

## ЗАДАЧА КУЭТТА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КРУКА. ЭФФЕКТ МАКСИМУМА НАПРЯЖЕНИЯ

Е. М. ШАХОВ

(Москва)

Задача Куэтта представляет собой простейшую задачу о стационарном сдвиговом течении разреженного газа в области, ограниченной твердыми поверхностями. В линейной постановке эту задачу рассматривали многие авторы, используя либо линеаризованное уравнение Крука, либо моментные методы (см. [1]). Недавно она была решена методом Монте-Карло [2].

Нелинейная задача о течении Куэтта с теплопередачей для уравнения Крука была решена методом сведения к системе интегральных уравнений [3] в широком диапазоне скоростей пластин и температурных отношений и методом дискретных скоростей [4] для умеренных скоростей пластин. В данной работе приведено решение той же задачи для обобщенного уравнения Крука [5], аппроксимирующего уравнение Больцмана для псевдомаксвеллова газа, согласно методу, предложенному автором [6, 7]. Обобщенное уравнение Крука решалось численно модифицированным методом дискретных скоростей, использованным автором ранее при решении задачи о структуре ударной волны [8].

Рассматривался в основном случай псевдомаксвелловских молекул, когда коэффициент вязкости пропорционален температуре. Вычисления проводились для чисел Прандтля 1 и  $2/3$  в широком диапазоне чисел Маха, Кнудсена и температурных отношений пластин. Как и ожидалось, влияние числа Прандтля больше всего сказывается для малых чисел Кнудсена. Профили скорости течения к изменению числа Прандтля чувствительны очень слабо (по крайней мере для псевдомаксвелловских молекул).

Наиболее интересный результат работы, однако, не зависит от числа Прандтля. Именно, обнаружено, что при любых достаточно больших скоростях пластин напряжение трения, отнесенное к соответствующему свободномолекулярному значению, с уменьшением числа Кнудсена изменяется не монотонно, а имеет максимум. Этот нелинейный эффект, насколько известно автору работы, в литературе (в том числе и в статьях [3, 4]) ранее не обсуждался.

1. Физическая постановка задачи о течении Куэтта состоит в следующем. Пусть между твердыми пластинами, совпадающими с плоскостями  $y = +a$  и  $y = -a$ , заключен газ со средней числовой плотностью молекул  $n_0$ . Пластины поддерживаются при постоянных температурах  $T_+$  и  $T_-$  соответственно и могут двигаться вдоль оси  $x$  с одинаковой по величине скоростью  $U$ , но в противоположных направлениях (скорости  $U$  и  $-U$ ). Свойства поверхностей пластин предполагаются однородными, т. е. одинаковыми для всех точек. Задача состоит в том, чтобы определить стационарное состояние газа между пластинами и прежде всего макропараметры (напряжение трения, профили плотности, скорости и температуры, тепловой поток и т. п.) при заданных температурах и скорости пластин и при определенных свойствах газа.

Переходя к математической формулировке задачи, примем следующие допущения. Будем предполагать, что функция распределения  $f(y, \xi)$ , определяющая состояние газа, удовлетворяет приближенному кинетическому уравнению

$$\xi_y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\tau} (f^+ - f) \quad (1.1)$$

В уравнении (1.1) величины определяются следующими формулами:

$$f^+ = f^{(0)} [1 + 4/5 (1 - \sigma) S_y c_y (c^2 - 5/2)]$$

$$f^{(0)} = \frac{n}{(2\pi RT)^{3/2}} e^{-c^2}, \quad c_y = \frac{u}{\sqrt{2RT}}, \quad c^2 = \frac{(\xi_x - u)^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}{2RT}$$

$$n = \int f d\xi, \quad nu = \int \xi_x f d\xi, \quad S_y = n^{-1} \int c_y c^2 f d\xi$$

$$p = nkT = 2/3 RT \int c^2 f d\xi, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{p}{\mu}, \quad q_y = 1/2 (2RT)^{3/2} n S_y$$

Здесь  $f(y, \xi)$  — функция распределения,  $f^{(0)}(y, \xi)$  — локально-максвелловская функция,  $n$  — числовая плотность,  $u$  — средняя скорость потока, направленная вдоль оси  $x$ ,  $p$  — давление,  $\mu$  — коэффициент вязкости газа,  $\sigma$  — число Прандтля,  $q_y$  — тепловой поток.

