

При вычислении интегралов (1.2) использовался метод Симпсона с переменным шагом, что позволило определить значения интегралов с большой степенью точности. Для примера на фиг. 2 приводятся зависимости коэффициентов $q^*(r_1/r_2)$ и $G^*(r_1/r_2)$ при $n = 2, 4, 8, 20$, ∞ и $\beta = 30^\circ$; кривые 1, 2, 3 построены соответственно по формулам (1.1), (2.3), (3.1). При $p \leq 0.005$ и $p \geq 1.5$ получена хорошая сходимость значений коэффициентов q^* и G^* , вычисленных по точным и приближенным формулам, причем сходимость тем лучше, чем больше число лопаток и меньше угол β . Это значит, что при небольших значениях отношения r_1/r_2 и при r_1/r_2 , близких к единице, для расчета аэродинамических параметров решетки с достаточной для практических целей точностью могут быть использованы приближенные асимптотические формулы.

Автор выражает признательность Г. Ю. Степанову за ценные замечания, высказанные при обсуждении этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Busemann A. Das Förderhöhenverhältnis radialer Kreiselpumpen mit logarithmisch-spiraligen Schaufeln. ZAMM, 1928, Bd 8, H. 5, S 372—384.
2. Майкапар Г. И. Расчет круговых решеток. В сб.: «Промышленная аэродинамика», М., «Машиностроение», 1966, вып. 28, стр. 5—32.
3. Соломахова Т. С. Расчет аэродинамических характеристик вращающихся круговых решеток профилей, очерченных по логарифмическим спиральям. Сб. «Промышленная аэродинамика», М., «Машиностроение», 1966, вып. 28, стр. 33—59.
4. Kucharski W. Strömungen einer Reibungsfreien Flüssigkeit bei Rotation fester Körper. München, 1918.

РАСЧЕТ ВОЗДЕЙСТВИЯ ПОРЫВА НА КРЫЛО СЛОЖНОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ ПРИ ДОЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

С. М. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ, Г. А. КОЛЕСНИКОВ

(Москва)

Наиболее трудными среди нестационарных задач теории крыла являются те, в которых рассматривается воздействие порыва на крыло, движущееся с дозвуковой скоростью в сжимаемой среде ($0 < M \leq 1$).

Это связано, во-первых, с тем, что, в отличие от несжимаемой среды ($M = 0$), здесь возмущения распространяются с конечной скоростью. Поэтому приходится учитывать запаздывание возмущений. Но если при $M > 1$ возмущения распространяются только вниз по течению, внутри соответствующего конуса Маха, то когда $M < 1$, они достигают любой точки пространства. Из-за этого, например, вся вихревая пелена, образующаяся за крылом, оказывает влияние на его обтекание.

Во-вторых, здесь, в отличие от установившихся гармонических колебаний, зависимость от времени не может быть исключена, и время играет роль равноправного аргумента. Так, например, в процессе расчета обтекания приходится выстраивать след за крылом (находить положения и циркуляции всех свободных вихрей). Таким образом, пространственная задача для крыла конечного размаха становится четырехмерной.

К настоящему времени в дозвуковом потоке газа удалось получить численное решение этой задачи лишь для пластинки бесконечного размаха [1, 2]. Для крыла конечного удлинения, насколько нам известно (см. об этом в работах [3—5]), эффективный метод решения разработан лишь в случае $M = 0$ (несжимаемая среда) [6, 7].

Предлагается численный метод расчета обтекания крыла произвольной формы в плане (в том числе и сложной — изменяемой геометрии, с криволинейными кромками, изломами и т. д.) во всем диапазоне дозвуковых чисел M (включая $M = 0$). При этом зависимость граничных условий от времени и координат может быть произвольной.

Основная идея метода заключается в переходе от непрерывных распределений и процессов к дискретным.

Во-первых, вихревой слой, заменяющий крыло, приближенно моделируется системой дискретных вихрей, число которых может неограниченно увеличиваться. При этом в качестве основной вихревой особенности берется косою нестационарный вихрь.

Во-вторых, непрерывный процесс изменения циркуляции по времени заменяется ступенчатым. В определенные (расчетные) моменты времени происходит скачкообразное изменение циркуляции присоединенных вихрей, и с них сходят свободные вихри. В сжимаемой среде возмущения распространяются с конечной скоростью, по-

этому в ней нужно рассматривать весь процесс образования и сноса свободных вихрей, а не только те положения, которые соответствуют расчетным моментам времени, как в несжимаемой жидкости.

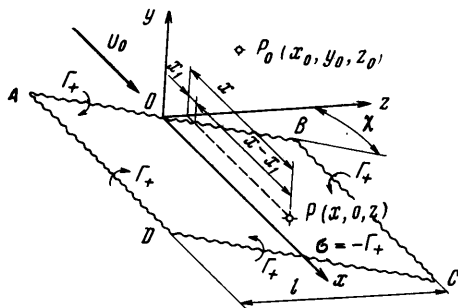
Таким образом, здесь находит применение и дальнейшее развитие идея работ [6, 7].

1. **Нестационарный вихрь в дозвуковом потоке газа.** Рассмотрим замкнутый вихрь постоянной по длине напряженности Γ_+ , образованный присоединенным (неподвижным) вихрем AB , параллельным ему, уносимым потоком со скоростью u_0 свободным вихрем DC и свободными вихрями AD и BC (фиг. 1). Пусть при $t < 0$ свободный вихрь DC слит с присоединенным AB .

Введем неподвижную систему координат x, y, z , поместив ее начало на середине присоединенного вихря и ориентируя ее таким образом, чтобы плоскость xoz совпадала с плоскостью $ABCD$, а ось ox была параллельна скорости невозмущенного потока u_0 . Угол между AB и ox обозначим через χ (на фиг. 1 изображен угол $\chi > 0$).

Найдем потенциал скоростей, индуцируемых нестационарным вихрем $ABCD$ в момент t в произвольной точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Для этого перейдем от вихря к эквивалентному слою диполей.

