

## ЛИТЕРАТУРА

1. Коробейников В. П. Задача о сильном точечном взрыве при нулевом градиенте температуры. Докл. АН СССР, 1956, т. 109, № 2.
2. Рыжов О. С., Таганов Г. И. Второй предельный случай задачи о взрыве. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
3. Мельникова Н. С. О неустановившемся гомотермическом движении газа, вытесняемого поршнем. Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1966, вып. 87.
4. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., Гостехиздат, 1955.
5. Домбровский Г. А. Приближенное интегрирование уравнений одномерного неустановившегося движения идеального газа. Изв. АН СССР, *Механика и машиностроение*, 1963, № 6.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИИ  
ПРИ РАСЧЕТЕ КРУГОВЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ РЕШЕТОК

Т. С. СОЛОМАХОВА

(Москва)

Получены асимптотические формулы для расчета режима безударного входа и суммарной циркуляции около профилей круговых вращающихся достаточно густых и достаточно редких решеток, составленных из отрезков логарифмических спиралей. В определенном диапазоне значений параметра  $p$ , характеризующего густоту решетки, асимптотические формулы хорошо согласуются с точными.

1. Расчет плоских круговых вращающихся решеток, составленных из отрезков логарифмических спиралей, можно произвести [1-3] с помощью конформного отображения области течения на многолиственную область вне окружности единичного радиуса без двух симметрично расположенных точек действительной оси. При этом формулы для основных безразмерных гидродинамических параметров решетки: суммарной циркуляции  $G$  около профилей, расхода  $q^*$  и циркуляции  $G^*$  на режиме безударного входа — имеют вид [3]

$$G = \frac{2 \sin \beta a - \sin \beta}{\pi r_2^2} I_2 - \frac{2 \sin \beta}{a + \sin \beta} \Gamma_1 - \frac{2 \cos \beta}{a + \sin \beta} q$$

$$q^* = \frac{\operatorname{tg} \beta \operatorname{sh} 2p}{4\pi a r_2^2} \left[ (I_2 - I_1) - \frac{\sin \beta}{a} (I_2 + I_1) \right] - \operatorname{tg} \beta \Gamma_1 \quad (1.1)$$

$$G^* = \frac{\sin \beta \operatorname{sh} 2p}{2\pi a^2 r_2^2} (I_2 + I_1)$$

$$I_{1,2} = \int_0^{2\pi} B_{1,2}(s, p) ds = \int_0^{2\pi} r^2(s) \frac{\operatorname{ch} p \sin \beta \cos s + \operatorname{sh} p \cos \beta \sin s \mp a}{\operatorname{ch} 2p - \cos 2s} ds \quad (1.2)$$

$$r(s) = \exp \frac{1}{n} \left[ \sin^2 \beta \ln \frac{\operatorname{ch} p + \cos s}{\operatorname{ch} p - \cos s} + \sin 2\beta \operatorname{arctg} \frac{\sin s}{\operatorname{sh} p} \right] \quad (1.3)$$

$$r_2 = \frac{1}{r_1} = \exp \frac{1}{n} \left[ 2 \sin^2 \beta \ln \frac{\sin \beta + a}{\operatorname{sh} p} + \sin 2\beta \operatorname{arctg} \frac{\cos \beta}{a} \right] \quad (1.4)$$

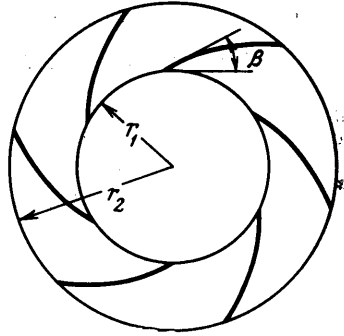
$$a = \sqrt{0.5(\operatorname{ch} 2p - \cos 2\beta)} \quad (1.5)$$

Формулы (1.1) — (1.5) отличаются от аналогичных формул, представленных в [3], тем, что вместо параметра  $R$  введен новый параметр  $p$ , более удобный при получении асимптотических представлений.

Здесь  $\beta$  — угол спирали;  $r_1, r_2$  — радиусы круговой решетки (фиг. 1);  $n$  — число лопаток;  $p$  — некоторый параметр, зависящий от геометрических параметров решетки и определяемый уравнением (1.4);  $\Gamma_1$  — безразмерная циркуляция при входе в решетку;  $q$  — коэффициент расхода. Числовой расчет этих параметров эффективно осуществляется с помощью ЭЦВМ.