Отражение молекул от стенок предполагается для определенности диффузным с полной импульсной и тепловой аккомодацией.

$$f_+ = \frac{n_+}{(2\pi RT_+)^{3/2}} e^{-c_+^2}, \quad y = +a, \quad \xi_y < 0$$

$$f_- = \frac{n_-}{(2\pi RT_-)^{3/2}} e^{-c_-^2}, \quad y = -a, \quad \xi_y > 0 \quad (1.2)$$

$$c_+^2 = \frac{(\xi_x - U)^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}{2RT_+}, \quad c_-^2 = \frac{(\xi_x + U)^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}{2RT_-}$$

В граничных условиях (1.2) все величины известны, за исключением  $n_+$  и  $n_-$ . Последние находятся из условий непротекания на твердых поверхностях

$$\int_{\xi_y < 0} \xi_y f_+ d\xi + \int_{\xi_y > 0} \xi_y f d\xi = 0, \quad y = +a$$

$$\int_{\xi_y < 0} \xi_y f d\xi + \int_{\xi_y > 0} \xi_y f_- d\xi = 0, \quad y = -a \quad (1.3)$$

Условия (1.2), (1.3) не определяют участвующую в движении массу газа на единицу поверхности пластин, или, что то же, среднюю плотность газа

$$n_0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} n dy \quad (1.4)$$

Для того чтобы решение уравнения (1.1) с краевыми условиями (1.2), (1.3) было единственным, средняя плотность  $n_0$ , как это следует из физической постановки задачи, должна быть задана.

Уравнение (1.1) является, согласно [5, 6], аппроксимирующим уравнением неполного третьего приближения для уравнения Больцмана, если частота столкновений не зависит от относительной скорости сталкивающихся молекул и равна  $p/\mu$ . Это означает, что если найдено решение уравнения  $f(y, \xi)$ , то моменты этой функции, представляющие собой плот-

ность, скорость, давление или температуру, а также напряжение и тепловой поток, будут удовлетворять соответствующим точным моментным уравнениям, полученным из уравнения Больцмана.

Уравнения сохранения, полученные путем умножения (1.1) на

$$1, \quad \xi_y, \quad \xi_x, \quad \xi^2 = \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2$$

и последующего интегрирования по всему пространству скоростей, интегрируются и дают

$$\begin{aligned} \rho v &= m \int \xi_y f d\xi = 0, & P_{yy} &= m \int \xi_y^2 f d\xi = C_1 \\ P_{xy} &= m \int \xi_x \xi_y f d\xi = C_2, & u P_{xy} + q_y &= 1/2 m \int \xi_y \xi^2 f d\xi = C_3 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Поток массы в направлении  $y$  равен нулю из условий непротекания на стенках. Постоянные  $C_1, C_2, C_3$  определяются в результате решения задачи.

2. Выберем в качестве масштабов длины, плотности, температуры, скорости, вязкости и функции распределения величины

$$a, \quad n_0, \quad T_-, \quad \sqrt{2RT_-}, \quad \mu_-, \quad n_0(2RT_-)^{-3/2}$$

и перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$y' = \frac{y}{a}, \quad n' = \frac{n}{n_0}, \quad n_{+'} = \frac{n_+}{n_0}, \quad n_{-' } = \frac{n_-}{n_0}$$

$$T' = \frac{T}{T_-}, \quad T_{+'} = \frac{T_+}{T_-}, \quad T_{-' } = 1$$

$$\xi' = \frac{\xi}{\sqrt{2RT_-}}, \quad u' = \frac{u}{\sqrt{2RT_-}}, \quad U' = \frac{U}{\sqrt{2RT_-}}$$

$$\mu' = \frac{\mu}{\mu_-}, \quad f' = \frac{(2RT_-)^{3/2}}{n_0} f$$

Вязкость газа  $\mu_-$  определена по температуре  $T_-$ .