Пусть на AB непрерывно возникают свободные диполи, которые уносятся потоком со скоростью u_0 . К времени t они заполняют всю площадь параллелограмма $ABCD$. Примем, что плотность распределения моментов диполей равна $\sigma = -\Gamma_+$. Этот слой диполей индуцирует такое же поле скоростей, как и нестационарный вихрь. Чтобы найти потенциал индуцируемых им скоростей, введем слой источников, образованный так же, как и слой диполей, но смещенный относительно последнего вдоль oy на расстояние y . Используя формулу, определяющую запаздывающий потенциал источника, движущегося в сжимаемой среде с дозвуковой скоростью [8], интегрируя по области расположения источников и



Фиг. 1

дифференцируя затем по координате y , получаем следующую формулу для расчета потенциала скоростей, индуцируемых нестационарным вихрем (a — скорость звука):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-l/2}^{l/2} dz \int_{x_1}^{x_2} \frac{\Gamma_+}{R_1} dx, \quad x_1 = z \operatorname{tg} \chi, \quad x_2 = z \operatorname{tg} \chi + U_0 t \quad (1.1)$$

$$R_1 = \sqrt{(x_0 - x)^2 + \beta^2 [(y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2]}, \quad \beta = \sqrt{1 - M^2}, \quad M = \frac{U_0}{a}$$

При интегрировании (1.1) надо полагать

$$\Gamma_+ = 0, \quad \text{если} \quad t - \frac{x - x_1}{U_0} + \frac{M(x_0 - x) - R_1}{a\beta^2} < 0 \quad (1.2)$$

Вводя безразмерные величины

$$\Gamma = \frac{\Gamma_+}{U_0 b}, \quad \xi = \frac{x}{b}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \zeta = \frac{z}{b} \quad (1.3)$$

$$\xi_0 = \frac{x_0}{b}, \quad \eta_0 = \frac{y_0}{b}, \quad \zeta_0 = \frac{z_0}{b}$$

где b — характерный линейный размер, и переходя к переменной $\lambda = \xi_0 - \xi$, из (1.1), (1.2) получаем

$$\varphi = \frac{U_0 b}{4\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{-l/2b}^{l/2b} d\zeta \int_{\lambda_1^*}^{\lambda_2} \frac{\Gamma}{r} d\lambda, \quad \lambda_1^* = \xi_0 - \xi_1 - \xi_u \quad (1.4)$$

$$\lambda_2 = \xi_0 - \xi_1, \quad \xi_1 = \zeta \operatorname{tg} \chi, \quad \xi_u = \frac{U_0 t}{b}, \quad r = \sqrt{\lambda^2 + \beta^2 [(\eta_0 - \eta)^2 + (\zeta_0 - \zeta)^2]}$$

При интегрировании надо полагать

$$\Gamma = 0, \text{ если } t = \frac{b}{U_0}(\xi_0 - \xi_1) + \frac{b\lambda}{U_0\beta^2} - \frac{br}{a\beta^2} < 0 \quad (1.5)$$

Условие (1.5) определяет область, из которой сигналы, посылаемые диполями, в точку P_0 в момент t не доходят. Обозначая границы области, из которой сигналы в P_0 доходят, через $\lambda_1, \lambda_2, \zeta_1, \zeta_2$, вместо (1.4), (1.5) получаем

$$\Phi = \frac{U_0 b}{4\pi} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\Gamma}{r} d\lambda, \quad \lambda_2 = \xi_0 - \zeta \operatorname{tg} \chi \quad (1.6)$$

$$\lambda_1 = \xi_0 - \zeta \operatorname{tg} \chi - \xi_u + M\sqrt{(\xi_0 - \zeta \operatorname{tg} \chi - \xi_u)^2 + (\eta_0 - \eta)^2 + (\zeta_0 - \zeta)^2}$$

Введем обозначения для координат точек пересечения кривой λ_1 с прямой λ_2 (фиг. 2).

$$\begin{aligned} \zeta_{10}^*(\xi_{**}, \xi_a, \eta_0, \zeta_0, \chi) &= \zeta_0 + \xi_{**} \sin \chi \cos \chi - \sqrt{\xi_a^2 - \xi_{**}^2 \cos^2 \chi - \eta_0^2} \cos \chi \\ \zeta_{20}^*(\xi_{**}, \xi_a, \eta_0, \zeta_0, \chi) &= \zeta_0 + \xi_{**} \sin \chi \cos \chi + \sqrt{\xi_a^2 - \xi_{**}^2 \cos^2 \chi - \eta_0^2} \cos \chi \\ \xi_{**} &= \xi_0 - \zeta_0 \operatorname{tg} \chi - \xi_u, \quad \xi_a = at/b \end{aligned} \quad (1.7)$$

Тогда пределы интегрирования в (1.6) в зависимости от значения этих параметров будут определяться следующим образом:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \zeta_2, \quad \text{если } \zeta_{10}^* \leq -\frac{l}{2b} \quad \text{или} \quad \zeta_{10}^* \geq \frac{l}{2b} \quad (i=1,2) \\ \zeta_1 &= -\frac{l}{2b}, \quad \zeta_2 = \zeta_{20}^*, \quad \text{если } \zeta_{10}^* \leq -\frac{l}{2b}, \quad -\frac{l}{2b} \leq \zeta_{20}^* \leq \frac{l}{2b} \\ \zeta_1 &= -\frac{l}{2b}, \quad \zeta_2 = \frac{l}{2b}, \quad \text{если } \zeta_{10}^* \leq -\frac{l}{2b}, \quad \zeta_{20}^* \geq \frac{l}{2b} \\ \zeta_1 &= \zeta_{10}^*, \quad \zeta_2 = \zeta_{20}^*, \quad \text{если } -\frac{l}{2b} \leq \zeta_{10}^* \leq \frac{l}{2b} \quad (i=1,2) \\ \zeta_1 &= \zeta_{10}^*, \quad \zeta_2 = \frac{l}{2b}, \quad \text{если } -\frac{l}{2b} \leq \zeta_{10}^* \leq \frac{l}{2b}, \quad \zeta_{20}^* \geq \frac{l}{2b} \end{aligned} \quad (1.8)$$

При $\eta_0 \neq 0$ подынтегральная функция в (1.6) особенностей не имеет и интегрирование дает

