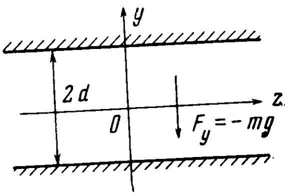
РАЗРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГАЗА В ПОЛЕ ВНЕШНИХ МАССОВЫХ СИЛ

В. Е. ЯНИЦКИЙ

(*Москва*)

Рассматривается функция распределения по скоростям для газа, движущегося между параллельными плоскостями. Показано, что в поле массовых сил, действующих поперек канала, функция распределения будет разрывной в фазовом пространстве на некоторой гиперповерхности при любых числах Кнудсена. Найдена формула для изменения разрыва при удалении от одной из границ внутрь объема и приведена оценка толщины слоя, внутри которого разрыв является существенным.

Функция распределения газа f, движущегося между параллельными плоскостями, в свободно-молекулярном режиме оказывается разрывной по скоростям [1, 2]. Однако с учетом столкновений она непрерывна внутри объема при любом конечном числе Кнудсена K [1]. Разрывные функции, используемые в работах [1–5] для задач Куэтта и Пуазейля, надо тогда рассматривать как некоторые аппроксимации реальной непрерывной функции распределения, справедливые в определенной области изменения K. Из рассмотренной ниже задачи следует, что внешние массовые силы могут вызвать разрыв точной функции f при любых числа K.



Фиг. 1

Пусть течение газа происходит между параллельными плоскостями, расстояние между которыми $2d$. На каждый атом газа с массой m действует внешняя сила поперек канала $F_y = -mg = \mathrm{const}$ (фиг. 1). В работе используется модельное кинетическое уравнение [1, 2]. Предполагая, что все параметры газа зависят лишь от y (координатная ось y перпендикулярна каналу и пересекает плоскости в точках $y = \pm d$), получим для функции распределения f

$$c_y \frac{\partial f}{\partial y} - g \frac{\partial f}{\partial c_y} = An(f_{eq} - f) \qquad (A = \mathrm{const})$$

$$f_{eq} = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{(\mathbf{c}-\mathbf{q})^2 m}{2kT}\right] \left(\frac{1}{An} \equiv \tau\right) \tag{1}$$

Здесь $n = n(y)$ — концентрация атомов газа, f_{eq} — локально-максвелловское распределение, $T = T(y)$ — температура газа, $\mathbf{q} = q(y)$ — среднемассовая скорость, c_y — скорость атома в направлении оси y, k — постоянная Больцмана, τ — величина порядка времени между столкновениями.

Наиболее общий вид граничных условий для f следующий:

$$f(y = -d, c_x, c_y > 0, c_z) = -\int \frac{\xi_y}{c_y} W_{-d}(\mathbf{c}, \boldsymbol{\xi}) f(y = -d, \boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi} \qquad (\xi_y < 0) \tag{2}$$

$$f(y=+d, c_x, c_y<0, c_z) = -\int \frac{\xi_b}{c_y} W_{+d}(\mathbf{c}, \xi) f(y=+d, \xi)\, d\xi \quad (\xi_b > 0) \tag{3}$$

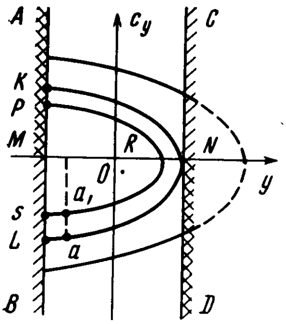
Здесь $W_{\mp d}(\mathbf{c}, \xi)d\mathbf{c}$ — вероятность того, что частица, падающая на стенку со скоростью ξ, отразится со скоростью в интервале $(\mathbf{c}, \mathbf{c}+d\mathbf{c})$ (для нижней и верхней плоскости соответственно).

Из (2) и (3) вытекает, что на границе f отраженных частиц может отличаться от f падающих, поэтому плоскость $c_y = 0$ может быть поверхностью разрыва f при $y = \pm d$.