Преобразование к безразмерным переменным производится очевидным образом. При этом уравнение (1.1) сохраняет свой вид, с той только разницей, что вместо  $1/\tau$  появляется безразмерная частота столкновений, которая естественным образом связана с числом Кнудсена  $K$

$$\frac{1}{\tau'} = \frac{4}{5\sqrt{\pi}} \frac{n'T'}{\mu' K}, \quad K = \frac{\lambda_-}{2a}, \quad \lambda_- = \frac{1}{\sqrt{2} n_0 \pi d_-^2} \quad (2.1)$$

Эффективный диаметр молекул  $d_-$  определяется через вязкость  $\mu_-$ .

Ниже штрихи над безразмерными величинами опущены.

Вместо функции распределения  $f(y, \xi)$  введем в рассмотрение ее интегралы

$$\begin{aligned} \Phi(y, \xi_y) &= \int f d\xi_x d\xi_z, & \Psi(y, \xi_y) &= \int \xi_x f d\xi_x d\xi_z \\ \chi'(y, \xi_y) &= \int (\xi_x^2 + \xi_z^2) f d\xi_x d\xi_z \end{aligned} \quad (2.2)$$

Все основные макроскопические характеристики выражаются через эти функции

$$\begin{aligned}
 n &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi d\xi_y, & nu &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi d\xi_y, & nv &= \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_y \varphi d\xi_y \\
 P_{xy} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_y \psi d\xi_y, & P_{yy} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_y^2 \varphi d\xi_y \\
 P_{xx} + P_{zz} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi d\xi_y - nu^2, & C_3 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\chi + \xi_y^2 \varphi) \xi_y d\xi_y \\
 T &= 2/3 n^{-1} (P_{xx} + P_{yy} + P_{zz})
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Умножая (1.1) на 1,  $\xi_x$ ,  $\xi_x^2 + \xi_z^2$  и интегрируя по  $\xi_x$ ,  $\xi_z$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , получаем для  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  уравнения

$$\begin{aligned}
 \xi_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{1}{\tau} (\varphi^+ - \varphi), \dots, \quad \xi \frac{\partial \chi}{\partial y} = \frac{1}{\tau} (\chi^+ - \chi) \\
 \varphi^{\dagger} &= \varphi^{(0)} [1 + 4/5 (1 - \sigma) S_y c_y (c_y^2 - 3/2)], \quad \varphi^{(0)} = \frac{n}{\sqrt{\pi T}} e^{-c_y^2}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\psi^+ = u\varphi^+, \quad \chi^+ = (u^2 + T)\varphi^+ + 4/5 (1 - \sigma) T S_y c_y$$

Граничные условия для функций  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  имеют вид

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \varphi_+ = \frac{n_+}{\sqrt{\pi T_+}} e^{-\xi_y^2/T_+}, \quad \psi_+ = U\varphi_+, \quad \chi_+ = (T_+ + U^2)\varphi_+ \\
 n_+ &= \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{T_+}} \int_0^{\infty} \xi_y \varphi d\xi_y \quad \text{при } y = +1 \\
 \varphi &= \varphi_- = \frac{n_-}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi_y^2}, \quad \psi_- = -U\varphi_-, \quad \chi_- = (1 + U^2)\varphi_- \\
 n_- &= -2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^0 \xi_y \varphi d\xi_y \quad \text{при } y = -1
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Таким образом, задача об определении макроскопических характеристик в течении Куэтта ставится как задача о нахождении некоторых интегралов (2.3) от функций  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$ , удовлетворяющих уравнениям (2.4) и граничным условиям (2.5). Решение задачи зависит от числа Кнудсена  $K$ , скорости пластин  $U$ , температурного отношения  $T_+$  и числа Прандтля  $\sigma$ . Средняя плотность газа должна быть равна единице.