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{U_0 b \Gamma}{4\pi} [F(\zeta_2) - F(\zeta_1)] \\ F(\zeta_i) &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a_* b_*(\zeta_i)}{\eta_0 \sqrt{\beta^2 b_*^2(\zeta_i) + c_*^2 h_*^2(\zeta_i)}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a_{**} b_{**}(\zeta_i)}{\eta_0 \sqrt{b_{**}^2(\zeta_i) + c_{**}^2 h_{**}^2(\zeta_i)}} \\ a_* &= \sqrt{\xi_*^2 + \eta_0^2 \operatorname{tg}^2 \chi}, \quad b_*(\zeta_i) = \eta_0^2 \operatorname{tg} \chi - \xi_* (\zeta_0 - \zeta_i) \\ c_*^2 &= \xi_*^2 + (\beta^2 + \operatorname{tg}^2 \chi) \eta_0^2, \quad h_*(\zeta_i) = \xi_* + (\zeta_0 - \zeta_i) \operatorname{tg} \chi \\ a_{**} &= \sqrt{\xi_{**}^2 + \eta_0^2 \operatorname{tg}^2 \chi}, \quad b_{**}(\zeta_i) = \eta_0^2 \operatorname{tg} \chi - \xi_{**} (\zeta_0 - \zeta_i) \\ c_{**}^2 &= \xi_{**}^2 + (1 + \operatorname{tg}^2 \chi) \eta_0^2, \quad h_{**}(\zeta_i) = \xi_{**} + (\zeta_0 - \zeta_i) \operatorname{tg} \chi \\ \xi_* &= \xi_0 - \zeta_0 \operatorname{tg} \chi \end{aligned} \quad (1.9)$$

Полагая в (1.9) $\chi \rightarrow 0, l \rightarrow \infty$, получаем потенциал в случае, когда нестационарный вихрь представляет собой систему, состоящую из бесконечного присоединенно-

го вихря, расположенного на оси z , и параллельного ему свободного вихря, уносимого потоком со скоростью u_0

$$\varphi = \frac{U_0 b \Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\eta_0 \sqrt{\xi_u^2 - M^2 [(\xi_0 - \xi_u)^2 + \eta_0^2]}}{\eta_0^2 + \xi_0(\xi_0 - \xi_u)} \quad (1.10)$$

Найденное выражение совпадает с формулой, выведенной в [9].

Обозначим через W_y скорость, параллельную оси oy , индуцируемую нестационарным вихрем в плоскости $y = 0$. Дифференцируя (1.9) и полагая затем $\eta_0 = 0$, получаем

$$W_y = \frac{U_0 \Gamma}{4\pi} w_y(\xi_*, \xi_{**}, \zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \chi)$$

$$w_y(\xi_*, \xi_{**}, \zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \chi) = - \frac{\sqrt{[\xi_* + (\zeta_0 - \zeta_1) \operatorname{tg} \chi]^2 + \beta^2 (\zeta_0 - \zeta_1)^2}}{\xi_* (\zeta_0 - \zeta_1)} +$$

$$+ \frac{\sqrt{[\xi_* + (\zeta_0 - \zeta_2) \operatorname{tg} \chi]^2 + \beta^2 (\zeta_0 - \zeta_2)^2}}{\xi_* (\zeta_0 - \zeta_2)} + \frac{\sqrt{[\xi_{**} + (\zeta_0 - \zeta_1) \operatorname{tg} \chi]^2 + (\zeta_0 - \zeta_1)^2}}{\xi_{**} (\zeta_0 - \zeta_1)} -$$

$$- \frac{\sqrt{[\xi_{**} + (\zeta_0 - \zeta_2) \operatorname{tg} \chi]^2 + (\zeta_0 - \zeta_2)^2}}{\xi_{**} (\zeta_0 - \zeta_2)}, \quad \xi_* = \xi_0 - \zeta_0 \operatorname{tg} \chi$$

$$\xi_{**} = \xi_0 - \zeta_0 \operatorname{tg} \chi - \frac{U_0 t}{b} \quad (1.11)$$

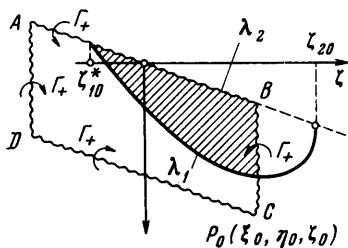
Входящие в (1.11) величины ζ_1, ζ_2 определяются из (1.7), (1.8) при $\eta_0 = 0$.

2. Расчет напряженности присоединенных вихрей крыла с сужением, равным единице. Рассмотрим сначала крыло с прямыми кромками и сужением, равным единице. Введем прямоугольную левую систему координат xuz , связанную с крылом (фиг. 3). Обозначим через U_0 среднюю поступательную скорость крыла, а проекцию возмущенной скорости на ось ou при данном (j) виде движения (входе в порыв, деформации, изменении угла атаки и т. п.) через

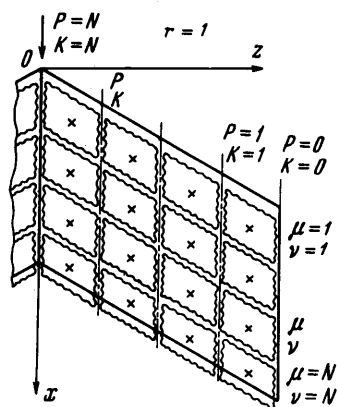
$$W_{vj} = U_0 c_j f_j(\xi, \zeta, \tau), \quad \xi = \frac{x}{b}, \quad \zeta = \frac{z}{b}, \quad \tau = \frac{U_0 t}{b} \quad (2.1)$$

где c_j — нормирующий множитель, выбираемый таким образом, что $|f_j| \leq 1$, b — характерный линейный размер (корневая хорда), f_j — заданная функция.

Следуя [6], несущую поверхность заменим системой дискретных нестационарных вихрей. Для этого (фиг. 3) разобьем каждое полукрыло на N полос равной ширины, обозначив номера



Фиг. 2



Фиг. 3

сечений через K (или P). Каждую полосу разделим линиями, параллельными передней кромке, на панели одинаковой длины. На каждой панели на расстоянии (измеренном по потоку), равном $1/4$ длины панели от передней кромки поместим присоединенный вихрь, а на расстоянии, равном $3/4$ длины панели — контрольную точку (на

фигуре обозначены крестиками). Номер вихря на данной полосе обозначим через μ , а номер контрольной точки через ν , и счет будем вести от передней кромки крыла.

Обозначим координаты передней кромки в сечении $K(P)$ через x_{0K} , z_{0K} (x_{0P} , z_{0P}).