Обозначим правые части (2) и (3) через $f_{-d}^{+}(\mathbf{c})$ и $f_{+d}^{-}(\mathbf{c})$ соответственно; кроме того, введем обозначения

$$\varphi \equiv Anf_{eq}, \qquad \psi \equiv An \tag{4}$$

Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (1) с граничными условиями (2) и (3) можно превратить в интегральное для f. Для этого, считая функции $\varphi(y, \mathbf{c})$, $\psi(y)$, $f_{+d}^{-}(\mathbf{c})$, $f_{-d}^{+}(\mathbf{c})$ известными, нужно решить относительно функции f уравнение



Фиг. 2

$$c_y \partial f / \partial y - g \partial f / \partial c_y = \varphi - \psi f \tag{5}$$

с граничными условиями

$$f(y=-d, c_x, c_y>0, c_z) = f_{-d}^{+}(\mathbf{c})$$
$$f(y=+d, c_x, c_y<0, c_z) = f_{+d}^{-}(\mathbf{c}) \tag{6}$$

Переменные c_x и c_z будут входить в (5) и и (6) как параметры, поэтому все фазовое пространство можно представить на плоскости yc_y (фиг. 2). Характеристики уравнения (5) задаются системой уравнений

$$dy / d\tau = c_y, \qquad dc_y / d\tau = -g \tag{7}$$

Они будут параболами с осью симметрии, совпадающей с y. На каждой характеристике

$$df / d\tau = \varphi(\tau) - \psi(\tau) f(\tau) \tag{8}$$

Здесь $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $f(\tau)$ — значения функций φ, ψ, f на выбранной характеристике $c_y(\tau)$, $y(\tau)$.

Линия NL (нижняя ветвь параболы, касающейся CD разделяет пространство (фиг. 2) на область влияния граничных условий, заданных на AM (область выше NL), и на область влияния граничных условий на ND (область ниже NL). Значения f в этих областях обозначим f^{+} и f^{-} соответственно. Решение (8) даст

$$f^{\pm}(\tau) = \exp[-\Psi(\tau)] \left\{ R^{\pm} + \int_0^{\tau} \varphi(t) \exp \Psi(t)\, dt \right\} \tag{9}$$

$$\Psi(\tau) = \int_0^{\tau} \psi(t)\, dt$$

Определим F^{+} и F^{-} как предельные значения f^{+} и f^{-} на линии NL. Возьмем характеристику PRS, близкую к KNL (фиг. 2) ($KP \equiv \varepsilon$ — малая величина), и на ней точку a_1, соответствующую данному y, тогда $F^{+}(a)$, где a соответствует тому же y и лежит на NL, есть

$$F^{+}(a) \equiv \lim f^{+}(a_1) \qquad (\varepsilon \to 0)$$

Аналогично определяется $F^-(a)$.

Легко показать, что выражение (9) остается справедливым и для $F^\pm$. Очевидно, функцию F^+ можно определить на всей характеристике KNL, уравнение которой

$$c_y = \sqrt{4gd} - g\tau, \quad y = -d + \tau\sqrt{4gd} - {}^1/_2 g\tau^2 \tag{10}$$

$$(0 \leqslant \tau \leqslant 2\vartheta) \qquad \vartheta \equiv 2\sqrt{d/g}$$

Функция F^- определена только на участке NL $(\vartheta \leqslant \tau \leqslant 2\vartheta)$. Обозначим через φ°, ψ° значения φ, ψ на характеристике KNL, тогда величины $R^\pm$ определяются из условий

$$F^+(\tau = 0) = f_{-d}{}^+(K), \quad F^-(\tau = \vartheta) = f_{+d}{}^-(N) \tag{11}$$

Тогда согласно (9)

$$F^+(\tau) = \left[f_{-d}{}^+(K) + \int\limits_0^\tau \varphi^\circ(t)\exp\Psi^\circ(t)\,dt\right]\exp[-\Psi^\circ(\tau)]$$

$$\Psi^\circ(\tau) = \int\limits_0^\tau \psi^\circ(t)\,dt \tag{12}$$

$$F^-(\tau) = \left[f_{+d}{}^-(N)\exp\Psi^\circ(\vartheta) - \int\limits_0^\vartheta \varphi^\circ(t)\exp\Psi^\circ(t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^\tau \varphi^\circ(t)\exp\Psi^\circ(t)\,dt\right]\exp[-\Psi^\circ(\tau)] \tag{13}$$