3. Для численного решения задачи был использован тот же метод, что и при решении задачи о структуре ударной волны — комбинация метода итераций и модифицированного метода дискретных скоростей [8]. Именно, применялись итерации вида

$$\xi_y \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial y} = \frac{1}{\tau_n} (\varphi_n^+ - \varphi_{n+1}) \tag{3.1}$$

Полученные в каждой итерации дифференциальные уравнения интегрировались численно по методу Эйлера от  $y = -1$  для  $\xi_y > 0$  и  $y = +1$

для  $\xi_y < 0$  и определялись  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  одновременно для всех  $y$  при фиксированном  $\xi_y$ . Вычисленные значения использовались лишь для нахождения вклада в интегральные суммы, образованные по формуле Симпсона. Затем производился переход к следующему значению  $\xi_y$  и т. д. Значения функций  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  при  $\xi_y = 0$  определялись равенствами

$$\varphi = \varphi^+, \quad \psi = \psi^+, \quad \chi = \chi^+ \quad (-1 < y < +1)$$

После вычисления интегралов (2.3), а также  $n_+$ ,  $n_-$  производился переход к расчету следующей итерации. Шаг по координате обычно принимался 0.002, шаг интегрирования по скорости  $\Delta\xi_y = 0.25$  или меньше.

Пределы интегрирования по  $\xi_y$

$$|\xi_y| < 3\sqrt{T_+ + 2/3}U^2$$

Сходимость итераций контролировалась по константам  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , которые не должны зависеть от  $y$ .

Специфика итераций, ошибки вычислений приводят к тому, что средняя плотность газа между пластинами несколько изменяется. Для того чтобы получить решение, имеющее среднюю плотность, равную единице, величина  $n_0$  вычислялась в каждой итерации, и поле плотности, а также  $n_+$  и  $n_-$  заново нормировались. В качестве нулевой итерации принималось свободномолекулярное решение, для которого имеем

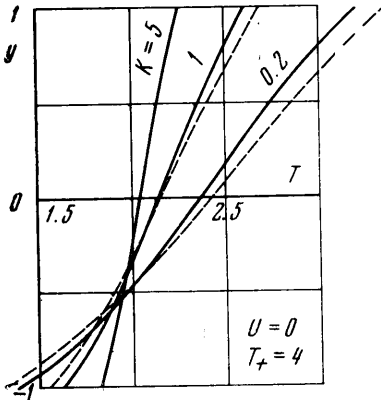
$$n = n_0 = 1, \quad n_+ = \frac{2}{1 + \sqrt{T_+}}, \quad n_- = \frac{2\sqrt{T_+}}{1 + \sqrt{T_+}}, \quad u = \frac{n_+ - n_-}{2}U,$$

$$P_{xy} = -\frac{n_-U}{\sqrt{\pi}}, \quad P_{yy} = 1/4 n_- (1 + \sqrt{T_+}), \quad q_y = \frac{n_-}{2\sqrt{\pi}} [1 - T_+ + 2uU]$$