Относительные координаты середины μ -го вихря ($\xi_{\mu k-1}^k$, $\zeta_{\mu k-1}^k$), лежащего между сечениями K , $K-1$ и угол между вихрем и осью oz ($\chi_{\mu k-1}^k$) определяются следующими соотношениями:

$$\xi_{\mu k-1}^k = 1/2(\xi_{\mu k-1} + \xi_{\mu k}), \quad \zeta_{\mu k-1}^k = 1/2(\zeta_{\mu k-1} + \zeta_{\mu k}) \quad (2.2)$$

$$\operatorname{tg} \chi_{\mu k-1}^k = \frac{\xi_{\mu k-1} - \xi_{\mu k}}{\zeta_{\mu k-1} - \zeta_{\mu k}}, \quad \xi_{\mu k} = \xi_{0k} + \frac{\mu - 3/4}{n}, \quad \zeta_{\mu k} = \zeta_{0k}, \quad \xi_{0k} = \frac{x_{0k}}{b}, \quad \zeta_{0k} = \frac{z_{0k}}{b}$$

координаты ν -й контрольной точки ($\xi_{p-1}^{\nu p}$, $\zeta_{p-1}^{\nu p}$) на полосе P , $P-1$ равны

$$\xi_{p-1}^{\nu p} = 1/2(\xi_{p-1}^{\nu} + \xi_p^{\nu}), \quad \zeta_{p-1}^{\nu p} = 1/2(\zeta_{p-1}^{\nu} + \zeta_p^{\nu}) \quad (2.3)$$

$$\xi_p^{\nu} = \xi_{0p} + \frac{\nu - 1/4}{n}, \quad \zeta_p^{\nu} = \zeta_{0p}, \quad \xi_{0p} = \frac{x_{0p}}{b}, \quad \zeta_{0p} = \frac{z_{0p}}{b}$$

где n — число вихрей (контрольных точек) на полосе.

Применяя методику, предложенную в [6], непрерывный процесс изменения по времени параметров, определяющих движение, и аэродинамических характеристик заменим дискретным. Зададим расчетные моменты τ и будем считать, что все функции f_j и аэродинамические характеристики меняются скачкообразно сразу после расчетных моментов (τ), а в промежутках между ними остаются неизменными.

Пусть напряженность μ -го присоединенного вихря, расположенного между сечениями K , $K-1$ при данном (j) виде движения равна

$$\Gamma_{\mu k-1}^{jk} = U_0 b \Gamma_{\mu k-1}^{jk}$$

где $\Gamma_{\mu k-1}^{jk}$ — относительная напряженность. Пусть

$$\Gamma_{\mu k-1}^{jkr}, \quad \Delta \Gamma_{jkr+1}^{\mu k-1}$$

соответственно величины относительной напряженности в расчетный момент τ и ее изменения в момент, следующий за расчетным.

Напряженность присоединенных вихрей находим, удовлетворяя граничным условиям в заданные расчетные моменты, причем последние выберем таким образом, чтобы свободные вихри, отошедшие от присоединенных в предыдущий расчетный момент, к данному моменту прошли расстояние, равное или кратное расстоянию между вихрями. На фиг. 3 приведена вихревая модель в расчетный момент $\tau = 1$.

Используя выведенные ранее формулы, из граничных условий получаем следующие уравнения для определения напряженности присоединенных вихрей в расчетный момент τ :

$$\sum_{k=1}^N \sum_{\mu=1}^n \frac{\Gamma_{\mu k-1}^{jkr}}{4\pi c_j} [w_{\nu\mu p-1k-1r-1}^{\nu pkr} + \Delta w_{\nu\mu p-1k-1r-1}^{\nu pkr}] =$$

$$= f_j(\xi_{p-1}^{\nu p}, \zeta_{p-1}^{\nu p}, \tau_r) + \sum_{k=1}^N \sum_{\mu=1}^n \frac{\Gamma_{jkr-1}^{\mu k-1}}{4\pi c_j} [w_{\nu\mu p-1k-1r-1}^{\nu pkr} + \Delta w_{\nu\mu p-1k-1r-1}^{\nu pkr}] -$$

$$- \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{k=1}^N \sum_{\mu=1}^n \frac{\Delta \Gamma_{\mu k-1}^{jks}}{4\pi c_j} [w_{\nu\mu p-1k-1s-1}^{\nu pkr} + \Delta w_{\nu\mu p-1k-1s-1}^{\nu pkr}],$$

$$\Delta \Gamma_{\mu k-1}^{jks} = \Gamma_{\mu k-1}^{jks} - \Gamma_{\mu k-1}^{jks-1}, \quad \Delta \Gamma_{\mu k-1}^{jki} = \Gamma_{\mu k-1}^{jki}, \quad \Delta \Gamma_{\mu k-1}^{jko} = \Gamma_{\mu k-1}^{jko} = 0, \quad \tau_r = rc/n.$$

$$p = 1, \dots, N; \quad \nu = 1, \dots, n; \quad r = 1, \dots, R. \quad (2.4)$$

Входящие в (2.4) скорости $w_{y\mu p-1k-1s}^{vpkr}$, $\Delta w_{y\mu p-1k-1s}^{vpkr}$ определяются по (1.11)

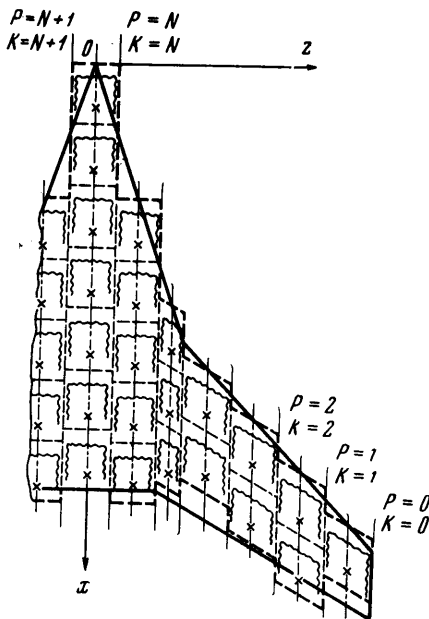
$$w_{y\mu p-1k-1s}^{vpkr} = w_y (\xi_{\mu p-1k-1}^{vpk}, \xi_{\mu p-1k-1}^{vpkr}, \zeta_{p-1}^{vp} - \zeta_{\mu k-1}^k, \xi_{\mu p-1k-1s}^{vpkr}, \zeta_{2\mu p-1k-1s}^{vpkr}, \chi_{\mu k-1}^k)$$