2. В ряде практически важных случаев, когда решетка имеет достаточно большую густоту ( $p \rightarrow 0$ ), в аналитических выражениях (1.1) — (1.5) появляются особенности. Они обусловлены тем, что особые точки, в которых располагаются вихреисточники и вихрестроки, имитирующие в плоскости окружности течение, эквивалентное течению в решетке, при большой густоте решетки стремятся к контуру окружности. Проведение численных расчетов по формулам (1.1) — (1.5) становится невозможным. Получим для этих случаев путем предельного перехода соответствующие асимптотические формулы.

Оценим прежде всего значения расходящихся при  $p \rightarrow 0$  интегралов (1.2). Рассмотрим для примера интеграл  $I_1$ . Из анализа поведения подынтегральной функции  $B_1(s, p)$  на отрезке интегрирования следует, что при  $p = 0$  она обращается в бесконечность при  $s = 0, \pi, 2\pi$ . Выделим на отрезке интегрирования интервалы, содержащие эти особые точки, и разобьем интеграл  $I_1$  на сумму пяти интегралов. Интегралы, взятые по отрезкам вне выделенных интервалов, где функция  $B_1(s, p)$  непрерывна, будут ограничены. Легко показать, что несобственные интегралы по отрезкам  $0 \leq s \leq \delta$  и  $2\pi - \delta \leq s \leq 2\pi$  сходятся. Следовательно, бесконечные значения интеграла  $I_1$  определяются интервалом  $\pi - \delta \leq s \leq \pi + \delta$ . Разложим в этом интервале функцию  $B_1(s, p)$  в ряд при малых значениях параметра  $p$  и выделим особенность. Получим



Фиг. 1. Схема круговой решетки

$$B_1(s, p) = -\sin \beta 4^{-(2 \sin^2 \beta)/n} (p^2 + s^2)^{-1+(2 \sin^2 \beta)/n} + F(s, p)$$

где  $F(s, p)$  — некоторая аналитическая функция. Тогда интеграл

$$I_1 \approx -\sin \beta 2^{1-(4 \sin^2 \beta)/n} \int_0^{\delta} (p^2 + s^2)^{-1+(2 \sin^2 \beta)/n} ds$$

Сделаем замену  $s/p = x$  и переходя к пределу при  $p \rightarrow 0$ , получим

$$I_1 \approx -\sin \beta (2/p)^{1-(4 \sin^2 \beta)/n} \int_0^{\infty} (1+x^2)^{-1+(2 \sin^2 \beta)/n} dx =$$

$$= -\sin \beta \frac{\sqrt{\pi} \Gamma [0.5 - (2 \sin^2 \beta)/n]}{2 \Gamma [1 - (2 \sin^2 \beta)/n]} \left( \frac{2}{p} \right)^{1-(4 \sin^2 \beta)/n} \quad (2.1)$$

где  $\Gamma[x]$  —  $\gamma$ -функция. Асимптотические при  $p \rightarrow 0$  значения интеграла  $I_2$  определяются окрестностями точек  $s = 0$  и  $2\pi$ . Проведя соответствующие оценки, будем иметь

$$I_2 \approx \sin \beta \frac{\sqrt{\pi} \Gamma [0.5 - (2 \sin^2 \beta)/n]}{2 \Gamma [1 + (2 \sin^2 \beta)/n]} \left( \frac{2}{p} \right)^{1-(4 \sin^2 \beta)/n} \quad (2.2)$$

Подставляя (2.1) — (2.2) в (1.1), после некоторых преобразований получаем следующие асимптотические представления:

$$G \approx \frac{1}{\sqrt{\pi} A} \frac{\Gamma [0.5 + (2 \sin^2 \beta)/n]}{\Gamma [1 + (2 \sin^2 \beta)/n]} - \Gamma_1 - \text{ctg } \beta q$$

$$q^* \approx \frac{A \text{tg } \beta \Gamma [0.5 - (2 \sin^2 \beta)/n]}{\sqrt{\pi} \Gamma [1 - (2 \sin^2 \beta)/n]} \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 - \text{tg } \beta \Gamma_1 \quad (2.3)$$

$$G^* \approx \frac{1}{\sqrt{\pi} A} \left\{ \frac{\Gamma [0.5 + (2 \sin^2 \beta)/n]}{\Gamma [1 + (2 \sin^2 \beta)/n]} - \frac{\Gamma [0.5 - (2 \sin^2 \beta)/n]}{\Gamma [1 - (2 \sin^2 \beta)/n]} \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 A^2 \right\}$$

где

$$A = \exp [(2/n)(\pi/2 - \beta) \sin 2\beta] \sin \beta^{(4 \sin^2 \beta)/n}$$

Сравним полученные формулы с двумя известными решениями, соответствующими, как легко видеть из уравнения (1.4), малым значениям параметра  $p$ .