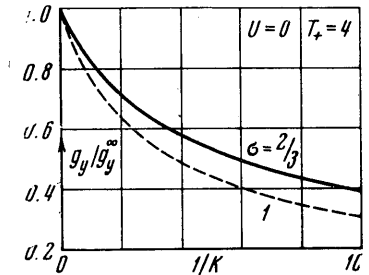
$$P_{xx} + P_{zz} = 1/2 (1 + U^2) n_- + 1/2 (T_+ + U^2) n_+ - nu^2$$

$$T = 1/2 (n_- + n_+ T_+) + 2/3 (U^2 + u^2)$$

Число итераций значительно возрастает с уменьшением числа Кнудсена. Для  $K = 5$  требуется примерно пять итераций, для  $K = 1/5$  — двадцать, при  $K = 1/10$  — сорок. Для проведения серии расчетов при различных числах Кнудсена организовывался цикл по числам Кнудсена. При этом в



Фиг. 1



Фиг. 2

пределах одного шага  $\Delta K^{-1} = 1$  удовлетворительное число итераций равно пяти. Время счета одной итерации при  $U = 5$ ,  $\Delta y = 0.002$ ,  $\Delta\xi_y = 0.25$  на БЭСМ-6 около 20 сек.

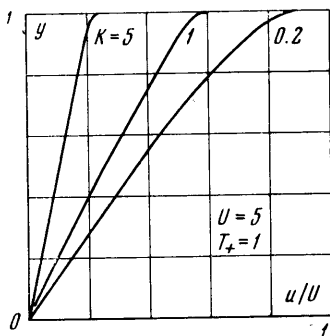
4. Расчеты проводились в основном для случая  $\mu = T$ . Результаты расчетов проиллюстрированы фиг. 1—5. Сплошные линии относятся к  $\sigma = 2/3$ , штриховые — к  $\sigma = 1$ .

Влияние числа Прандтля проявляется особенно отчетливо в случае чистой теплопередачи между пластинами, оно становится значительным при  $K = 1$  и увеличивается с уменьшением  $K$ .

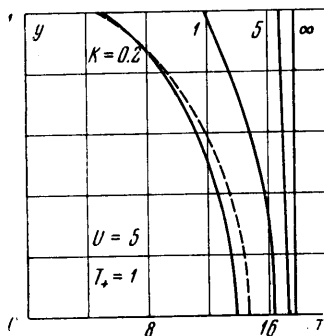
На фиг. 1 изображены профили температур, соответствующие варианту  $U = 0$ ,  $T_+ = 4$  для чисел Кнудсена  $K = 5, 1, 1/5$ .

Величина теплового потока, отнесенного к соответствующему значению  $q_{y=0}$  в свободномолекулярном решении при  $\sigma = 1$  равна 0.76 и 0.44, а при  $\sigma = 2/3$  — 0.82 и 0.54 соответственно для  $K = 1$  и  $K = 1/5$ .

Следовательно, уже при  $K = 1/5$  замена числа  $\sigma = 2/3$  на  $\sigma = 1$  приводит к погрешности в тепловом потоке более 20%. Поведение теплового потока по числам Кнудсена для  $\sigma = 1, \sigma = 2/3$  изображено на фиг. 2. Заметим, что задача о теплопередаче для уравнения Крука впервые была решена в работе [9]. Результаты данной работы совпадают с результатами [9] (см. также [1]).



Фиг. 3



Фиг. 4

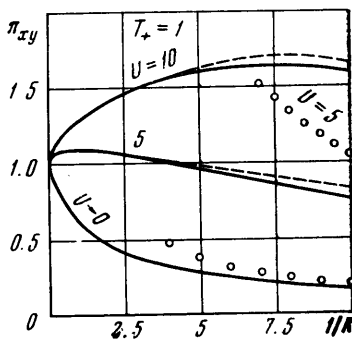
Задача о теплообмене между пластинами в разреженном газе может быть решена на основе уравнения Крука с частотой столкновений, определенной по коэффициенту теплопроводности. Это решение может быть получено из решения модели Крука с обычным определением частоты столкновений через вязкость простым пересчетом чисел Кнудсена. Найденные таким образом результаты для тепловых потоков почти совпадают с данными, вычисленными по уравнению (1.1) (см. фиг. 2), и с результатами работы [10], где та же задача была решена для эллипсоидальной статистической модели, которая дает уравнения механики сплошной среды с правильными коэффициентами вязкости и теплопроводности [11, 10].

