

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. Е., Гиневский А. С. Акустическое воздействие на аэродинамические характеристики турбулентной струи. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4.
2. Секундов А. Н., Яковлевский О. В. Некоторые вопросы перехода канального течения в струйное. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 3.
3. Стрэтт Дж. В. (Лорд Рэлей) Теория звука. М. Гостехиздат, 1955, № 2.
4. Sato H. The stability and transition of two-dimensional jet. J. Fluid Mech., 1960, vol. 7, pt 1.
5. Schade H., Michalke A. Zur Entstehung von Wirbeln in einer freien Grenzschicht. Z. Flugwiss., 1962, H. 4/5.
6. Brown G. B. On vortex motion in gaseous jets and the origin of their sensitivity to sound. Proc. Phys. Soc., 1937, vol. 47, No. 261.
7. Вулис Л. А., Джаугаштин К. Е., Кельмансон И. А. Некоторые данные о влиянии турбулизатора на структуру течения в свободной струе. Тепло- и массоперенос. М., «Энергия», 1968, т. 1.
8. Биркгоф Г. Неустойчивость Гельмгольца и Тейлора. В кн.: «Гидродинамическая неустойчивость». М., «Мир», 1964.

ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ ГИПОТЕЗЫ МИЛЛИОНЩИКОВА К ЗАДАЧЕ О ВЫРОЖДЕНИИ ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

А. П. МИРАВЕЛЬ

(Москва)

Рассматривается модельный пример эволюции спектра затухающей изотропной турбулентности с начальными ненулевыми третьими моментами специального вида, построенными исходя из некоторой вихревой модели.

1. Статистическое описание турбулентности при помощи совокупности моментов гидродинамических полей различных порядков (в соответствии с общим методом Фридмана — Келлера) приводит, как известно, к бесконечной системе зацепляющихся дифференциальных уравнений. В связи с этим в теории турбулентности возникает «проблема замыкания», т. е. выбора дополнительных гипотез, позволяющих замкнуть систему уравнений для нескольких низших моментов и получить с ее помощью приближенные значения этих моментов (см., например, [1], § 19).

Простейший метод замыкания уравнений с помощью пренебрежения моментами некоторого порядка по сравнению с моментами низших порядков, который использовался в первой работе Л. В. Келлера и А. А. Фридмана [2], имеет определенный смысл лишь в применении к очень слабой турбулентности, приближающейся к заключительному периоду вырождения. Наибольший же интерес в реальных условиях представляет собой случай развитой турбулентности при больших числах Рейнольдса. Для такой турбулентности сравнительно простым и естественным представляется метод замыкания, предложенный еще в 1941 г. М. Д. Миллионщиковым [3] и опирающийся на гипотезу квазинормальности (иначе, гипотезу Миллионщикова), согласно которой семиинварианты четвертого поля скорости считаются равными нулю (т. е. допускается, что четвертые моменты выражаются через вторые по формулам, справедливым для многомерных нормальных распределений вероятностей). Экспериментальной проверке этой гипотезы были посвящены работы Уберои [4], показавшего, что в случае турбулентности за решеткой в аэродинамической трубе гипотеза Миллионщикова выполняется с высокой степенью точности для всей совокупности возмущений, содержащих основную долю турбулентной энергии.

Первые применения гипотезы Миллионщикова к задаче о вырождении изотропной турбулентности принадлежат Праудмену и Риду [5] и Тацуми [6], получившим для больших начальных промежутков времени вырождения вполне разумные результаты. Позже Огура [7] численно проинтегрировал систему моментных уравнений, замкнутых при помощи гипотезы Миллионщикова, для некоторых простых моделей начальных условий и обнаружил, что через какое-то время получающиеся результаты становятся физически невозможными — соответствующий спектр энергии оказывается отрицательным при некоторых значениях волновых чисел.

