S} &= \rho_3 u_3 \frac{\partial}{\partial \Psi} \left( \rho_3 \mu_3 u_3 \frac{\partial u_3}{\partial \Psi} \right), & \frac{\partial n_3}{\partial S} &= \frac{v_3}{u_3}, & \frac{\partial n_3}{\partial \Psi} &= \frac{1}{\rho_3 u_3} \end{aligned} \quad (1.3)$$

В дальнейшем будем считать, что

$$(\sigma - 1) / \alpha(\epsilon) \rightarrow B \text{ при } \epsilon \rightarrow 0 \quad (\sigma \rightarrow 1, \alpha(\epsilon) \rightarrow 0 \text{ при } \epsilon \rightarrow 0)$$

В работе [1] показано, что возмущения давления в области 2 убывают как  $S^{-2}$ . Когда  $S \rightarrow -\infty$ , возмущения скорости в области 2 оказываются разными по порядку величины в слое около тела и вдали от тела.

Действительно, течение в области 2 удовлетворяет уравнению Бернулли. Постоянная Бернулли для каждой струйки тока определяется путем сращивания решения в области 2 с решением для невозмущенного пограничного слоя.

Около тела, где скорость в невозмущенном пограничном слое стремится к нулю, в возмущенной области 2 возмущения скорости порядка самой скорости  $\Delta u_2 \sim u_2 \sim (\Delta p_2)^{1/2}$ . Вдали от стенки  $u_2 \sim O(1)$ , и тогда  $\Delta u_2 \sim \Delta p_2$ . Далее в работе [1] показано, что изменение толщины всей области 2 при  $S \rightarrow -\infty$  определяется изменением толщины узкого слоя, в котором велики возмущения скорости и в котором функция тока имеет порядок величины  $\psi \sim \Delta p \sim 1/S^2$ . Но из (1.1) и (1.2) следует, что при  $\psi \sim \varepsilon^{-1/2}$  во всем возмущенном подслое, изменение толщины которого связано с возмущением сверхзвукового потока 1, становятся существенными главные вязкие члены уравнений Навье — Стокса. Следовательно, на расстоянии от угловой точки  $s^\circ \sim \varepsilon^{3/4} l^\circ$  необходимо рассмотреть еще две области течения, в которых  $\psi^\circ \sim \varepsilon \rho_0^\circ u_0^\circ l^\circ$ ,  $\psi^\circ \sim \varepsilon^{3/2} \rho_0^\circ u_0^\circ l^\circ$ .

Для первой из них, области 4, имеют место следующие переменные и асимптотические представления:

$$\begin{aligned} s &= s^\circ / \varepsilon^{3/4} l^\circ, & \psi &= \psi^\circ / \varepsilon \rho_0^\circ u_0^\circ l^\circ \\ p^\circ(s^\circ, \psi^\circ; \varepsilon) &= \rho_0^\circ u_0^{\circ 2} [p_0 + \varepsilon^{1/2} p_4(s, \psi) + \dots] \\ \rho^\circ(s^\circ, \psi^\circ; \varepsilon) &= \rho_0^\circ [\rho_0(\psi) + \varepsilon^{1/2} \rho_4(s, \psi) + \dots] \\ u^\circ(s^\circ, \psi^\circ; \varepsilon) &= u_0^\circ [u_0(\psi) + \varepsilon^{1/2} u_4(s, \psi) + \dots] \\ v^\circ(s^\circ, \psi^\circ; \varepsilon) &= u_0^\circ \varepsilon^{1/2} u_4(s, \psi) + \dots \\ H^\circ(s^\circ, \psi^\circ; \varepsilon) &= u_0^{\circ 2} H_0(\psi) + \dots \\ n^\circ(s^\circ, \psi^\circ; \varepsilon) &= \varepsilon l^\circ [n_0(\psi) + \varepsilon^{1/2} n_4(s, \psi) + \dots] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Уравнения для области 4 получаются при подстановке (1.4) в уравнения Навье — Стокса. Необходимые для дальнейшего результаты имеют вид

$$\frac{\partial n_4}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial p_4}{\partial \psi} = 0, \quad p_4 + \rho_0(\psi) u_0(\psi) u_4 = 0 \quad (1.5)$$