5. Результаты расчетов для течения Куэтта при равных температурах пластин проиллюстрированы фиг. 3—5. На фиг. 3 изображены профили скоростей для случая  $\mu = T$ ,  $U = 5$ ,  $T_+ = 1$  и для чисел Кнудсена  $K = 5, 1, 1/5$  при  $\sigma = 1$  и  $2/3$ . На фиг. 4 представлены соответствующие профили температур. Профили скоростей практически не зависят от  $\sigma$ . Больше того, оказывается, что они слабо зависят и от скоростей пластин. С увеличением числа  $U$  профили имеют тенденцию отклоняться от профилей, вычисленных по линейной теории, в сторону навье-стоксовских.

По-видимому, это связано с тем, что для псевдо-максвеллова газа плотность остается почти постоянной, мало отклоняясь от средней плотности  $n_0 = 1$ . Для других законов вязкости профиль плотности, а с ним и профиль скорости, будет изменяться сильнее.

Заметим, что профили скоростей для малых  $U$  совпадают с профилями, приведенными в [12] для всех  $\alpha = 0.9027 K^{-1}$  за исключением  $\alpha = 10$ . Для  $\alpha = 10$  результаты [12] не точны, по-видимому, из-за недостаточного числа итераций.

На фиг. 5 представлена зависимость напряжения трения, отнесенного к  $P_{xy}^\infty = -U/\sqrt{\pi}$ , соответствующей величине напряжению сдвига в свободномолекулярном течении, от числа Кнудсена для  $U \rightarrow 0$  (линейная теория [13]) и для  $U = 5, 10$  при



Фиг. 5

$\sigma = 2/3$  и 1. Обращает на себя внимание немонотонное поведение  $\pi_{xy} = P_{xy} / P_{xy}^\infty$  по числам  $K$  и наличие максимума. Этот нелинейный эффект становится заметным лишь для достаточно больших скоростей  $U$ . В частности, при  $U = 1$  кривая  $\pi_{xy}(K^{-1})$  ведет себя качественно так же, как и по линейной теории ( $U \rightarrow 0$ ), но лежит несколько выше последней.

На той же фиг. 5 для сравнения точками нанесены зависимости, соответствующие решению уравнений Навье — Стокса для псевдомаксвеллова газа при  $\sigma = 2/3$ ,  $\gamma = 5/3$  с граничными условиями прилипания [14, 1]

$$\pi_{xy} = 5/8\pi [1 + 8/45 U^2] K$$

6. Наличие максимума у зависимости  $\pi_{xy}(K)$  может быть обнаружено и аналитически, если воспользоваться результатами хотя бы первой итерации от свободномолекулярного решения.

В свободномолекулярном приближении ( $K = \infty$ ) имеем при  $T_+ = 1$

$$n_+ = n_- = 1, \quad u = 0, \quad P_{xy} = -U/\sqrt{\pi}, \quad T = 1 + 2/3 U^2,$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{4}{5\sqrt{\pi}} \frac{T}{\mu} \frac{1}{K}, \quad \varphi^+ = \varphi^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\pi T}} \exp \frac{-\xi_y^2}{T}, \quad \psi^+ = 0, \quad \chi^+ = T\varphi^+$$

Интегрируя уравнение для  $\psi$  с использованием граничных условий и пользуясь определением  $P_{xy}$ , получаем для первой итерации выражение (имея в виду, что в силу симметрии задачи  $n_+ = n_-$ )

$$P_{xy} = -\frac{n_- U}{\sqrt{\pi}} \left\{ J_1 \left( \frac{1-y}{\tau} \right) + J_1 \left( \frac{1+y}{\tau} \right) \right\} \quad (6.1)$$