$$\Delta w_{y\mu p-1k-1s}^{vpkr} = w_y (\xi_{\mu p-1k-1}^{vpk}, \xi_{\mu p-1k-1}^{vpkr}, \zeta_{p-1}^{vp} + \zeta_{\mu k-1}^k, \Delta \xi_{\mu p-1k-1s}^{vpkr}, \Delta \zeta_{2\mu p-1k-1s}^{vpkr}, -\chi_{\mu k-1}^k)$$

$$\xi_{\mu p-1k-1}^{vpk} = (\xi_{p-1}^{vp} - \xi_{\mu k-1}^k) - (\zeta_{p-1}^{vp} - \zeta_{\mu k-1}^k) \operatorname{tg} \chi_{\mu k-1}^k \quad (2.5)$$

$$\xi_{\mu p-1k-1s}^{vpkr} = (\xi_{p-1}^{vp} - \xi_{\mu k-1}^k) - (\zeta_{p-1}^{vp} - \zeta_{\mu k-1}^k) \operatorname{tg} \chi_{\mu k-1}^k - (r-s)c/n$$

где c — положительное целое число, которое задается. Если $c = 1$, то свободные вихри проходят за время, протекающее между последовательными расчетными моментами, путь, равный расстоянию между соседними присоединенными вихрями. Для вычисления параметров



Фиг. 4

служат соотношения (1.7), (1.8). Они находятся как величины ξ ; из (1.8). При этом в (1.8) $l/2b$ надо заменить на $1/2(\zeta_{\mu k-1} - \zeta_{\mu k})$; для вычисления $\xi_{\mu p-1k-1s}^{vpkr}$ нужно взять $\zeta_{i0}^{vpkr} = \zeta_{i0}^* (\xi_{\mu p-1k-1s}^{vpkr}, \xi_{\mu s}^r, 0, \zeta_{p-1}^{vp} - \zeta_{\mu k-1}^k, \chi_{\mu k-1}^k)$, а при нахождении $\Delta \xi_{\mu p-1k-1s}^{vpkr}$ принять $\zeta_{i0}^* = \zeta_{i0}^* (\xi_{\mu p-1k-1s}^{vpkr}, \xi_{\mu s}^r, 0, \zeta_{p-1}^{vp} + \zeta_{\mu k-1}^k, \chi_{\mu k-1}^k)$.

Если ζ_{i0}^* мнимые, то соответствующие скорости надо полагать равными 0.

3. Расчет напряженности присоединенных вихрей в случае крыла произвольной формы в плане. Изложенный выше способ расчета напряженности присоединенных вихрей применим не только для случая, когда сужение равно единиче, но и для расчета крыла произвольной формы в плане. На фиг. 4 приведена вихревая модель,

которая используется в этом случае. Ее особенностью является то, что вначале крыло делится на части сечениями, проходящими через изломы задней и передней кромок. Затем каждая часть делится на полосы равной ширины. Число полос выбирается таким образом, чтобы на всех участках они имели примерно одинаковую ширину.

После этого каждая полоса делится на панели. При этом все панели нарезаются одинаковой длины, а их передние и задние кромки устанавливаются на каждой полосе параллельно задней кромке крыла на участке данной полосы. Число панелей на центральной полосе обозначается через n .

Если на какой-либо полосе последняя панель более чем наполовину выходит за заднюю кромку, то она отбрасывается. Если же она выходит менее чем наполовину, то крыло наращивается на соответствующую величину. Таким образом, задняя кромка крыла принимается ступенчатой. Присоединенные вихри и контрольные точки размещаются так же, как и раньше. Используя построенную таким образом модель, получаем следующую систему уравнений для расчета относительной напряженности присоединенных вихрей в расчетный момент t

или ζ_{i0}^* мнимые, то соответствующие скорости надо полагать равными 0.

3. Расчет напряженности присоединенных вихрей в случае крыла произвольной формы в плане. Изложенный выше способ расчета напряженности присоединенных вихрей применим не только для случая, когда сужение равно единиче, но и для расчета крыла произвольной формы в плане. На фиг. 4 приведена вихревая модель,

которая используется в этом случае. Ее особенностью является то, что вначале крыло делится на части сечениями, проходящими через изломы задней и передней кромок. Затем каждая часть делится на полосы равной ширины. Число полос выбирается таким образом, чтобы на всех участках они имели примерно одинаковую ширину.

После этого каждая полоса делится на панели. При этом все панели нарезаются одинаковой длины, а их передние и задние кромки устанавливаются на каждой полосе параллельно задней кромке крыла на участке данной полосы. Число панелей на центральной полосе обозначается через n .

Если на какой-либо полосе последняя панель более чем наполовину выходит за заднюю кромку, то она отбрасывается. Если же она выходит менее чем наполовину, то крыло наращивается на соответствующую величину. Таким образом, задняя кромка крыла принимается ступенчатой. Присоединенные вихри и контрольные точки размещаются так же, как и раньше. Используя построенную таким образом модель, получаем следующую систему уравнений для расчета относительной напряженности присоединенных вихрей в расчетный момент t

или ζ_{i0}^* мнимые, то соответствующие скорости надо полагать равными 0.

3. Расчет напряженности присоединенных вихрей в случае крыла произвольной формы в плане. Изложенный выше способ расчета напряженности присоединенных вихрей применим не только для случая, когда сужение равно единиче, но и для расчета крыла произвольной формы в плане. На фиг. 4 приведена вихревая модель,

которая используется в этом случае. Ее особенностью является то, что вначале крыло делится на части сечениями, проходящими через изломы задней и передней кромок. Затем каждая часть делится на полосы равной ширины. Число полос выбирается таким образом, чтобы на всех участках они имели примерно одинаковую ширину.

После этого каждая полоса делится на панели. При этом все панели нарезаются одинаковой длины, а их передние и задние кромки устанавливаются на каждой полосе параллельно задней кромке крыла на участке данной полосы. Число панелей на центральной полосе обозначается через n .

Если на какой-либо полосе последняя панель более чем наполовину выходит за заднюю кромку, то она отбрасывается. Если же она выходит менее чем наполовину, то крыло наращивается на соответствующую величину. Таким образом, задняя кромка крыла принимается ступенчатой. Присоединенные вихри и контрольные точки размещаются так же, как и раньше. Используя построенную таким образом модель, получаем следующую систему уравнений для расчета относительной напряженности присоединенных вихрей в расчетный момент t

или ζ_{i0}^* мнимые, то соответствующие скорости надо полагать равными 0.