Вычитая из (12) выражение (13), найдем $F^+ - F^-$ — скачок f на линии NL. Введем новый параметр $\eta \equiv \tau - \vartheta$, тогда

$$\Delta(\eta) \equiv F^+(\eta) - F^-(\eta) = [F^+(\vartheta) - f_{+d}{}^-(N)]\exp\left[-\int\limits_0^\eta \psi^\circ(\vartheta + \lambda)\,d\lambda\right] \tag{14}$$

Легко показать, что

$$F^+(\vartheta) = \lim f^+(y = +d,\ c_y > 0) \equiv f_{+d}{}^+(N) \quad (c_g \to 0)$$

Поэтому величина Δ_0

$$\Delta_0 \equiv F^+(\vartheta) - f_{+d}{}^-(N) = f_{+d}{}^+(N) - f_{+d}{}^-(N)$$

есть скачок f на верхней границе $y = +d$ при $c_y = 0$.

В (14) от η удобнее перейти к $x \equiv d - y$, тогда с учетом (4)

$$\Delta(\eta) = \Delta_0\exp\left[-A\int\limits_0^x \frac{n(x)\,dx}{\sqrt{2gx}}\right] \tag{15}$$

Из (10) определяется уравнение линии NL, на которой происходит разрыв

$$c_y = -\sqrt{2g(d-y)} = -\sqrt{2gx} \tag{16}$$

Если нет столкновений, то $A = 0$ и тогда $\Delta(x) = \Delta_0 = \text{const}$ — величина разрыва остается постоянной. Если $g = 0$ и $A \neq 0$, то $\Delta(x = 0) = \Delta_0$ и при всех $x \neq 0$ $\Delta(x) = 0$. Таким образом, разрыв локализуется на границе, не распространяясь внутрь объема.

Величина Δ_0 скачка f на стенке существенно зависит от законов отражения молекул от стенки, степени разряжения (числа K) и величины g. Например, в случае зеркально-диффузной схемы отражения и $g = 0$ относительная величина скачка $\Delta_0 / f \sim K$.

Так как в (15) входит экспонента, то при определенных условиях $\Delta(x)$ будет отлична от нуля лишь в тонком слое, прилегающем к верхней плоскости. Считая, что в этом слое $n(x) \approx n_d = \text{const}$, и учитывая, что $An_d = 1 / \tau_d$, формулу (15) можно привести в виду

$$\Delta(x) = \Delta_0 \exp\left[-\frac{\sqrt{2F_d}}{K_d}\left(\frac{x}{2d}\right)^{1/2}\right] \tag{17}$$

Здесь введены числа Фруда и Кнудсена

$$F_d = \frac{w_d^2}{2gd}, \qquad K_d = \frac{w_d \tau_d}{2d}$$

(w_d — характерная тепловая скорость при $y = d$)

Формула (17) позволяет дать оценку для толщины слоя δ

$$\frac{\delta}{2d} \sim \frac{K_d^2}{F_d} \qquad \text{при} \frac{\Delta(x)}{\Delta_0} \sim 1$$

Из всего сказанного следует, что если Δ_0 существенно не нуль (например, в достаточно разреженном газе), то при любой поперечной силе существует достаточно тонкий слой, в котором $\Delta(x) \neq 0$.

Поступило 1 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967, стр. 118—122, 253—258.
2. Gross E. P., Jackson E. A., Ziering S. Boundary value problems in kinetic theory of gases. Ann. Phys., 1957, vol. 1, No. 2. (Рус. перев.: Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1958, № 5.)
3. Gross E. P., Ziering S. Kinetic theory of linear shear flow. Phys. Fluids, 1958, vol. 1, No. 1. (Рус. перев.: Механика, Период. сб. перев. иностр. статей, 1959, № 6.)
4. Суетин П. Е., Породнов Б. Т. Кинетическая теория движения газа между двумя параллельными плоскостями при любых числах Кнудсена. Ж. техн. физ., 1967, т. 37, № 1.
6. Породнов Б. Т., Суетин П. Е. Течение разреженного газа между двумя параллельными плоскостями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.