Здесь введена одна из функций, часто встречающихся в кинетической теории [1]

$$J_m(x) = \int_0^\infty u^m \exp \left( -u^2 - \frac{x}{u} \right) du, \quad \frac{dJ_m}{dx} = -J_{m-1} \quad (m = 0, 1, \dots)$$

Ниже будет использована еще функция  $J_0(x)$ . Для функций  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  при  $x \rightarrow 0$  справедливо разложение [15]

$$J_0(x) = 1/2\sqrt{\pi} + x \ln x - 0.133 x + \dots \quad (6.2)$$

$$J_1(x) = 1/2 - 1/2\sqrt{\pi}x - 1/2x^2 \ln x + 0.317 x^2 + \dots$$

Возвращаясь теперь к выражению (6.1) для  $P_{xy}$ , замечаем, что напряжение сдвига не должно зависеть от координаты. Следовательно, необходимо воспользоваться разложением (6.2) функций и ограничиться только двумя слагаемыми. В результате будем иметь

$$P_{xy} = -\frac{n_- U}{\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{\tau} \right) \quad (6.3)$$

Полученное выражение по форме совпадает с соответствующим выражением линейной теории. Существенное отличие от линеаризованного варианта состоит в том, что в нелинейном случае величина  $n_-$  не равна единице, а сама зависит от чисел  $K$ ,  $U$  и должна быть найдена.

Имея в виду определение  $n_-$  согласно одной из формул (2.5), проинтегрируем уравнение для  $\varphi$  при  $\xi_y < 0$  от  $y = +1$  до  $y$

$$\varphi = \frac{n_- U}{\sqrt{\pi}} \exp \frac{-(y-1)}{\xi_y \tau} + \int_{+1}^y \varphi^+ \exp \frac{-(y-s)}{\xi_y \tau} \frac{ds}{\xi_y \tau} \quad (6.4)$$

Положим в (6.4)  $y = -1$  и подставим полученное выражение в формулу для  $n_-$ , проинтегрируем по скорости и результат разрешим относительно  $n_-$ . Получим

$$n_- = \sqrt{T} \frac{1 - 2J_1(\alpha/\sqrt{T})}{1 - 2J_1(\alpha)}, \quad \alpha = \frac{2}{\tau} \quad (6.5)$$

Используя разложение (6.2), находим следующее выражение для  $n_-$ :

$$n_- = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\alpha}{\sqrt{T}} \ln \frac{\alpha}{\sqrt{T}} - \alpha \ln \alpha \right] + \frac{0.64}{\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{T}} \right) \alpha + \dots \quad (6.6)$$

Следовательно, для  $P_{xy}$ , при  $\alpha \rightarrow 0$  имеем оценку

$$\pi_{xy} = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\alpha}{\sqrt{T}} \ln \frac{\alpha}{\sqrt{T}} - \alpha \ln \alpha \right] + \left[ \frac{0.64}{\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{T}} \right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right] \alpha$$

Полученное выражение показывает, что величина  $\pi_{xy}$  независимо от закона вязкости  $\mu(T)$  в некоторой окрестности  $K = \infty$  превосходит свободномолекулярное значение, равное единице, при всех  $U > 0$ , т. е. функция  $\pi_{xy}$  возрастает. Для малых  $K$   $\pi_{xy} \sim K$ , поэтому функция  $\pi_{xy}$  должна иметь максимум.

Величина окрестности, в которой  $\pi_{xy} > 1$ , величина и положение максимума существенно зависят от  $U$  и закона вязкости. Для  $U \ll 1$  эти величины практически равны нулю. С возрастанием  $U$  названные величины, как видно из фиг. 5, возрастают. Это возрастание больше всего для молекул Максвелла и уменьшается для более жестких молекул.