где  $\rho_0(\psi)$  и  $u_0(\psi)$  — профили плотности и скорости в невозмущенном пограничном слое при  $s^\circ = 0$ . Первая формула (1.5) показывает, что изменение толщины слоя порядка  $\varepsilon^{5/4}$  в области 4 не имеет места, а координата линии тока может изменяться на эту величину только путем сдвига за счет изменения толщины нижнего слоя 5. Согласно (1.5) в главном члене слоя 4 нет поперечного перепада давления и справедливо уравнение Бернулли (в линеаризованном виде).

В области 5, согласно приведенным выше оценкам возмущений давления, скорости и функции тока, независимые переменные и асимптотические представления функций течения имеют вид

$$\begin{aligned} s &= s^\circ / \varepsilon^{5/4} l^\circ, & \Psi &= \psi^\circ / \varepsilon^{3/2} \rho_0^\circ u_0^\circ l^\circ \\ u_0(s^\circ, \psi^\circ; \varepsilon) &= u_0^\circ \varepsilon^{1/4} u_5(s, \Psi) + \dots, \\ \rho^\circ &= \rho_0^\circ \rho_0(0) + \dots, & \mu^\circ &= \mu_0^\circ \mu_0(0) + \dots \\ H^\circ(s^\circ, \psi^\circ; \varepsilon) &= u_0^{\circ 2} [H_0(0) + \varepsilon^{1/4} H_5(s, \Psi) + \dots], \\ p^\circ(s^\circ, \psi^\circ; \varepsilon) &= \rho_0^\circ u_0^{\circ 2} [p_0 + \varepsilon^{1/2} p_5(s, \Psi) + \dots], \\ n^\circ(s^\circ, \psi^\circ; \varepsilon) &= \varepsilon^{5/4} l^\circ n_5(s, \Psi) + \dots, \\ v^\circ(s^\circ, \psi^\circ; \varepsilon) &= \varepsilon^{3/4} u_0^\circ v_5(s, \Psi) + \dots \end{aligned} \quad (1.6)$$

При подстановке (1.6) в уравнения Навье — Стокса получаются уравнения несжимаемого пограничного слоя, температура и плотность газа в котором равны их значениям в невозмущенном пограничном слое около поверхности тела

$$\rho_0(0)u_5 \frac{\partial u_5}{\partial s} + \frac{\partial p_5}{\partial s} = \rho_0(0)u_5 \frac{\partial}{\partial \Psi} \left[ \rho_0(0)\mu_0(0)u_5 \frac{\partial u_5}{\partial \Psi} \right], \quad \frac{\partial n_5}{\partial s} = \frac{v_5}{u_5} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial H_5}{\partial s} = \frac{\rho_0(0)\mu_0(0)}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \Psi} \left( u_5 \frac{\partial H_5}{\partial \Psi} \right), \quad \frac{\partial p_5}{\partial \Psi} = 0, \quad \frac{\partial n_5}{\partial \Psi} = \frac{1}{\rho_0(0)u_5}$$

Краевые условия на поверхности тела

$$u_5(s, 0) = v_5(s, 0) = H_5(s, 0) = 0 \quad (1.8)$$

Из сращивания решений в областях 5 и 4 получаются внешние краевые условия для области 5

$$u_5(s, \Psi) \rightarrow \left[ \frac{2(\Psi a - p_5)}{\rho_0(0)} \right]^{1/2}, \quad H_5(s, \Psi) \rightarrow b \left[ \frac{2\Psi}{\rho_0(0)a} \right]^{1/2},$$

$$n_5(s, \Psi) = n_4(s) \quad \text{при } \Psi \rightarrow \infty \quad (1.9)$$

Используя сращивание функций течения в областях 4 и 1, а также первую и вторую формулы (1.5) и последнюю (1.7), получаем уравнение для распределения давления во всей области  $s^\circ \sim \varepsilon^{3/4}l^\circ$

$$(M_0^2 - 1)^{1/2} p_5 = \frac{d}{ds} \left\{ \lim_{\Psi \rightarrow \infty} \int_0^\Psi \left[ \frac{1}{\rho_0(0)u_5} - \frac{1}{[2\rho_0(0)a\Psi]^{1/2}} \right] d\Psi \right\} \quad (1.10)$$