Однако расчеты Огура (так же как и более ранние расчеты Праудмена — Риды и Тацуми) были произведены при довольно искусственном предположении о том, что в начальный момент $t = 0$ третьи моменты поля скорости тождественно равны нулю, т. е. полностью отсутствует передача энергии по спектру, в реальных условиях всегда играющая очень большую роль (на последнее обстоятельство недавно обратил внимание М. Д. Миллионщиков [8]). Поэтому представляется целесообразным повторить расчеты Огура при более реальных начальных условиях и, прежде всего, при

отказе от предположения о равенстве нулю начальных третьих моментов. Первые результаты в этом направлении и содержатся в данной заметке.

2. В принципе начальные значения вторых и третьих моментов поля скорости можно попытаться извлечь из данных измерений, относящихся к достаточно близкой к изотропии турбулентности за решеткой в центральной части аэродинамической трубы. Однако в настоящее время экспериментальные данные такого рода (особенно относящиеся к третьим моментам) имеют еще очень небольшую точность и не кажутся заслуживающими доверия. Другой путь состоит в расчете третьих моментов исходя из некоторых модельных представлений о распределении «вихрей» и их форме (см., например, работу [9]). Представляется, что пока наиболее целесообразен «средний путь», при котором в основу кладется та или иная модель распределения вихрей, но при этом расчеты проводятся лишь для тех моделей, которые приводят к форме третьих моментов, качественно согласующейся с данными непосредственных измерений.

Теоретически простейшим способом получения начального «случайного поля скорости», родственного полю скорости изотропной турбулентности, будет создание в первоначально неподвижной жидкости системы «случайно разбросанных» локальных возмущений (вихрей). Здесь ограничимся простейшими цилиндрическими вихрями с осью, параллельной оси x_3 , поле скоростей которых, следуя Таунсенду [10], можно определить формулой

$$v_i(x) = \varepsilon_{ij} \partial [\exp(-1/2 \alpha^2 x^2)] / \partial x_j \quad (x^2 = x_1^2 + x_2^2) \quad (1)$$

Здесь ε_{ij} — инвариантный кососимметрический двумерный тензор с компонентами, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$, $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$, $1/\alpha$ — характерный масштаб вихрей. Если мы рассмотрим систему возмущений вида (1), однородно разбросанных по плоскости x_1, x_2 в соответствии с законом Пуассона с параметром σ (т. е. так, что на каждый элемент площади ΔS в среднем попадает $\sigma \Delta S$ вихрей, причем распределение вихрей на двух непересекающихся площадках взаимно независимы) и имеющих взаимно независимые и одинаково распределенные амплитуды $a^{(m)}$, то такой системе будет отвечать случайное поле скорости вида

$$V_i(x) = \sum_m a^{(m)} \varepsilon_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \exp \left[-\frac{\alpha^2}{2} (x - x^{(m)})^2 \right] \quad (2)$$

где $x^{(m)} = \{x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, 0\}$ — система случайных точек, распределенных по закону Пуассона с плотностью σ , а $a^{(m)}$ — случайные множители. В частном случае, когда все амплитуды равны между собой (скажем, равны единице), формула (2) приобретает более простой вид

$$V_i(x) = \sum_m \varepsilon_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \exp \left[-\frac{\alpha^2}{2} (x - x^{(m)})^2 \right] \quad (3)$$

Нетрудно проверить, что если в формуле (2) случайные величины $a^{(m)}$ имеют симметричное распределение вероятностей (т. е., грубо говоря, с равной вероятностью принимают и положительное и отрицательное значение), то случайное поле (2) будет однородным и изотропным полем двумерных векторов; если же распределение $a^{(m)}$ несимметрично (в частности, в случае (3), когда все $a^{(m)}$ с вероятностью единица принимают значение $+1$), то поле (3) будет иметь характеристики, инвариантные относительно переносов и вращений плоскости, но не относительно отражений.

