

ГИДРОСТАТИКА В СЛАБЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЯХ. ФОРМЫ РАВНОВЕСИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ НЕВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ

Л. А. СЛОБОЖАНИН

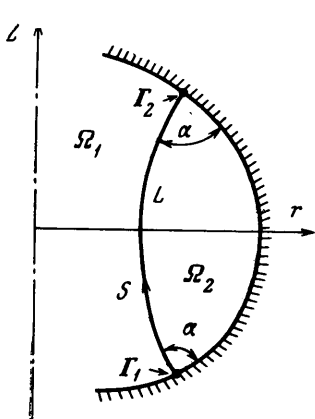
(Харьков)

Рассматривается задача об осесимметричных равновесных формах поверхности вращающейся жидкости, обладающей поверхностным натяжением, при отсутствии внешнего силового поля. При этом заранее не предполагается замкнутость равновесной поверхности или ее пересечение с осью вращения [1, 2]. Изучаются свойства двухпараметрического семейства решений уравнения равновесия. По результатам численного интегрирования на ЭЦВМ построены типичные формы интегральных кривых. Используя методы теории погранслоя, находится приближенное выражение для формы равновесной поверхности при больших угловых скоростях вращения.

1. Пусть некоторый замкнутый осесимметричный сосуд вместе с полностью заполняющими его двумя однородными несжимаемыми несмещающимися жидкостями равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг оси симметрии z . Жидкости подвержены действию сил поверхностного натяжения. Внешнее силовое поле отсутствует.

Будем считать, что жидкость плотности ρ_i и объема v_i занимает область Ω_i ($i = 1, 2$) (фиг. 1). Обозначим через σ и σ_i коэффициенты поверхностного натяжения на границе Σ раздела жидкостей и, соответственно, на границе соприкосновения i -й жидкости со стенкой сосуда.

Вводя подвижную цилиндрическую систему координат r, θ, z , жестко связанную с сосудом, рассмотрим в этой системе осесимметричные равновесные формы поверхности раздела жидкостей. Форма равновесной линии раздела L (линии пересечения поверхности Σ с полуплоскостью $\theta = \text{const}$) определяется [3] из системы



Фиг. 1

$$r'' = -z' \left(-pr^2 + c - \frac{z'}{r} \right) \quad (1.1)$$

$$z'' = r' \left(-pr^2 + c - \frac{z'}{r} \right) \quad \left(' = \frac{d}{ds} \right)$$

при дополнительном условии

$$\cos \alpha = (\sigma_1 - \sigma_2) / \sigma \quad (1.2)$$

в точках пересечения L со стенкой сосуда и условия заданного объема одной из жидкостей

$$\int_{\Omega_i} dv = v_i \left(p = \frac{(\rho_2 - \rho_1) \omega^2}{2\sigma} \right) \quad (1.3)$$

Здесь p — параметр размерности (длина)⁻³; s — длина дуги линии L , которую проходят так, чтобы область Ω_2 оставалась справа; c — неизвестная постоянная; α — краевой угол области Ω_2 . Выражение в скобках в (1.1) представляет собой кривизну линии раздела L ; эта кривизна считается положительной, если выпуклость линии направлена в сторону Ω_2 , и отрицательной в противном случае.

Полагая $p \neq 0$ (случай $p = 0$ рассмотрен в работе [3]) и переходя к безразмерным величинам

$$R = r|p|^{1/2}, \quad Z = z|p|^{1/2}, \quad S = s|p|^{1/2}, \quad C = c|p|^{-1/2} \quad (1.4)$$

перепишем систему (1.1) в виде

$$\begin{aligned} R'' &= -Z'(-\varepsilon R^2 + C - Z'/R) \\ Z'' &= R'(-\varepsilon R^2 + C - Z'/R) \end{aligned} \quad \left(\varepsilon = \frac{d}{dS} \right), \quad \varepsilon = \begin{cases} +1 & (\rho_2 > \rho_1) \\ -1 & (\rho_2 < \rho_1) \end{cases}$$

Величина $\varepsilon = +1$, если при движении вдоль линии раздела L справа находится более плотная жидкость; в противном случае $\varepsilon = -1$.

Если не принимать во внимание решения $R(S) \equiv \text{const}$, $Z(S) \equiv S$, которые допускает система

$$\begin{aligned} Z'R &= -1/4\varepsilon R^4 + 1/2CR^2 + A_0 \quad (A_0 = 1/4\varepsilon R_0^4 - 1/2CR_0^2 + R_0Z_0') \\ R'^2 + Z'^2 &= 1 \quad \text{при } (-\varepsilon R^2 + C - Z'/R) \neq 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

то системы (1.4) и (1.5) эквивалентны. Здесь R_0 , Z_0' — значения R и Z' в начальной точке.

Исключая из (1.5) величину Z' и вводя замену $R^2 = x$, получаем

$$x'^2 = 4x - (-1/2\varepsilon x^2 + Cx + 2A_0)^2 \equiv f(x, \varepsilon, C, A_0).$$

Можно показать, что решения системы (1.4) обладают следующими общими свойствами.

