ФОРМИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ВЯЗКОСТИ, ДИФФУЗИИ И ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ

А. И. ИГОШИН

(*Москва*)

В работе рассматривается формирование одномерных нестационарных течений газа с учетом влияния теплопроводности, вязкости, диффузии и химических реакций. Аналогичная задача, но без учета влияния диффузии и химических реакций, рассматривалась в работе [1].

Показано, что влияние химических реакций при малых временах несущественно. Газ ведет себя как несжимаемая жидкость. Полученные результаты могут быть использованы для расчета течений газа с разрывными начальными данными с последующим численным интегрированием уравнений Навье — Стокса.

В качестве примеров рассматриваются течения бинарной смеси газов, возникающих при приложении к торцу движущегося поршня теплового потока (1) и при распаде произвольного разрыва (2).

Считается, что внутренние степени свободы молекул газа находятся в равновесии с поступательными.

1. Используются уравнения Навье — Стокса [2]

$$\rho \frac{dc_i}{dt} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho c_i V_i) = W_i \qquad (i=1, \ldots, r)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad \rho \frac{dv}{dt} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} = 0 \tag{1.1}$$

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - p_{xx}\frac{\partial v}{\partial x} + \sum_{i=1}^{r} U_i \frac{\partial}{\partial x}(\rho c_i V_i) - \sum_{i=1}^{r} U_i W_i$$

и уравнение состояния идеального газа

$$p = \rho k T \sum_{i=1}^{r} \frac{c_i}{m_i}$$

Здесь ρ — плотность газа, c_i — массовая концентрация i-компоненты газа, V_i — скорость диффузии i-компоненты газа, v — скорость центра масс газа, p_{xx} — тензор давления, T — температура газа, r — количество компонент газа, c_v — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, q_x — плотность потока энергии, W_i — отнесенная к единице объема массовая скорость образования i-компоненты вследствии химических реакций, U_i — внутренняя энергия единицы массы i-компоненты газа, m_i — масса молекулы i-компоненты газа, p — гидродинамическое давление, k — постоянная Больцмана, t — время, x — пространственная координата.

Вводятся новые переменные

$$t' = t, \qquad \psi = \int\limits_{x_w(t)} \rho dx$$

Здесь $x_w(t)$ в случае (1) — координата стенки, а в случае (2) — линия, совпадающая при $t = 0$ с линией разрыва начальных данных и двигающаяся со скоростью центра масс газа.

При $t = 0$ считаются заданными и постоянными

$$T = T^{\circ\pm}, \quad v = v^{\circ\pm}, \quad \rho = \rho^{\circ\pm}$$

Здесь верхние индексы плюс и минус обозначают соответственно парамеры при $\psi > 0$, $\psi < 0$.

Начальные концентрации $c_i^{\circ\pm}$ определяются из соотношений для химического равновесия, которое предполагается при $t = 0$.

При $\psi = 0$ выполняются равенства плотностей потоков массы, импульса, энергии, температуры [3, 4] (индекс w — значения на стенке).

В случае (1)

$$g_i^+ = 0 \quad (g_i = \rho c_i V_i), \quad p_{xx}^+ = p_{xxw}$$
$$v^+ = v_w, \quad q_x^+ = q_w, \quad T^+ = T_w \tag{1.2}$$

В случае (2)

$$g_i^+ = g_i^-, \quad p_{xx}^+ = p_{xx}^-, \quad v^+ = v^-, \quad q_x^+ = g_x^-, \quad T^+ = T^- \tag{1.3}$$

а также предполагается, что $c_i^+ = c_i^-$.

Вводятся безразмерные переменные и функции (помеченные черточкой)

$$\bar{z} = \frac{\psi}{\sqrt{t'}}\left(\frac{1}{\mu^{0+}\rho^{0+}}\right)^{1/2}, \quad \bar{\tau} = \sqrt{t'}\left(\frac{\rho^{0+}kT^{0+}}{\mu^{0+}m_1}\right)^{1/2} \quad \left(\mu = \frac{3}{4}\eta + \varkappa\right)$$

$$\bar{v} = v\left(\frac{m_1}{kT^{0+}}\right)^{1/2}, \quad \bar{T} = TT^{0+}, \quad \bar{p} = p\frac{m_1}{\rho^{0+}kT^{0+}}$$