Определение статистических характеристик случайного поля (3) сводится к нахождению соответствующих характеристик следующей случайной функции:

$$u(x) = \sum_m \delta(x - x^{(m)}) \quad (4)$$

(по поводу этой функции см., например, [11]). Случайная функция (3) выражается через (4) следующим образом:

$$V_i(x) = \int u(x') h_i(x - x') dx' \quad (5)$$

$$h_i(x - x') = \varepsilon_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \exp \left[-\frac{\alpha^2}{2} (x - x')^2 \right]$$

По формуле (5) после несложных вычислений для спектра энергии $E(k)$ и спектрального тензора третьего порядка поля скорости, определенных в [1], получаем

следующие выражения:

$$E(k) = 4\pi \frac{\sigma}{\alpha^4} k^4 \exp\left(-\frac{k^2}{\alpha^2}\right) \quad (6)$$

$$F_{ijl}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = i \frac{\sigma}{\alpha^4} \varepsilon_{ilm} (k_m + k'_m) (\mathbf{k}\mathbf{k}'\delta_{jl} - k_l k'_j) \exp\left(-\frac{k^2 + k'^2 + \mathbf{k}\mathbf{k}'}{\alpha^2}\right)$$

Спектральный тензор $F_{ijl}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ полностью определяется скалярной функцией $ik_l F_{ljj}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, которая в данном случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Gamma(k, k', \mu) &= ik_l F_{ljj}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \\ &= \frac{\sigma}{\alpha^4} \text{sign}(k' - k) \mu k^2 k'^2 (1 - \mu^2)^{1/2} \exp\left(-\frac{k^2 + k'^2 + \mu k k'}{\alpha^2}\right) \left(\mu = \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{kk'}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

3. Для однородной изотропной турбулентности система моментных уравнений, замкнутая с использованием гипотезы Миллионщикова, имеет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right) E(k, t) &= \int_0^{\infty} \int_{(k-k')}^{k+k'} F(k, k', k'', t) dk'' dk' \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + \nu(k^2 + k'^2 + k''^2)\right] F(k, k', k'', t) &= \end{aligned} \quad (8)$$

$$= \varphi_1(k, k', k'') E(k, t) E(k', t) + \varphi_2(k, k', k'') E(k'', t) E(k, t) + \varphi_3(k, k', k'') E(k', t) E(k'', t)$$

Здесь ν — кинематическая вязкость,

$$k''^2 = k^2 + k'^2 + 2\mu k k'$$

$$F(k, k', k'') = 8\pi^2 k k' k'' \Gamma(k, k', k'')$$

$$\varphi_1(k, k', k'') = (q / 16k^3 k'^3 k''^3) (k'^2 - k^2) (k''^2 - k^2 - k'^2)$$

$$\varphi_2(k, k', k'') = (q / 16k^3 k'^3 k''^3) [k^2 (k''^2 - k^2 + k'^2) - k'^2 (k''^2 - k^2 - k'^2)]$$

$$\varphi_3(k, k', k'') = (q / 16k^3 k'^3 k''^3) [k''^2 (k''^2 - k^2 - k'^2) - k'^2 (k''^2 + k^2 - k'^2)]$$

$$q = 4k^2 k'^2 - (k''^2 - k^2 - k'^2)^2$$

Численное решение задачи основано на конечно-разностной аппроксимации системы уравнений (8) с начальными условиями (6), (7) при помощи явной разностной схемы [12] и одновременного приведения системы к безразмерному виду.

Безразмерные величины и параметры вводятся следующим образом:

$$t = n\Delta t, \quad k = K\Delta k, \quad k' = j\Delta k, \quad k'' = i\Delta k, \quad k_* = N\Delta k, \quad \alpha = K_0\Delta k$$

($n=0, 1, 2, \dots; i, j, k=0, 1, 2, \dots, N$)

$$E(k, t) = E_0 E(K, n), \quad F(k, k', k'', t) = F_0 F(K, j, i, n)$$

(E_0, F_0 — постоянные)

$$R = \nu^{-1} (\Delta t)^{-1} (\Delta k)^{-2}, \quad \sigma_1 = (\Delta k)^2 (\Delta t) E_0^{-1} F_0, \quad \sigma_2 = \Delta k \Delta t E_0 F_0^{-1}$$

Функции

$$E^n(K) = (1/E_0) E(K\Delta k, n\Delta t), \quad F^n(K, j, i) = (1/F_0) F(K\Delta k, j\Delta k, i\Delta k, n\Delta t)$$

$$T(K) = \tau_1 \int_0^N \int_{|K-j| \leq N} F^0(K, j, i) di dj$$

определены в узлах сетки $K\Delta k, n\Delta t$ и $K\Delta k, j\Delta k, i\Delta k, n\Delta t$ соответственно, а Δk и Δt — шаги сетки по k, k', k'' и t . Из-за громоздкости аппроксимирующая конечно-разностная система уравнений здесь не приводится.