В формулах (1.9) и (1.10)  $a$  и  $b$  — безразмерное напряжение трения и тепловой поток на поверхности тела в невозмущенном пограничном слое перед угловой точкой

$$a = (\partial u^\circ / \partial n^\circ) (\varepsilon l^\circ / u_0^\circ), \quad b = (\partial H^\circ / \partial n^\circ) (\varepsilon l^\circ / u_0^\circ)^2 \quad \text{при } n^\circ = 0 \quad (1.11)$$

Начальные условия для (1.7) получаются при сращивании решений в области 5 и невозмущенном пограничном слое.

$$(1.12)$$

$$u_5(s, \Psi) \rightarrow [2\Psi a / \rho_0(0)]^{1/2}, \quad H_5(s, \Psi) \rightarrow b[2\Psi / \rho_0(0)a]^{1/2} \quad \text{при } s \rightarrow -\infty$$

Совместное решение (1.7), (1.10) при краевых и начальных условиях (1.8), (1.9), (1.12) позволяет рассчитать распределение давления, тепловых потоков и трения в области  $s^\circ \sim \varepsilon^{3/4}l^\circ$ .

2. Численное решение задачи удобно проводить, используя вместо  $s$  возмущение давления  $p_5$

$$\xi = -p \left[ \frac{2(M_0^2 - 1)^{1/2}}{\rho a v} \right]^{1/2} \quad (2.1)$$

$\lambda = a\rho^{1/2}n / (-p)^{1/2}$ ,  $\varphi(\xi, \lambda) = a\Psi / (-p)$ ,  $G(\xi, \lambda) = \rho^{1/2}aH / b(-p)^{1/2}$   
где номер области для краткости опущен,

$$\rho = \rho_0(0), \quad v = \mu_0(0) / \rho_0(0), \quad -p > 0$$

Уравнения (1.7), (1.10), краевые условия (1.8), (1.9) и начальные условия (1.12) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \varphi''' &= \beta(-1 + 1/2\varphi'^2 - \varphi\varphi'') + \zeta\beta(\varphi'\varphi'' - \varphi\varphi''') \\ G''/\sigma &= \beta(1/2\varphi'G - \varphi G') + \zeta\beta(\varphi'G' - \varphi G'') \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\beta = -\zeta^{3/2} \left( \frac{d}{d\zeta} \{2\zeta^{1/2} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} [\lambda - (2\varphi)^{1/2}] \} \right)^{-1}$$

$$\varphi' \rightarrow [2(\varphi + 1)]^{1/2}, \quad G \rightarrow (2\varphi)^{1/2} \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty \quad [\varphi'' \rightarrow 1, G' \rightarrow 1]$$

$$\varphi(\zeta, 0) = \varphi'(\zeta, 0) = G(\zeta, 0) = 0; \quad \varphi(\zeta, \lambda) \rightarrow 1/2\lambda^2,$$

$$G(\zeta, \lambda) \rightarrow \lambda \quad \text{при } \zeta \rightarrow 0$$

Система (2.2) не содержит каких-либо параметров, характеризующих конкретную задачу, и дает универсальное решение  $\varphi(\zeta, \lambda)$  и  $G(\zeta, \lambda)$  для всех тел, у которых изменение угла наклона поверхности тела мало на участке длиной  $s^\circ \sim \varepsilon^{3/4}l^\circ$ . Число  $M_0$ , температурный фактор, форма передней части тела появляются при определении физического размера области  $s$ . Для перехода к обычным физическим переменным нужно определить координату  $s$

$$s = \rho^{-3/4} a^{-5/4} \nu^{-1/4} 2^{-3/4} (M_0^2 - 1)^{-3/8} \int_0^\zeta \left[ \zeta^{1/2} / \beta(\zeta) \right] d\zeta \quad (2.3)$$