Здесь μ — коэффициент вязкости, η — коэффициент сдвиговой вязкости, $\varkappa$ — коэффициент объемной вязкости. Система (1.1) в новых переменных приобретает вид (здесь и далее черточки опущены)

$$\rho\left(\frac{\partial c_i}{\partial\tau} - \frac{z}{\tau}\frac{\partial c_i}{\partial z}\right) + 2\rho\frac{\partial}{\partial z}g_i = 2\tau W_i \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} - \frac{z}{\tau}\frac{\partial\rho}{\partial z} + 2\rho^2\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial\tau} - \frac{z}{\tau}\frac{\partial v}{\partial z} - 2\frac{\partial}{\partial z}p_{xx} = 0$$

$$\rho c_v\left(\frac{\partial T}{\partial\tau} - \frac{z}{\tau}\frac{\partial T}{\partial z}\right) + 2\rho\frac{\partial q_x}{\partial z} + 2\rho p_{xx}\frac{\partial v}{\partial z} + 2\tau\sum_{i=1} U_i W_i - 2\rho\sum_{i=1} U_i\frac{\partial g_i}{\partial z} = 0$$

В случае бинарной смеси, состоящей из атомов и молекул типа O и O_2, между которыми происходит реакция $2O \rightleftarrows O_2$, выражения для плотностей потоков массы, импульса и энергии имеют вид [2]

$$g_a = -\frac{\rho(1-c_a)^2\mu}{2S\tau}\left[\frac{\partial}{\partial z}\frac{1-c_a}{1+c_a} - \frac{c_a - c_a^2}{1-c_a}\frac{\partial\ln p}{\partial z}\right] - \frac{k_T\mu\rho}{S\tau}\frac{\partial\ln T}{\partial z}$$

$$p_{xx} = p - \rho\mu\frac{1}{\tau}\frac{\partial v}{\partial z} \quad \left(S = \frac{\mu}{\rho D}, \quad P = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad k_T = \frac{D_a^T}{\rho D}\right) \tag{1.5}$$

$$q_x = -\frac{\rho\mu c_p}{P\tau}\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{k_T T g_a}{c_a(1-c_a^2)} + g_a\left(\frac{1}{2}T + U_a - U_m\right)$$

Уравнение состояния имеет вид

$$p = {}^1/_2\rho T(1 - c_a)$$

Здесь индексы a и m обозначают соответственно атомарную и молекулярную компоненту, S — число Шмидта, D — коэффициент бинарной диффузии, P — число Прандтля, λ — коэффициент теплопроводности, c_p — удельная теплоемкость смеси при постоянном давлении, k_T — критериальное термодиффузионное отношение, $D_a{}^T$ — коэффициент термодиффузии атомарной компоненты.

2. Для малых времен функции ρ, c_i, v, T будем искать в виде рядов

$$f = \sum_{n=0} f_n(z)\tau^n$$

В таком же виде представляются μ, P, S, k_T, c_v, c_p, W_i, так как они являются функциями от ρ, c_i, T и конечны при $t = 0$.

При подстановке в (1.4) рядов получается

$$-{}^1/_2 z c_{i0}' + g_{i0}' = 0, \qquad -{}^1/_2 z\rho_0' = 0 \quad \text{или} \quad \rho_0 = \text{const}$$

$$-{}^1/_2 z v_0' + p_{xx0}' = 0 \tag{2.1}$$

$$-{}^1/_2 z c_{v0} T_0' + q_{x0}' + p_{xx0} v_0' - \sum_{i=1}^{r} U_{i0} g_{i0}' = 0$$

$${}^1/_2 c_{i1} - {}^1/_2 z c_{i1}' + g_{i1}' = 0, \qquad {}^1/_2 \rho_1 - {}^1/_2 z\rho_1' + \rho_0^2 v_0' = 0$$

$${}^1/_2 v_1 - {}^1/_2 z v_1' + p_{xx1}' = 0 \tag{2.2}$$

$${}^1/_2 c_{v0}(T_1 - zT_1') - {}^1/_2 c_{v1} z T_0' + q_{x1}' +$$

$$+ p_{xx0} v_1' + p_{xx1} v_0' - \sum_{i=1} (U_{i0} g_{i1}' - U_{i1} g_{i0}') = 0$$

Штрих обозначает производные по z, нижние индексы 0 и 1 обозначают соответственно нулевое и первое приближение. Аналогичные системы уравнений выписываются и для следующих приближений.