а) При бесконечно большом числе лопаток ( $n = \infty$ ) формулы (2.3) имеют вид

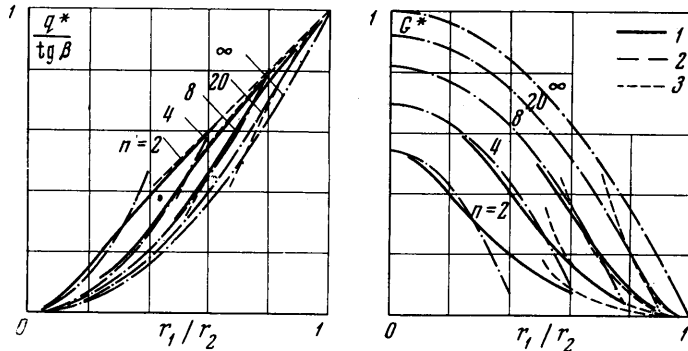
$$G = 1 - \Gamma_1 - \operatorname{ctg} \beta q, \quad q^* = \operatorname{tg} \beta [(r_1/r_2)^2 - \Gamma_1], \quad G^* = 1 - (r_1/r_2)^2 \quad (2.4)$$

и полностью совпадают (при  $\Gamma_1 = 0$ ) с широко известными формулами одномерной струйной теории.

б) В случае круговой решетки, составленной из полубесконечных сходящихся в центре радиальных отрезков ( $\beta = 90^\circ$ ;  $r_1/r_2 = 0$ ), при  $\Gamma_1 = 0$  из (2.3) будем иметь

$$G = G^* = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(0.5 + 2/n)}{\Gamma(1 + 2/n)}$$

Эта формула определяет зависимость  $G(n)$ , эквивалентную аналогичной зависимости, полученной в виде бесконечного ряда В. Кухарским [4].



Фиг. 2. Зависимость коэффициентов  $q^*/\operatorname{tg} \beta$  и  $G^*$  от отношения  $r_1/r_2$  при  $\beta = 30^\circ$

3. В случае редких решеток ( $p$  — велико) также могут быть получены соответствующие асимптотические формулы. Раскладывая подынтегральные функции  $B_{1,2}(s, p)$  в ряды по степеням  $e^{-p}$  и ограничиваясь тремя первыми членами, получаем из (1.2)

$$I_1(p) \approx 2\pi e^{-2p} \left[ -1 + \frac{4 \sin \beta}{n} e^{-p} - \left( \frac{16 \sin^2 \beta}{n^2} - \cos 2\beta \right) e^{-2p} \right]$$

$$I_2(p) \approx 2\pi e^{-2p} \left[ 1 + \frac{4 \sin \beta}{n} e^{-p} + \left( \frac{16 \sin^2 \beta}{n^2} - \cos 2\beta \right) e^{-2p} \right]$$

Аналогично из формул (1.1) и (1.4) будем иметь

$$q^* \approx \operatorname{tg} \beta \left[ -\Gamma_1 + \frac{r_1}{r_2} - \frac{8 \sin^2 \beta}{n} \left( \frac{r_1}{r_2} \right) \left( 1 - \frac{2}{n} \right) e^{-2p} \right]$$

$$G^* \approx \frac{16 \sin^2 \beta}{n} \left( \frac{r_1}{r_2} \right) (1 + 2 \cos 2\beta e^{-2p}) e^{-2p} \quad (3.1)$$

$$\frac{r_1}{r_2} \approx 1 - \frac{8 \sin \beta}{n} e^{-p} + \frac{32 \sin^2 \beta}{n^2} e^{-2p}$$

4. По полученным выше точным (1.1) — (1.5) и асимптотическим (2.3), (3.1) формулам были проведены расчеты на ЭЦВМ «Минск-2» в широком диапазоне параметров  $r_1/r_2$ ,  $n$  и  $\beta$ .