Очевидно,  $s < 0$ . Формулы для коэффициента давления  $C_p$ , числа Стантона  $N_{st}$  и коэффициента сопротивления трения  $C_f$

$$N_{st} = \frac{q^\circ}{\rho_0^\circ u_0^\circ H_0^\circ} = \frac{\mu b \varepsilon u_0^{\circ 2}}{G} G'(\zeta, 0) \quad (2.4)$$

$$C_f = \frac{2\tau^\circ}{\rho_0^\circ u_0^{\circ 2}} = 2\mu a \varepsilon \varphi''(\zeta, 0), \quad C_p = \frac{-2\varepsilon^{1/2} \zeta}{[2(M_0^2 - 1)^{1/2} / \rho a \nu]^{1/2}} \quad (2.5)$$

где  $q^\circ$  — удельный тепловой поток, а  $\tau^\circ$  — напряжение трения.

Для получения начальных условий в области  $\mathcal{Z}$  необходимо исследовать асимптотическое поведение решения в области  $\mathcal{S}$  при  $\zeta \rightarrow \infty$  или  $s \rightarrow 0$ .

Заметим прежде всего, что при  $\zeta \rightarrow \infty$  в области  $\varphi \sim 1$  и  $\lambda \sim 1$  первое из уравнений (2.2) имеет решение  $\varphi' = \sqrt{2(\varphi + 1)}$ . Это решение соответствует переходу в область  $\mathcal{Z}$ . Оно позволяет вычислить распределение давления в области перекрытия решений.

$$\lambda = \sqrt{2(\varphi + 1)} - \sqrt{2}, \quad \beta = \zeta^2 / \sqrt{2}, \quad \zeta = 2^{3/2} / \rho^{3/2} a^{3/2} \nu^{1/2} (M_0^2 - 1)^{3/4} s^2 \quad (2.6)$$

$$(-p) = 2 / \rho a^2 (M_0^2 - 1) s^2 \quad (2.7)$$

Заметим, что (2.7) совпадает с асимптотикой для давления в области  $\mathcal{Z}$  при  $S \rightarrow -\infty$ . Вид первого из краевых условий (1.9) и (2.7) позволяет предположить, что предельное решение для уравнения импульсов следует искать в виде

$$u = \left( \frac{2A}{\rho} \right)^{1/2} \frac{\Phi(z, s)}{(-s)} \quad z = \frac{\Psi}{(\mu\sqrt{2A\rho})^{1/2}}, \quad A = (-p)s^2, \quad z = \frac{\Psi}{\sqrt{\mu\sqrt{2A\rho}}} \quad (2.8)$$

подстановка (2.8) в первое из уравнений (1.7) дает

$$\Phi(\Phi\Phi')' = \Phi^2 - 1 + (-s)\Phi' \quad (2.9)$$

где штрихом отмечено дифференцирование по  $z$ , а точкой — по  $s$ .

Согласно (1.9) и (2.9) при  $s \rightarrow 0$  получаем

$$\Phi(\Phi\Phi')' = \Phi^2 - 1, \quad \Phi(0,0) = 0, \quad \Phi(\infty, 0) = 1 \quad (2.10)$$

Решение (2.10) получается в квадратурах

$$z = \int_0^{\Phi} \frac{\Phi d\Phi}{[2/3\Phi^3 - 2\Phi + 4/3]^{1/2}} \quad (2.11)$$