Как видно из (2.1), при достаточно малых временах газ ведет себя как несжимаемая жидкость.

Граничными условиями при $z \to \pm\infty$ будут

$$\begin{gathered} z^n T_n{}^\pm \to T^{\circ\pm}\Delta_n, \qquad z^n v_n{}^\pm \to v^{\circ\pm}\Delta_n \\ z^n \rho_n{}^\pm \to \rho^{\circ\pm}\Delta_n, \qquad z^n c_{in}{}^\pm \to c_i{}^{\circ\pm}\Delta_n \\ \Delta_n = 1 \quad (n = 0), \qquad \Delta_n = 0 \quad (n > 0) \end{gathered} \tag{2.3}$$

При $z = 0$ в случае (1) из (1.2) следует:

$$g_{in}^+ = 0, \; p_{xxn}^+ = p_{xxwn}, \; v_n^+ = v_{wn}, \; q_{xn}^+ = q_{wn}, \; T_n^+ = T_{wn}$$

Здесь предполагается, что скорость поршня v_w и его температуру T_w можно представить в виде

$$f_w = \sum_{n=0}^{\infty} \tau f_{wn}$$

В случае (2) из (1.3) следует:

$$g_{in}^{+} = g_{in}^{-}, \quad p_{xxn}^{+} = p_{xxn}^{-}, \quad v_n^{+} = v_n^{-}$$

$$q_{xn}^{+} = q_{xn}^{-}, \quad T_n^{+} = T_n^{-}, \quad c_{in}^{+} = c_{in}^{-}$$

В (2.1) — (2.5) не входят члены, учитывающие химические реакции, т. е. при малых временах химические реакции не влияют на решение.

Для бинарной смеси выражения для потоков после разложения в ряд имеют вид

$$g_a = \tau^{-1} g_0 + g_1 + \ldots$$

$$g_0 = -\frac{\rho_0 \mu_0 c_0'}{S_0} - \frac{c_0}{2 S_0 p_0} [\rho_0 \mu_0 (1 - c_0^2) p_0'] - \frac{k_{T0} \mu_0 \rho_0 T_0'}{S_0 T_0}$$

$$p = p_0 + \tau p_1 + \ldots, \qquad p_0 = {}^1/_2 \rho_0 T_0 (1 + c_0)$$

$$p_{xx} = \tau^{-1} p_{xx0} + p_{xx1} + \ldots, \qquad p_{xx0} = -\rho_0 \mu_0 v_0'$$

$$q_x = q_{x0} \tau^{-1} + q_{x1} + \ldots$$

$$q_{x0} = -\frac{\rho_0 \mu_0 c_{p0}}{P_0} T_0' + \frac{k_{T0} T_0 g_0}{(1 - c_0^2) c_0} + g_0 \left(\frac{1}{2} T_0 + U_{a0} - U_{m0} \right)$$

$$(c_a = c_0 + \tau c_1 + \ldots)$$

3. При малых отклонениях от начальных данных и при малых временах представляем искомые функции в виде

$$f = f^\circ + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \tau^n$$

Здесь f° — значение при $t = 0$.

Тогда в случае r-компонентной смеси в нулевом приближении получается система линейных дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=1}^{r-1} A_1^{ij} c_0^{j\prime\prime} + A_3^i T_0'' - \frac{1}{2} z c_0^{i\prime} = 0, \quad \rho_0 = 0 \quad (i = 1, \ldots, r-1)$$

$$B_1 v_0'' - \frac{1}{2} v_0' z = 0, \quad \sum_{i=1}^{r-1} K_1^i c_0^{j\prime\prime} + K_3 T_0'' - \frac{1}{2} z T_0' = 0 \qquad (3.1)$$

Здесь A_1^{ij}, A_3^i, B_1, K_1^i, K_3 — постоянные, зависящие от начальных данных. Граничные условия (2.3) — (2.5) принимают вид

при $z \to \pm\infty$

$$z^n v_n^{\pm} \to 0, \quad z^n T_n^{\pm} \to 0, \quad z^n c_n^{\pm} \to 0, \quad z^n \rho_n^{\pm} \to 0$$

при $z = 0$ в случае (1)

$$g_n^{+} = 0, \quad v_w^\circ \Delta_n + v_{wn}^{-} = v^{\circ +} \Delta_n + v_n^{+}$$

$$q_n^{+} = q_{wn}, \quad T_w^\circ \Delta_n + T_{wn} = T^{\circ +} \Delta_n + T_n^{+}$$