При вычислении интегралов (1.2) использовался метод Симпсона с переменным шагом, что позволило определить значения интегралов с большой степенью точности. Для примера на фиг. 2 приводятся зависимости коэффициентов  $q^*(r_1/r_2)$  и  $G^*(r_1/r_2)$  при  $n = 2, 4, 8, 20$ ,  $\infty$  и  $\beta = 30^\circ$ ; кривые 1, 2, 3 построены соответственно по формулам (1.1), (2.3), (3.1). При  $p \leq 0.005$  и  $p \geq 1.5$  получена хорошая сходимость значений коэффициентов  $q^*$  и  $G^*$ , вычисленных по точным и приближенным формулам, причем сходимость тем лучше, чем больше число лопаток и меньше угол  $\beta$ . Это значит, что при небольших значениях отношения  $r_1/r_2$  и при  $r_1/r_2$ , близких к единице, для расчета аэродинамических параметров решетки с достаточной для практических целей точностью могут быть использованы приближенные асимптотические формулы.

Автор выражает признательность Г. Ю. Степанову за ценные замечания, высказанные при обсуждении этой работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Busemann A. Das Förderhöhenverhältnis radialer Kreiselpumpen mit logarithmisch-spiraligen Schaufeln. ZAMM, 1928, Bd 8, H. 5, S 372—384.
2. Майкапар Г. И. Расчет круговых решеток. В сб.: «Промышленная аэродинамика», М., «Машиностроение», 1966, вып. 28, стр. 5—32.
3. Соломахова Т. С. Расчет аэродинамических характеристик вращающихся круговых решеток профилей, очерченных по логарифмическим спиральям. Сб. «Промышленная аэродинамика», М., «Машиностроение», 1966, вып. 28, стр. 33—59.
4. KucharSKI W. Strömungen einer Reibungsfreien Flüssigkeit bei Rotation fester Körper. München, 1918.

### РАСЧЕТ ВОЗДЕЙСТВИЯ ПОРЫВА НА КРЫЛО СЛОЖНОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ ПРИ ДОЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

С. М. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ, Г. А. КОЛЕСНИКОВ

(Москва)

Наиболее трудными среди нестационарных задач теории крыла являются те, в которых рассматривается воздействие порыва на крыло, движущееся с дозвуковой скоростью в сжимаемой среде ( $0 < M \leq 1$ ).

Это связано, во-первых, с тем, что, в отличие от несжимаемой среды ( $M = 0$ ), здесь возмущения распространяются с конечной скоростью. Поэтому приходится учитывать запаздывание возмущений. Но если при  $M > 1$  возмущения распространяются только вниз по течению, внутри соответствующего конуса Маха, то когда  $M < 1$ , они достигают любой точки пространства. Из-за этого, например, вся вихревая пелена, образующаяся за крылом, оказывает влияние на его обтекание.

Во-вторых, здесь, в отличие от установившихся гармонических колебаний, зависимость от времени не может быть исключена, и время играет роль равноправного аргумента. Так, например, в процессе расчета обтекания приходится выстраивать след за крылом (находить положения и циркуляции всех свободных вихрей). Таким образом, пространственная задача для крыла конечного размаха становится четырехмерной.

К настоящему времени в дозвуковом потоке газа удалось получить численное решение этой задачи лишь для пластинки бесконечного размаха [1, 2]. Для крыла конечного удлинения, насколько нам известно (см. об этом в работах [3—5]), эффективный метод решения разработан лишь в случае  $M = 0$  (несжимаемая среда) [6, 7].

Предлагается численный метод расчета обтекания крыла произвольной формы в плане (в том числе и сложной — изменяемой геометрии, с криволинейными кромками, изломами и т. д.) во всем диапазоне дозвуковых чисел  $M$  (включая  $M = 0$ ). При этом зависимость граничных условий от времени и координат может быть произвольной.

Основная идея метода заключается в переходе от непрерывных распределений и процессов к дискретным.

Во-первых, вихревой слой, заменяющий крыло, приближенно моделируется системой дискретных вихрей, число которых может неограниченно увеличиваться. При этом в качестве основной вихревой особенности берется косою нестационарный вихрь.

Во-вторых, непрерывный процесс изменения циркуляции по времени заменяется ступенчатым. В определенные (расчетные) моменты времени происходит скачкообразное изменение циркуляции присоединенных вихрей, и с них сходят свободные вихри. В сжимаемой среде возмущения распространяются с конечной скоростью, по-