3. Расчет напряженности присоединенных вихрей в случае крыла произвольной формы в плане. Изложенный выше способ расчета напряженности присоединенных вихрей применим не только для случая, когда сужение равно единиче, но и для расчета крыла произвольной формы в плане. На фиг. 4 приведена вихревая модель,

которая используется в этом случае. Ее особенностью является то, что вначале крыло делится на части сечениями, проходящими через изломы задней и передней кромок. Затем каждая часть делится на полосы равной ширины. Число полос выбирается таким образом, чтобы на всех участках они имели примерно одинаковую ширину.

После этого каждая полоса делится на панели. При этом все панели нарезаются одинаковой длины, а их передние и задние кромки устанавливаются на каждой полосе параллельно задней кромке крыла на участке данной полосы. Число панелей на центральной полосе обозначается через n .

Если на какой-либо полосе последняя панель более чем наполовину выходит за заднюю кромку, то она отбрасывается. Если же она выходит менее чем наполовину, то крыло наращивается на соответствующую величину. Таким образом, задняя кромка крыла принимается ступенчатой. Присоединенные вихри и контрольные точки размещаются так же, как и раньше. Используя построенную таким образом модель, получаем следующую систему уравнений для расчета относительной напряженности присоединенных вихрей в расчетный момент t

или ζ_{i0}^* мнимые, то соответствующие скорости надо полагать равными 0.

$$\sum_{k=1}^{N+1} \sum_{\mu=1}^{n_{k-1}^k} \frac{\Gamma_{\mu k-1}^{jkr}}{4\pi c_j} \left[w_{y\mu p-1k-1r-1}^{vpkr} + \Delta w_{y\mu p-1k-1r-1}^{vpkr} \right] =$$

$$= f_j(\xi_{p-1}^{vp}, \zeta_{p-1}^{vp}, \tau_r) + \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{\mu=1}^{n_{k-1}^k} \frac{\Gamma_{\mu k-1}^{jkr-1}}{4\pi c_j} \left[w_{y\mu p-1k-1r-1}^{vpkr} + \Delta w_{y\mu p-1k-1r-1}^{vpkr} \right] -$$

$$- \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{\mu=1}^{n_{k-1}^k} \frac{\Delta \Gamma_{\mu k-1}^{jks}}{4\pi c_j} \left[w_{y\mu p-1k-1s-1}^{vpkr} + \Delta w_{y\mu p-1k-1s-1}^{vpkr} \right],$$

$$\nabla \Gamma_{\mu k-1}^{jks} = \Gamma_{\mu k-1}^{jks} - \Gamma_{\mu k-1}^{jks-1}, \quad \Delta \Gamma_{\mu k-1}^{jk1} = \Gamma_{\mu k-1}^{jk1}$$

$$\Delta \Gamma_{\mu k-1}^{jko} = \Gamma_{\mu k-1}^{jko} = 0, \quad [\Delta w_{y\mu p-1k-1r-1}^{vpkr}]_{K=N+1} = [\Delta w_{y\mu p-1k-1s-1}^{vpkr}]_{K=N+1} = 0 \quad (3.1)$$

$p=1, \dots, N; v=1, \dots, n_{p-1}^v; r=1, \dots, R.$

Скорости $w_{y\mu p-1k-1s}^{vpkr}$, $\Delta w_{y\mu p-1k-1s}^{vpkr}$ находятся здесь опять из формул (2.5), но при этом надо полагать

$$\xi_{\mu k-1}^k = \xi_{0k-1}^k + \frac{\mu^{-3/4}}{n}, \quad \xi_{0k-1}^k = \frac{1}{2}(\xi_{0k} + \xi_{0k-1}), \quad \zeta_{\mu k} = \zeta_{0k}$$

$$\zeta_{\mu k-1}^k = \frac{1}{2}(\zeta_{0k} + \zeta_{0k-1}), \quad \text{tg } \chi_{\mu k-1}^k = \frac{\xi_{*k-1}^k - \xi_{*k}^k}{\zeta_{*k-1}^k - \zeta_{*k}^k} \quad (3.2)$$

$$\xi_{p-1}^{vp} = \xi_{0p-1}^p + \frac{v^{-1/4}}{n}, \quad \xi_{0p-1}^p = \frac{1}{2}(\xi_{0p} + \xi_{0p-1}), \quad \zeta_{0p} = \zeta_{*p}$$

$$\zeta_{p-1}^{vp} = \frac{1}{2}(\zeta_{0p} + \zeta_{0p-1}), \quad \xi_{0k} = \frac{x_{0k}}{b}, \quad \zeta_{0k} = \zeta_{*k} = \frac{z_{0k}}{b} = \frac{z_{*k}}{b}$$

$$\xi_{*k} = \frac{x_{*k}}{b}, \quad \xi_{0p} = \frac{x_{0p}}{b}, \quad \zeta_{0p} = \frac{z_{0p}}{b}$$

где x_{0k} , z_{0k} (x_{0p} , z_{0p}), x_{*k} , z_{*k} (x_{*p} , z_{*p}) — координаты передней и задней кромок в сечении $K(P)$. Пределы сумм

$$n_{k-1}^p (n_{p-1}^p)$$

в (3.1) определяются как округленные до целого значения величины

$$n \frac{b_{k-1}^{pk}}{b} \left(n \frac{b_{p-1}^{pp}}{b} \right),$$

где

$$\frac{b_{k-1}^{pk}}{b} = \xi_{*k-1}^k - \xi_{0k-1}^k, \quad \xi_{0k-1}^k = \frac{1}{2}(\xi_{0k} + \xi_{0k-1})$$

$$\xi_{*k-1}^k = \frac{1}{2}(\xi_{*k} + \xi_{*k-1}), \quad \xi_{*k} = \frac{x_{*k}}{b} \quad (3.3)$$

4. Теорема Жуковского «в малом» при неустановившемся движении для баротропного газа. Расчет аэродинамических коэффициентов. Записывая интеграл Коши — Лагранжа в подвижной системе для нижней и верхней поверхностей и вычитая одно выражение из другого, получаем

$$P_- - P_+ = \frac{\partial(\Phi_+ - \Phi_-)}{\partial t} \pm \frac{W_{0+}^2 - W_{0-}^2}{2}, \quad P = \int \frac{dp}{\rho} \quad (4.1)$$

где P_+ , P_- , Φ_+ , Φ_- , W_{0+} , W_{0-} — предельные значения функции давления, потенциала возмущенных скоростей и относительной скорости при подходе к несущей поверхности сверху и снизу. Заменяя несущую поверхность вихревым слоем и повторяя выкладки, сделанные в работе [10], находим

$$P_- - P_+ = -\gamma_{l+} W_{00r} \quad (4.2)$$

Здесь γ_{l+} — напряженность слоя присоединенных вихрей, W_{00r} — составляющая относительной скорости, перпендикулярная присоединенным вихрям и определенная в точке, принадлежащей несущей поверхности.