при $z = 0$ в случае (2)

$$c^{\circ +} \Delta_n + c_n^{+} = c^{\circ -} \Delta_n + c_n^{-}, \quad g_n^{+} = g_n^{-}$$

$$v^{\circ +} \Delta_n + v_n^{+} = v^{\circ -} \Delta_n + v_n^{-}, \quad p_{xxn}^{+} = p_{xxn}^{-}$$

$$T^{\circ +} \Delta_n + T_n^{+} = T^{\circ -} \Delta_n + T_n^{-}, \quad q_{xn}^{+} = q_{xn}^{-}$$

$$(g_n = A_1 c'_n + A_2 \rho'_n + A_3 T'_n,$$

$$p_{xxn} = p^\circ \Delta_{n-1} + p_{n-1} + B_1 v_n', \quad q_{xn} = E_1 c_n' + E_2 \rho_n' + E_3 T_n')$$

Решение (3.1) находится в виде:

$$v_0 = \nu_0 \int_0^z \exp \frac{x^2}{4B_1}\, dx \tag{3.2}$$

$$c_0{}^i = \int_0^z \left[\left(\sum_{j=1}^{r-1} a_j{}^i \sin \alpha_j x^2 + b_j{}^i \cos \alpha_j x^2 \right) \exp \frac{-\beta x^2}{2} \right] dx$$

$$T_0 = \int_0^z \left[\left(\sum_{j=1}^{r-1} \tau_j \sin \alpha_j x^2 + \theta_j \cos \alpha_j x^2 \right) \exp \frac{-\beta x^2}{2} \right] dx$$

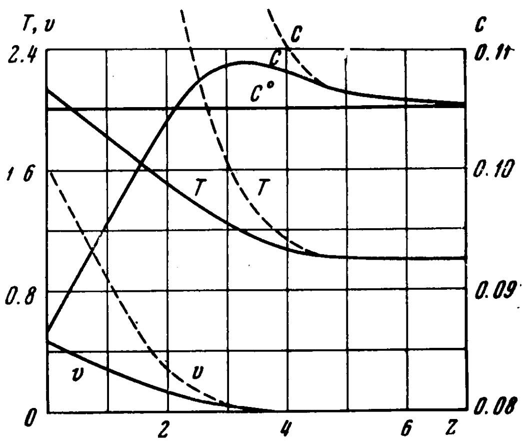
$$(\nu_0, \beta, a_j{}^i, b_j{}^i, \tau_j, \theta_j, \alpha_j = \text{const})$$

Из постоянных $r+1$ будут определяться граничными условиями, остальные получаются из системы алгебраических уравнений, образующейся при подстановке (3.2) в (3.1). Система уравнений (2.1) решалась численно на ЭВМ. Выражения (3.2) использовались как асимптотическое решение системы (2.1) при $z \to \infty$. На фигуре показан пример расчета распределения скорости, температуры и атомарной концентрации в случае движущегося поршня. Рассматривался кислородоподобный газ с начальными данными

$$c^\circ = 0.105, \quad T^\circ = 1$$
$$\rho^\circ = 1, \quad v^\circ = 0$$

При расчете было принято, что

$$k_T = 0,$$
$$U_a - U_n = 10.25 - 0.25\ T$$
$$\mu = MT, \quad M = 1,$$
$$c_{va} = 1.5, \quad c_{pa} = 2.5$$
$$c_{vm} = 1.75, \quad c_{pm} = 2.25,$$
$$S = 1, \quad P = 0.75$$



Пунктирными линиями обозначены графики асимптотических формул (3.2). Как видно из фигуры, формулы (3.2) хорошо описывают течение газа до z порядка 5.

Концентрация атомарной компоненты имеет максимум, убывая при $z \to 0$. Это связано с доминирующей ролью бародиффузии при малых z, где находится область высокого давления, а при бародиффузии молекулы с меньшим молекулярным весом перемещаются в зону с более низким давлением. Если бародиффузия отсутствует, концентрация будет постоянной величиной.

Автор благодарит Ю. А. Демьянова, под руководством которого выполнена эта работа.

Поступило 13 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянов Ю. А., Киреев В. Т. К анализу одномерных нестационарных течений газа с учетом теплопроводности и вязкости. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 2.
2. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р., Молекулярная теория газов и жидкостей. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
4. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., Гостехиздат, 1950.