Предельное решение для уравнения энергии имеет более сложную форму

$$\begin{aligned} H &= b \left( \frac{2}{\rho a} \right)^{1/2} \left[ -4\rho\mu \left( \frac{2A}{\rho} \right)^{1/2} \ln(-s) \right]^{1/4} Q(s, x) \\ x &= \Psi \left[ -4\rho\mu \left( \frac{2A}{\rho} \right)^{1/2} \ln(-s) \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Краевые условия (1.8) и (1.9) принимают форму

$$Q(s, 0) = 0, \quad Q(s, \infty) \rightarrow \sqrt{x} \quad \text{при } x \rightarrow \infty \quad (2.13)$$

При подстановке (2.12) в уравнение энергии получаем уравнение

$$[\Phi Q']' = Q - 2xQ' - 4(-s) \ln(-s) Q' \quad (2.14)$$

которое при  $s \rightarrow 0$  и ограниченных значениях  $x$  позволяет получить предельное решение

$$Q''/\sigma = Q - 2xQ', \quad \Phi = 1 \quad (2.15)$$

Решение уравнения (2.15) при краевых условиях (2.13) показывает:  $Q = 1.022\sigma^{1/4}x + \dots$  при  $x \rightarrow 0$ ,  $Q = \sqrt{x} + \dots$  при  $x \rightarrow \infty$ .

3. Полученный в предыдущем разделе результат (2.13) показывает, что непосредственное сращивание решений для уравнения энергии в областях 2 и 3 невозможно, так как области не перекрываются. Необходимо получить промежуточное разложение вида

$$H_6(S, W) = H_5 / [-\ln \varepsilon^{1/4}]^{1/4}, \quad W = \Psi / [\ln \varepsilon^{1/4}]^{1/2} \quad (3.1)$$

Вид функции  $H_6(W)$  дает сращивание с (2.12)

$$H_6(W) = b \left( \frac{2}{\rho a} \right)^{1/2} \left[ 4\rho\mu \left( \frac{2A}{\rho} \right)^{1/2} \right]^{1/4} Q \left[ W/4\rho\mu \left( \frac{2A}{\rho} \right)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (3.2)$$

Сращивание (3.2) с решением для области 2 становится очевидным, если вспомнить, что  $Q \sim \sqrt{W}$  при  $W \rightarrow \infty$ .

Сращивание (3.2) с решением в области 3 дает для области 3 вид функции  $\alpha(\varepsilon)$ , начальное и внешнее краевое условие

$$\alpha(\varepsilon) = [\varepsilon / (-\ln \varepsilon^{1/4})]^{1/4}$$

$$H_3(S, \Psi) \rightarrow b \left( \frac{2}{\rho a} \right)^{1/2} \left\{ Q'(0) \Psi \left[ \left[ 4(\rho\mu) \left( \frac{2A}{\rho} \right)^{1/2} \right]^{1/4} \right] \right\} \quad \text{при } \Psi \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

4. Уравнения для области 3 удобно интегрировать в переменных, предложенных в работе [1]

$$\xi = C \int_{-\infty}^S (\rho\mu)_2 u_1^2 dS, \quad \eta = mu_1 \int_0^n \rho dn \quad (4.1)$$

где индексом 1 и 2 отмечены значения переменных на внешней границе области 3 и на стенке соответственно, а индекс, отмечающий номер области, опущен в данном разделе

$$(Nf'')' + (du_1/d\xi) [(\rho_1/\rho) - f^2] = u_1(f'f' - ff'') \quad (4.2)$$

$$[(N/\sigma)g']' + (Bm/k)u_1^2(Nf'f'')' = u_1(f'g' - fg'') \quad (4.3)$$

$$C = m^2 = a(M_0^2 - 1)^{1/2}/2\mu_2, \quad u = u_1 f(\xi, \eta) \quad (4.4)$$

$$B = \frac{\sigma - 1}{\sigma} \left[ \frac{-\ln \varepsilon^{1/4}}{\varepsilon} \right]^{1/4}, \quad g = \frac{m}{k} H(\xi, \eta)$$

$$k = bQ'(0) \left( \frac{2}{\rho_3 a} \right)^{1/2} \left/ \left[ 4\rho_3 \mu_3 \left( \frac{2A}{\rho_3} \right)^{1/2} \right]^{1/4} \right., \quad N = \frac{\rho\mu}{\rho_2 \mu_2}$$

где  $\rho_3, \mu_3$  — значения  $\rho_2$  и  $\mu_2$  при  $S \rightarrow -\infty$ .