Результаты численного решения системы (8) при следующих значениях параметров, $R = 8 \cdot 10^3, \sigma_1 = 0.016, \sigma_2 = 0.0035, N = 16, k_0 = 4$ представлены на фиг. 2, 3, 4. Функция,

$$T(K) = \delta_1 \int_0^N \int_{|K-j| \leq N} F^0(K, j, i) di dj$$

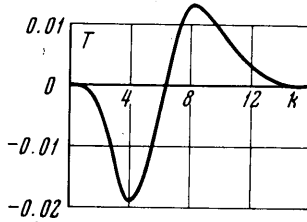
определяющая перераспределение энергии по спектру в начальный момент, приведена на фиг. 1.

Эволюция спектра энергии при начальных нулевых (т. е. в постановке, рассмотренной Огура) и ненулевых третьих моментах показана на фиг. 2 и 3 соответственно.

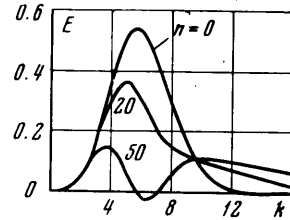
Фиг. 4 иллюстрирует вырождение энергии турбулентности

$$\zeta = \langle V^2(n) \rangle / \langle V^2(0) \rangle$$

(кривая 1 соответствует вырождению с начальными нулевыми третьими моментами, 2 — с ненулевыми третьими моментами).

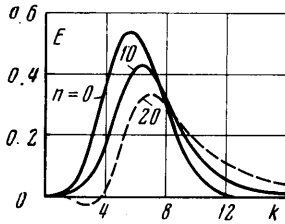


Фиг. 1

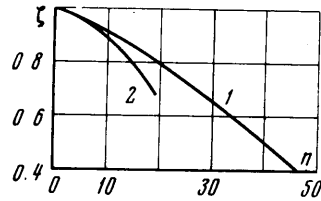


Фиг. 2

Кривые, приведенные на фиг. 3, дают разумное описание начального этапа эволюции спектра энергии, но через некоторое время и в данном случае получается противоречие (и притом даже быстрее, чем в модели Огура). Этот результат не кажется очень удивительным, так как начальная форма спектра $E(k)$ в данном случае выбрана такой же, как и в работе [7], а эта форма, как хорошо известно (см., напри-



Фиг. 3



Фиг. 4

мер, [1], § 15), довольно хорошо описывает эмпирические данные, относящиеся к сильно вырожденной турбулентности (когда третьи моменты уже становятся относительно небольшими), но плохо согласуется с данными для развитой турбулентности с резко отличными от нуля третьими моментами (выбор такой формы $E(k)$ был обусловлен, в частности, желанием иметь возможность проверки численного алгоритма при наличии сравнения с результатами Огура).

Приведенные результаты, относящиеся к не рассматривавшейся ранее, но все еще довольно специальной модели, согласуются с тем, что было известно ранее о применении гипотезы Миллионщикова. Имело бы значение применение этой гипотезы для расчета эволюции поля скоростей с начальным значением спектра и функции $\Gamma(k, k', \mu)$, полученными из надежных экспериментальных данных, относящихся к практически изотропной развитой турбулентности с относительно большим значением числа Рейнольдса. К сожалению, однако, такие экспериментальные данные до сих пор отсутствуют, и, вероятно, пройдет еще не так мало времени, прежде чем их удастся получить.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. М. Яглому за руководство и постоянное внимание.

Поступило 9 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. М., «Наука», 1967, т. 2.
2. Keller L., Friedmann A. Differentialgleichung für die turbulente Bewegung einer kompressiblen Flüssigkeit. Proc. Ist. Internat. Congr. Appl. Mech., Delft, 1924, pp. 395—405.