В случае изэнтропического течения из (3.2) получаем следующее точное соотношение:

$$\left(\frac{p}{\rho}\right)_- - \left(\frac{p}{\rho}\right)_+ = -\frac{\kappa-1}{\kappa} \gamma_{l+} W_{00r} \quad (4.3)$$

Линеаризируя последнее соотношение и учитывая, что при этом $W_{00r} = -U_0$, находим

$$P_- - P_+ = \rho_\infty \gamma_{l+} U_0 \quad (4.4)$$

Используя последнюю формулу, получаем следующие соотношения для расчета значения аэродинамических коэффициентов в расчетный момент r для крыла с сужением, равным единице ($q = \frac{1}{2} \rho_\infty U_0^2$)

$$\begin{aligned} \frac{c_y^{rj}}{c_j} &= \frac{Y^{rj}}{qSc_j} = 4 \frac{b^2}{S} \sum_{k=1}^N \sum_{\mu=1}^n \frac{\Gamma_{\mu k-1}^{jkr}}{c_j} (\zeta_{\mu k-1} - \zeta_{\mu k}) \\ \frac{c_y'^{rj}}{c_j} &= \frac{dY^{rj}}{qb(z_{\mu k-1} - z_{\mu k})c_j} = 2 \sum_{\mu=1}^n \frac{\Gamma_{\mu k-1}^{jkr}}{c_j} \\ \frac{m_z^{rj}}{c_j} &= \frac{M_z^{rj}}{qSbc_j} = 4 \frac{b^2}{S} \sum_{k=1}^N \sum_{\mu=1}^n \frac{\Gamma_{\mu k-1}^{jkr}}{c_j} \xi_{\mu k-1}^k (\zeta_{\mu k-1} - \zeta_{\mu k}) \\ \frac{m_z'^{rj}}{c_j} &= \frac{dM_z^{rj}}{qb^2(z_{\mu k-1} - z_{\mu k})} = 2 \sum_{\mu=1}^n \frac{\Gamma_{\mu k-1}^{jkr}}{c_j} \xi_{\mu k-1}^k \\ \frac{m_x^{rj}}{c_j} &= \frac{M_x^{rj}}{qSLc_j} = -4 \frac{b^3}{SL} \sum_{k=1}^N \sum_{\mu=1}^n \frac{\Gamma_{\mu k-1}^{jkr}}{c_j} \xi_{\mu k-1}^k (\zeta_{\mu k-1} - \zeta_{\mu k}) \\ a &= \frac{\rho_\infty U_0^2}{2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Входящие в (4.5) величины имеют следующее значение: S — площадь крыла; L — размах крыла; Y^{rj} , M_z^{rj} , M_x^{rj} — подъемная сила, продольный момент и момент крена, действующие на крыло в момент r ; dY^{rj} , dM_z^{rj} — подъемная сила и продольный момент, действующие на часть крыла между сечениями K , $K-1$.

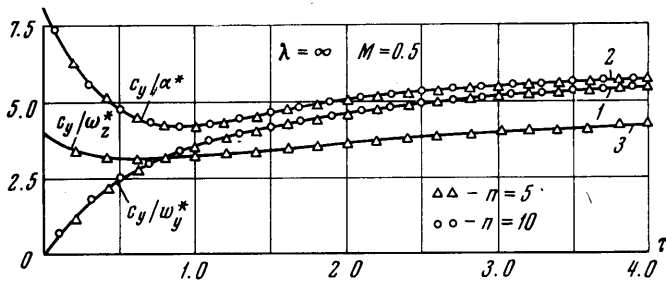
В случае крыла произвольной формы в плане для расчета аэродинамических коэффициентов получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{c_y^{rj}}{c_j} &= \frac{Y^{rj}}{qSc_j} = 4 \frac{b^3}{S} \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{\mu=1}^{n_{k-1}^k} \frac{\Gamma_{\mu k-1}^{jkr}}{c_j} \theta_{k-1}^k (\zeta_{\mu k-1} - \zeta_{\mu k}) \\ \frac{c_y'^{rj}}{c_j} &= \frac{dY^{rj}}{qSb_{k-1}^k (z_{\mu k-1} - z_{\mu k}) c_j} = 2 \frac{b}{b_{k-1}^k} \sum_{\mu=1}^{n_{k-1}^k} \frac{\Gamma_{\mu k-1}^{jkr}}{c_j} \\ \frac{m_z^{rj}}{c_j} &= \frac{M_z^{rj}}{qSbc_j} = 4 \frac{b^3}{S} \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{\mu=1}^{n_{k-1}^k} \frac{\Gamma_{\mu k-1}^{jkr}}{c_j} \xi_{\mu k-1}^k \theta_{k-1}^k (\zeta_{\mu k-1} - \zeta_{\mu k}) \\ \frac{m_z'^{rj}}{c_j} &= \frac{dM_z^{rj}}{qb_{k-1}^k (z_{\mu k-1} - z_{\mu k}) c_j} = 2 \frac{b}{b_{k-1}^k} \sum_{\mu=1}^{n_{k-1}^k} \frac{\Gamma_{\mu k-1}^{jkr}}{c_j} \xi_{\mu k-1}^k \end{aligned}$$

$$\frac{m_x^{rj}}{c_j} = \frac{M_x^{rj}}{qSLc_j} = -4 \frac{b^3}{SL} \sum_{k=1}^N \sum_{\mu=1}^{n_{k-1}^k} \frac{\Gamma_{\mu k-1}^{jkr}}{c_j} \zeta_{\mu k-1}^k (\zeta_{\mu k-1}^k - \zeta_{\mu k}^k)$$

$$\theta_{k-1}^k = 1, \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad \theta_{k-1}^k = \frac{1}{2}, \quad k = N + 1 \quad (4.6)$$