Выражения для коэффициента сопротивления трения  $C_f$  и числа Стантона имеют вид

$$C_f = \varepsilon^{1/2} \rho_2 \mu_2 m u_1^2 f''(\xi, 0), \quad N_{st} = \frac{\varepsilon^{3/4}}{(-\ln \varepsilon^{1/4})^{1/4}} \frac{\rho^2 \mu^2}{\sigma} \frac{ku_0^{\circ 2}}{H_0^{\circ}} u_1 g'(\xi, 0)$$

Граничные условия для (4.2) и (4.3)

$$f(\xi, 0) = f'(\xi, 0) = g(\xi, 0) = 0, \quad f'(\xi, \infty) = g'(\xi, \infty) = 1 \quad (4.5)$$

5. Решение системы (4.2), (4.3) при граничных условиях (4.5) легко провести любым из существующих стандартных методов для пограничного слоя. Заметим, однако, что полученные результаты едва ли для реальных значений чисел  $R$ , при которых существует ламинарный пограничный слой, давали бы хорошее совпадение с экспериментом, поскольку легко показать, что второй член разложения для теплового потока, отличается от главного множителем  $(\lg \varepsilon^{1/4})^{-1}$ .

Он возникает из-за эффекта теплопроводности в области 6. Целесообразно поэтому для расчета тепловых потоков пользоваться композитной системой уравнений сразу для всей возмущенной области течения, включающей члены в уравнениях и краевых условиях, которые отвечают всем существенным физическим эффектам для рассмотренных областей течения.

Удобно композитные уравнения представить в переменных области 5 (1.6). Однако из-за необходимости учесть переменность термодинамических параметров вместо (2.1) следует использовать переменные, включающие преобразование Дороницына:  $X = Es$

$$y = \int_0^n \rho dn$$

$$\psi = A^2 \xi f(\xi, \lambda), \quad H = \frac{bA}{(\rho_3 a)^{1/2}} \xi^{1/2} g(\xi, \lambda), \quad \lambda = \frac{1}{A} \left( \frac{a_0}{\rho_0} \right)^{1/2} \frac{y}{\xi^{1/2}}, \quad p = -A^2 a \zeta$$

$$A = (\mu_3 / 2a \sqrt{M_0^2 - 1})^{1/4}, \quad E = [8\rho_3^2 \mu_3 a^5 (M_0^2 - 1)^{3/2}]^{1/4} s$$

Уравнения и краевые условия

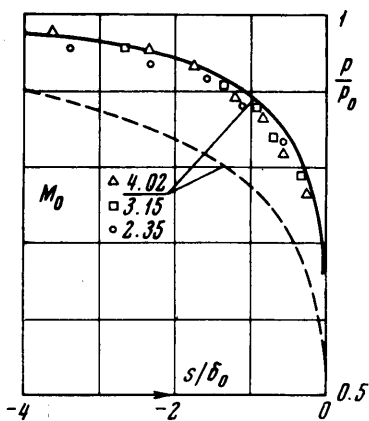
$$(Nf'')' = \zeta^{1/2} \frac{d\zeta}{dX} \left[ -\frac{\rho_0}{\rho} + \frac{1}{2} f'^2 - ff'' + \zeta(f'f' - ff'') \right]$$

$$[(N/\sigma)g']' = \zeta^{1/2} \frac{d\zeta}{dX} \left[ \frac{1}{2} f'g - fg' + \zeta(f'g - fg') \right] - \varepsilon^{1/4} (a_0'/b\rho^{1/2}) \zeta^{1/2} \left[ N \frac{\sigma - 1}{\sigma} f'f'' \right]$$

$$N = \rho\mu / \rho_3 \mu_3 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty$$

$$f' \rightarrow \{2f + (\rho_0 / \rho_e)\}^{1/2}, \quad g \rightarrow (2f)^{1/2} \quad \text{при } \eta = 0 \quad f = f' = g = 0$$