3. Миллионщиков М. Д. К теории однородной изотропной турбулентности. Докл. АН СССР, 1944, т. 32, № 9.
4. U b e r o i M. S. Quadruple velocity correlations and pressure fluctuations in isotropic turbulence. J. Aeronaut. Sci., 1953, vol. 20, No. 3.
5. P r o u d m a n I., R e i d W. H. On the decay of a normally distributed and homogeneous turbulent velocity field. Philos. Trans. Roy. Soc., 1954, A 247, No. 926.
6. T a t s u m i T. The theory of decay process of incompressible isotropic turbulence. Proc. Roy. Soc., 1957, A 239, No. 1216.
7. O g u r a Y. A consequence of the zero — fourth — cumulant approximation in the decay of isotropic turbulence. J. Fluid Mech., 1963, vol. 16, No. 1.
8. Вступительная речь вице-президента Академии наук СССР академика М. Д. Миллионщикова на открытии симпозиума по проблемам турбулентных течений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
9. H u a n g Y o n g - n i a n. The triple velocity correlation of homogeneous isotropic turbulence in the final period of decay. Acta Mech. sinica, 1965, vol. 8, No. 2.
10. Т а у н с е н д А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
11. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М., «Сов. радио», 1961.
12. O g u r a Y. Energy Transfer in an isotropic turbulent flow. J. Geophys. Res., 1962, vol. 67, No. 8.

ИЗМЕРЕНИЯ ПУЛЬСАЦИЙ СКОРОСТИ И ДАВЛЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ

Ю. Г. БЛЮДЗЕ, О. Н. ДОКУЧАЕВ

(Ленинград)

Известно значительное число обстоятельных экспериментальных работ по исследованию пульсационного давления на стенке под турбулентным пограничным слоем [1-3]. Однако до настоящего времени нет единого мнения о том, каким образом нормировать спектры мощности и вносить поправку на размер датчика давления в результаты измерений, какова зависимость характеристик пульсационного давления от координат точек поверхности; неизвестно влияние на эти характеристики продольного градиента среднего давления. Цель данной работы — по возможности уточнить вид характеристик пульсаций давления в развитом турбулентном слое с нулевым продольным градиентом среднего давления, а также исследовать пульсационное давление в приближенно автомодельных пограничных слоях с положительным градиентом среднего давления и распределением скорости свободного потока на внешней границе вида $U_1 \sim x_1^{-a}$ ($0 < a < 1/3$), где x_1 — продольная координата. Выбор в качестве объекта исследования именно таких пограничных слоев обусловлен тем, что согласно монографии [9] при достаточно больших числах Рейнольдса эти течения будут автомодельными в большей своей части, за исключением очень тонкой области, непосредственно примыкающей к твердой поверхности. Таким образом, существует принципиальная возможность с помощью соответствующих масштабов скорости v и длины l , зависящих только от продольной координаты x_1 , представить безразмерные характеристики исследуемых пограничных слоев в виде функции только одной безразмерной координаты x_2/l , нормальной к твердой поверхности.

Измерения средних и пульсационных скоростей в пограничном слое без продольного градиента среднего давления проводились для того, чтобы, во-первых, определить числа Рейнольдса, при которых пограничный слой будет автомодельным¹, и, во-вторых, получить некоторые сведения о структуре пограничного слоя, необходимые для анализа результатов измерений пульсационного давления.

1. Экспериментальная техника. Пограничный слой с нулевым градиентом среднего давления создавался на дюралюминиевой пластине длиной по потоку 2 м и размером 2,6 м. Были изготовлены также три крыла с хордой 2 м и таким же размахом. Пограничный слой на крыльях характеризовался распределением скорости свободного потока $U_1 \sim x_1^{-a}$. Значения a равнялись соответственно 0,10, 0,17 и 0,30. Модели устанавливались в открытом рабочем участке аэродинамической трубы замкнутого типа. Для избежания высоких помех измерениям особое внимание было уделено защите моделей от вибраций.

¹ Здесь и в дальнейшем имеется ввиду приближенная автомодельность, т. е. автомодельность большей по сечению области пограничного слоя. При больших различиях в числах Рейнольдса можно было бы обнаружить отсутствие автомодельности для достаточно малых значений x_2/l .