5. Примеры. По изложенной методике было рассчитано обтекание крыльев раз-



Фиг. 5

личной формы в плане при ступенчатом изменении кинематических параметров по времени

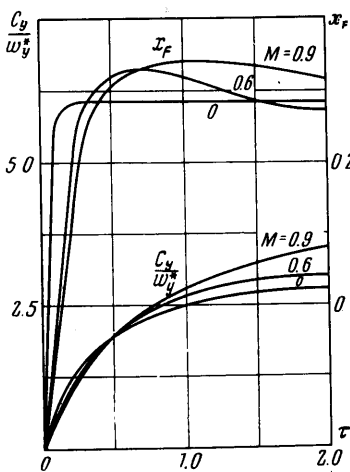
$$\frac{\alpha}{\alpha^*} = \frac{\omega_z}{\omega_z^*} = \begin{cases} 0, & \tau < 0 \\ 1, & \tau \geq 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Первый случай соответствует мгновенному охвату крыла равномерным порывом, второй — ступенчатому изменению по времени угловой скорости.

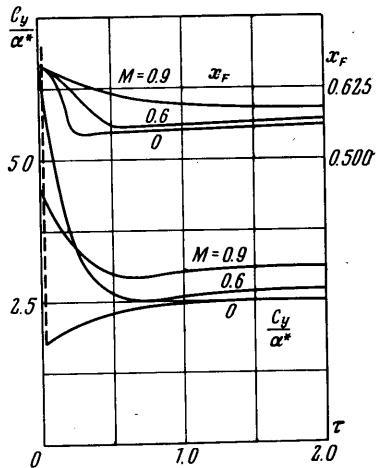
Кроме того, было изучено постепенное вхождение крыльев в порыв, характеризуемый следующими скоростями:

$$\frac{w_y}{w_y^*} = \begin{cases} 0, & \tau < 0 \\ 1, & \tau \geq 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

На фиг. 5 приведены материалы, имеющие методическое значение. Они относятся к пластинке бесконечного размаха ($\lambda = \infty$) при $M = 0.5$ (1 — постепенное

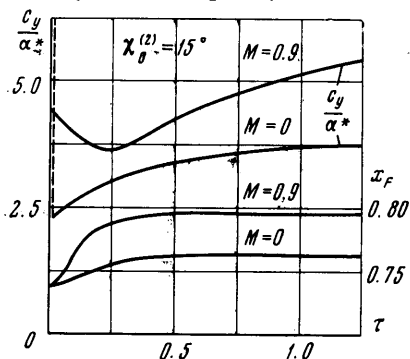


Фиг. 6.



Фиг. 7

вхождение в порыв, 2 — мгновенный охват крыла порывом, 3 — ступенчатое изменение угловой скорости). Сплошными



Фиг. 8

линиями нанесены результаты, заимствованные из работ [2, 4], точками — результаты численных расчетов. Оказалось, что уже при $n = 5-10$ (n — число вихрей на профиле) обеспечивается достаточная точность расчетов как для суммарных характеристик (подъемная сила, момент), так и для нагрузок.

Фиг. 6 содержит данные об изменении во времени коэффициента подъемной силы и положения фокуса прямоугольного крыла удлинения $\lambda = 2,5$ (x_F — координата фокуса относительно носка корневой хорды, отнесенная к этой хорде [10]). Результаты расчетов даны при трех числах Маха: $M = 0$ (несжимаемая среда), $M = 0,6$ и $M = 0,9$ для постепенного вхождения крыла в порыв.

Аналогичные данные для треугольного крыла того же удлинения ($\lambda = 2,5$), но при мгновенном охвате крыла порывом, приведены на фиг. 7.

И наконец, фиг. 8 содержит результаты расчетов для крыла изменяемой геометрии самолета $F-111$ при мгновенном охвате крыла порывом. Указанные данные относятся к такому положению консолей, при котором угол стреловидности их по передней кромке равен 15° (удлинение крыла при этом $\lambda = 7,4$).

Отметим, что в несжимаемой среде ($M = 0$) в первый момент после мгновенного охвата порывом подъемная сила теоретически равна бесконечности и затем мгновенно падает до конечного значения (фиг. 7 и 8).

Авторы благодарят Н. Л. Мазикову и М. И. Ништа, которые провели расчеты примеров.

Поступило 28 II 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Mazelsky B. Numerical determination of indicial lift of a two-dimensional stinging airfoil at subsonic Mach numbers from oscillatory lift coefficients with calculations from Mach number 0.7. NACA TN, 1951, No. 2562.
2. Lomax H., Heaslet M., Fuller F., Sluder L. Two- and three-dimensional unsteady lift problem in high-speed flight. NACA Rept, 1952, No. 1077.
3. Некрасов А. И. Теория крыла в нестационарном потоке. М., Изд-во АН СССР, 1947.
4. Бисплингофф Р. Л., Эшли Х., Халфмэн Р. Л. Аэроупругость. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
5. Landahl M. T., Stark V. J. E. Numerical lifting-surface theory-problems and progress. AIAA Paper, 1968, No. 68-72.
6. Белоцерковский С. М. Метод расчета воздействия порыва на произвольное тонкое крыло. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.
7. Белоцерковский С. М. Особенности расчета обтекания крыльев сложной формы в плане при дозвуковых скоростях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
8. Красильщикова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. М., Гостехиздат, 1952.
9. Dörr J. Beitrag zu einer Wirbeltheorie des kompressiblen Mediums. Ingr-Arch., 1950, Bd 18, Nr 6.
10. Белоцерковский С. М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М., «Наука», 1965.

КРЫЛЬЯ ЗАДАННОГО ОБЪЕМА С МАКСИМАЛЬНЫМ АЭРОДИНАМИЧЕСКИМ КАЧЕСТВОМ В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

В. Д. ПЕРМИНОВ

(Москва)

Приводятся результаты численного решения задачи о треугольном крыле заданного объема, обладающего максимальным аэродинамическим качеством в гиперзвуковом потоке.

При расчете аэродинамических характеристик несущих тел в гиперзвуковом потоке вязкого газа часто считают, что коэффициент давления на поверхности тела