Зависимость  $\zeta(X)$  определяется при решении уравнений Эйлера для области 2. Расчеты показали, что асимптотика их при  $R \sim 10^4 - 10^6$  слабо отличается от решения получаемого в области «свободного взаимодействия» и вносит лишь небольшую погрешность в начале возмущенной области.



Фиг. 2

В остальной части распределение давления достаточно хорошо определяется уже при использовании однополосного метода интегральных соотношений. Сравнение результатов расчета (сплошные кривые) и экспериментальных данных Гамма, приведенных в работе [2], показано на фиг. 2. Пунктирной кривой показаны результаты расчета, проведенного в работе [2], где для теплоизолированного течения исследовался предельный случай  $M_0 \rightarrow \infty$  общего решения, данного в работе [1]. Характер распределения тепловых потоков и трения для  $M_0 = 3$ ,  $V = 0$ ,  $H_w/H_0 = 0.515$  показан на фиг. 1. Для удобства сравнения с результатами работы [2] на фиг. 1 и 2 расстояние отнесено к толщине вытеснения невозмущенного пограничного слоя, вычисленной в гиперзвуковом приближении.

6. Очевидно, что в области, непосредственно прилегающей к угловой точке тела и имеющей характерную длину  $\varepsilon^{3/2}$ , поперечный перепад давления становится того же порядка, что и продольный.

Повторяя рассуждения, проведенные выше для областей 2 и 3, получаем новое внутреннее двухслойное разложение со следующим масштабом функций течения в вязком подслое:

$$u \sim 1, \quad x \sim \varepsilon^{3/2}, \quad y \sim \varepsilon^{1/4}, \quad v \sim \varepsilon^{1/4} \quad (6.1)$$

Повторяя для каждой новой двухслойной области рассуждения, получаем асимптотическую последовательность уменьшающихся областей с масштабами функций течения в вязких слоях

$$u \sim 1, \quad x \sim \varepsilon^{2(1-k)}, \quad y \sim \varepsilon^{2-k}, \quad v \sim \varepsilon^k \quad \left( k = \frac{1}{2h} \right) \quad (6.2)$$

Нетрудно видеть, что течение в области 3 соответствует  $k = 1$ . Далее при  $k \rightarrow \infty$  течение соответствует  $y \sim x \sim \varepsilon^2$ ,  $u \sim v \sim 1$ . В этой малой области с длиной порядка длины свободного пробега молекулы продольные и поперечные градиенты вязких напряжений и давления имеют одинаковый порядок по величине. Тогда необходимо решать уравнения Навье — Стокса, а вернее Больцмана. Но для аэродинамических приложений рассмотрение такой малой окрестности, по-видимому, имеет лишь теоретический интерес.

Заметим лишь, что при подходе к угловой точке в соответствии с формулами (6.2) трение, которое пропорционально

$$\tau \sim \varepsilon^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

ведет себя  $\sim \varepsilon/\sqrt{x}$ . В области невозмущенного пограничного слоя и области 3 это дает уже известные оценки. Но при  $x \rightarrow 0$  (здесь  $x$  — расстояние от угловой точки) видно, что трение  $\tau$  стремится в бесконечность  $\sim x^{-1/2}$  так же, как вблизи передней кромки острого тела. Разумеется, последнее рассуждение носит только качественный характер.

Поступило 27 XII 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Матвеева Н. С., Нейланд В. Я. Ламинарный пограничный слой вблизи угловой точки тела. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4.
- 2 Olsou G. R., Messiter A. F. The hypersonic laminar boundary layer approaching the base of a slender body. AIAA Paper, 1968, No. 68, 67.