Физический смысл обнаруженного эффекта максимума напряжения сдвига состоит в следующем. За счет столкновений энергия направленного движения молекул переходит в энергию хаотического движения, что увеличивает несмотря на малое число столкновений поток молекул к стенке, следовательно, и число отраженных молекул, а вместе с ним и напряжение сдвига. Картина здесь аналогична той, которая имеет место при обтекании пластины гиперзвуковым потоком сильно разреженного газа под нулевым углом атаки, — за счет столкновений увеличивается число падающих на поверхность тела молекул, а вместе с ним возрастает и сопротивление тела [1].

Описанный выше эффект максимума напряжения в течении Куэтта, насколько известно автору, в литературе не обсуждался. В работах [3, 4] он не отмечается. Основной причиной этого, по-видимому, является то обстоятельство, что в цитированных работах величина  $n_-$  выбиралась в качестве масштаба, поэтому в расчетах вычислялась величина  $\sqrt{\pi} P_{xy} / n_- U$ , которая, как видно из (5.3), убывает при  $\alpha \rightarrow 0$ , как по линейной теории.

Сравнение с [3, 4] затруднительно потому, что результаты приведены не в физических переменных. Для того чтобы сравнить свои результаты, автору [4] пришлось использовать те же переменные, что и в работе [3].

В заключение заметим, что решение задачи Куэтта методом моментов с использованием двухпоточной функции Лиза, как известно, не существует для больших чисел Маха и больших чисел Кнудсена [14, 1]. Метод Лиза в принципе не может дать величину  $\pi_{xy}$ , превосходящую ее свободномолекулярное значение, и оказывается, таким образом, несостоятельным.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. Кинет. теория, М., «Наука», 1967.
2. Горелов С. Л., Коган М. Н. Решение линейных задач динамики разреженного газа методом Монте — Карло. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6.
3. Anderson D. G. Numerical solutions of the Krook kinetic equation. J. Fluid Mech., 1966, vol. 25, pt 2, pp. 274—287.
4. Huang A. B., Hartley D. L. Nonlinear rarefied Couette flow with heat transfer. Phys. Fluids, 1968, vol. 2, No. 6, pp. 1321—1326.
5. Шахов Е. М. Об обобщении релаксационного кинетического уравнения Крука. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
6. Шахов Е. М. О приближенных кинетических уравнениях в теории разреженных газов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1.
7. Шахов Е. М. Метод аппроксимации кинетического уравнения Больцмана. Сб. статей «Численные методы в теории разреженных газов», Тр. ВЦ АН СССР, 1969.
8. Шахов Е. М. О структуре скачка уплотнения в одноатомном газе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
9. Willis D. R. Heat transfer in a rarefied gas between parallel plates at large temperature ratios. Rarefied gas dynamics, New York — London, Acad. Press, 1963, vol. 1.
10. Cercignani C., Tironi G. Non-linear heat transfer between two parallel plates according to a model with correct Prandtl number. Rarefied gas dynamics. New York — London, Acad. Press, 1967, vol. 1.
11. Holway L. H. New statistical models in kinetic theory: methods of construction. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 9, pp. 1658—1673. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев. и обз. иностр. период. лит., 1967, вып. 6.)
12. Willis D. R. Theoretical solutions of some nearly free molecular problems. Rarefied gas dynamics. New York — London, Pergamon Press, 1960. (Рус. перев.: В сб. «Газодинамика разреженных газов», М., Изд-во иностр. лит., 1963.)
13. Willis D. R. Comparison of kinetic theory analysis of linearized Couette flow. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 8, pp. 127—135 (Рус. перев.: В период. сб. перев. иностр. статей «Механика», 1963, вып. 2, стр. 87—103.)
14. Liu C. Y., Lees. Kinetic theory description of plane compressible Couette flow. Rarefied gas dynamic. Acad. Press, 1961.
15. Abramowitz M. Evaluation of the integral  $\int_0^{\infty} e^{-u^2-x/u} du$ . J. Math. and Phys., 1953, vol. 32, No. 2, 3, pp. 188—192.