К ТЕОРИИ ОДНОМЕРНОГО ГОМОТЕРМИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

М. Д. УСТИНОВ

(*Калинин*)

Показано, что возможна линеаризация уравнений одномерного гомотермического движения идеального газа, термодинамические параметры которого зависят определенным образом от трех произвольных функций.

В высокотемпературных потоках в ряде случаев можно считать с достаточной степенью точности, что температура газа T будет функцией лишь времени [1–3], т. е.

$$T = H(t) \tag{1}$$

где $H(t)$ — произвольная функция времени, определяемая из условий задачи. Уравнения одномерного гомотермического движения идеального газа в общем случае не допускают линеаризацию (кроме случая, когда $H(t) = \text{const}$).

Рассмотрим идеальный газ, термодинамические параметры которого определим следующим образом:

$$T = F(p + w), \qquad w = \varphi(\rho)$$

$$U = \int\limits_{\tau_0}^{\tau = p + w} F(\tau)\Phi'(\tau)\,d\tau + \frac{F(p+w)}{\rho F'(p+w)} - \frac{p}{\rho} - \int \frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\,d\rho \tag{2}$$

$$S = \frac{1}{\rho F'(p+w)} + \Phi(p+w)$$

Здесь p — давление; ρ — плотность, U — внутренняя энергия газа, отнесенная к единице массы, S — энтропия; Φ, F, φ — произвольные функции своих аргументов. Покажем, что уравнения одномерного (с плоской симметрией) гомотермического движения газа (2) допускают линеаризацию. Упомянутые уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{p\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} + \varphi'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

где u — скорость газа, x — геометрическая координата. Последнее уравнение выражает тот факт, что температура газа, определяемая первым из равенств (2), зависит лишь от времени, т. е. течение будет гомотермическим. Полагая

$$\int \frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\,d\rho = v, \qquad \varphi'(\rho) = -f(v) \tag{4}$$

преобразуем уравнения (3) к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} - f(v)\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

Принимая u и v за новые независимые переменные, получаем из (5)

$$-\frac{\partial x}{\partial v} + u\frac{\partial t}{\partial u} + \frac{\partial t}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial x}{\partial u} - f(v)\frac{\partial t}{\partial v} - u\frac{\partial t}{\partial u} = 0 \tag{6}$$

Исключая x, получаем линейное уравнение второго порядка для $t = t(u, v)$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} - f(v)\frac{\partial^2 t}{\partial v^2} + \frac{\partial t}{\partial v}[1 + f'(v)] = 0 \tag{7}$$

причем $f(v) > 0$ означает, что $(\partial T / \partial \rho)_p < 0$.

Перейдем к характеристическим переменным

$$\xi = \int \frac{dv}{\sqrt{f(v)}} + u, \qquad \eta = \int \frac{dv}{\sqrt{f(v)}} - u \tag{8}$$

и преобразуем (7) к следующей окончательной форме:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \xi\,\partial \eta} - h(\xi + \eta)\left(\frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial t}{\partial \eta}\right) = 0, \qquad h(\xi + \eta) = \frac{2 - f'(v)}{8\sqrt{f(v)}} \tag{9}$$

Подбирая должным образом функцию $\varphi(\rho)$, можно получить общее решение (9) в замкнутом виде [4, 5].

Поступило 10 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробейников В. П. Задача о сильном точечном взрыве при нулевом градиенте температуры. Докл. АН СССР, 1956, т. 109, № 2.
2. Рыжов О. С., Таганов Г. И. Второй предельный случай задачи о взрыве. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
3. Мельникова Н. С. О неустановившемся гомотермическом движении газа, вытесняемого поршнем. Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1966, вып. 87.
4. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., Гостехиздат, 1955.
5. Домбровский Г. А. Приближенное интегрирование уравнений одномерного неустановившегося движения идеального газа. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 6.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПРИ РАСЧЕТЕ КРУГОВЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ РЕШЕТОК

Т. С. СОЛОМАХОВА

(*Москва*)

Получены асимптотические формулы для расчета режима безударного входа и суммарной циркуляции около профилей круговых вращающихся достаточно густых и достаточно редких решеток, составленных из отрезков логарифмических спиралей. В определенном диапазоне значений параметра p, характеризующего густоту решетки, асимптотические формулы хорошо согласуются с точными.

1. Расчет плоских круговых вращающихся решеток, составленных из отрезков логарифмических спиралей, можно произвести [1-3] с помощью конформного отображения области течения на многолистную область вне окружности единичного радиуса без двух симметрично расположенных точек действительной оси. При этом формулы для основных безразмерных гидродинамических параметров решетки: суммарной циркуляции G около профилей, расхода q^* и циркуляции G^* на режиме безударного входа — имеют вид [3]

$$G = \frac{2\sin\beta}{\pi r_2^2}\,\frac{a-\sin\beta}{a\,\mathrm{th}\,p} I_2 - \frac{2\sin\beta}{a+\sin\beta}\Gamma_1 - \frac{2\cos\beta}{a+\sin\beta} q$$

$$q^* = \frac{\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{sh}\,2p}{4\pi a r_2^2}\left[(I_2 - I_1) - \frac{\sin\beta}{a}(I_2 + I_1)\right] - \mathrm{tg}\,\beta\Gamma_1 \qquad (1.1)$$

$$G^* = \frac{\sin\beta\,\mathrm{sh}\,2p}{2\pi a^2 r_2^2}(I_2 + I_1)$$

$$I_{1,2} = \int_0^{2\pi} B_{1,2}(s,p)\,ds = \int_0^{2\pi} r^2(s)\frac{\mathrm{ch}\,p\sin\beta\cos s + \mathrm{sh}\,p\cos\beta\sin s \mp a}{\mathrm{ch}\,2p - \cos 2s}\,ds \qquad (1.2)$$

$$r(s) = \exp\frac{1}{n}\left[\sin^2\beta\ln\frac{\mathrm{ch}\,p + \cos s}{\mathrm{ch}\,p - \cos s} + \sin 2\beta\,\mathrm{arctg}\frac{\sin s}{\mathrm{sh}\,p}\right] \qquad (1.3)$$

$$r_2 = \frac{1}{r_1} = \exp\frac{1}{n}\left[2\sin^2\beta\ln\frac{\sin\beta + a}{\mathrm{sh}\,p} + \sin 2\beta\,\mathrm{arctg}\frac{\cos\beta}{a}\right] \qquad (1.4)$$

$$a = \sqrt{0.5(\mathrm{ch}\,2p - \cos 2\beta)} \qquad (1.5)$$

Формулы (1.1) — (1.5) отличаются от аналогичных формул, представленных в [3], тем, что вместо параметра R введен новый параметр p, более удобный при получении асимптотических представлений.

Здесь β — угол спирали; r_1, r_2 — радиусы круговой решетки (фиг. 1); n — число лопаток; p — некоторый параметр, зависящий от геометрических параметров решетки и определяемый уравнением (1.4); Γ_1 — безразмерная циркуляция при входе в решетку; q — коэффициент расхода. Числовой расчет этих параметров эффективно осуществляется с помощью ЭЦВМ.