(1) Решение $R(S)$ имеет по крайней мере одну стационарную точку (S_0, R_0) ($x = R_0^2$ — корень функции $f(x)$).

(2) Прямая $S = S_0$, проходящая через любую стационарную точку (S_0, R_0) , будет прямой симметрии для решения $R(S)$.

(3) Если при заданных ε , C и R_0 значение $x = R_0^2$ будет кратным корнем функции $f(x)$, то $R(S) \equiv R_0$, $Z(S) \equiv S$.

(4) Если $a_1 < a_2 < a_3$ — вещественные корни функции $f(x)$ (a_2 — кратный корень) и при этом $R_0^2 \neq a_2$ ($f(x)$ всегда имеет либо два, либо четыре неотрицательных корня), то функция $R(S)$ асимптотически стремится к значению $R = \sqrt{a_2}$ при $S \rightarrow \infty$.

(5) Если среди корней $a_1 < a_2 < a_3$ функции $f(x)$ кратным будет либо $x = a_1$, либо $x = a_3$ (и при этом R_0^2 не совпадает с кратным корнем) или если $f(x)$ не имеет кратных неотрицательных корней, то $R(S)$, $Z'(S)$ будут периодическими функциями.

(6) Все семейство интегральных линий системы (1.4) с точностью до несущественных начала отсчета дуги S и сдвига вдоль оси Z исчерпывается решениями с начальными условиями

$$R(0) = R_0, \quad R'(0) = 0, \quad Z(0) = 0, \quad Z'(0) = 1 \quad (1.6)$$

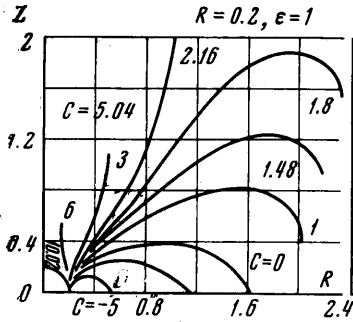
При этом $R(S)$ будет четной функцией, а $Z(S)$ — нечетной.

Из свойства (6) непосредственно следует утверждение, аналогичное теореме Лихтенштейна [4] о наличии экваториальной плоскости симметрии у фигур равновесия вращающейся самогравитирующей жидкости.

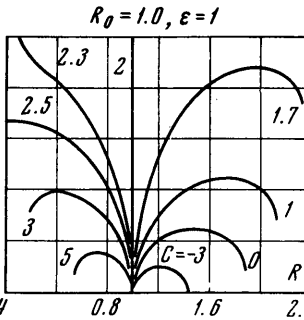
Заметим, что при изменении направления движения вдоль линии раздела значение ε изменяет знак; поэтому полная совокупность интегральных кривых (в (1.6) $Z'(0) = \pm 1$) при $\varepsilon = +1$ та же, что и при $\varepsilon = -1$, но с противоположной ориентацией линий.

При известном значении p система (1.1) в силу произвольности c имеет в общем случае трехпараметрическое семейство решений. Для поверхностей, не пересекающих ось вращения, эти три параметра (такими будут значения R_0 и C , определяющие форму интегральной линии, и величина сдвига $Z(0) = Z_0$ этой линии, как единого целого, вдоль оси Z) определяются из условий (1.2) на двух линиях Γ_1 и Γ_2 пересечения равновесной поверхности со стенками сосуда и из условия (1.3). (В случае поверхности раздела, пересекающей ось вращения, совокупность возможных поверхностей содержит два параметра, которые подбираются из условия (1.2) и (1.3)).

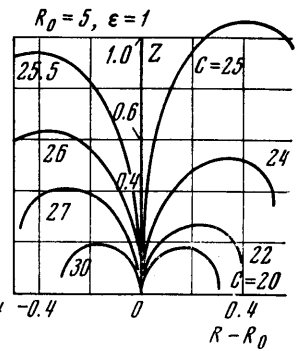
Из приведенных свойств вытекает, что для исследования поведения всей интегральной линии системы (1.4) (при заданных ϵ , C , R_0) достаточно провести его для участка, на котором $Z(R)$ — однозначная функция. Однако $Z(R)$ в общем случае выражается через гиперэллиптический интеграл. Тем не менее изучение уравнений



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

равновесия в форме (1.5) позволяет определить качественное поведение решений при различных значениях ϵ , C и R_0 . Опуская промежуточные выкладки, приведем полученные результаты (имея в виду, что в начальной точке выполняются условия (1.6)).

2. Пусть $\epsilon = +1$. Тогда

1) Если $R_0 < 2^{-1/3}$ (см. фиг. 2, на которой представлены типичные формы решений для $R_0 = 0.2$ и совокупности значений C , построенные с помощью численного интегрирования системы (1.4)), то

а) для значений $C < C_1 \equiv [12(R_0^4 + R_0)]^{1/2} - 3R_0^2$ кривизна интегральных кривых всюду отрицательна и

$$Z' = 0 \text{ при } R = R_1 \equiv (C + \sqrt{C^2 + 4A_0})^{1/2},$$

$$Z' = -1 \text{ при } R = R_2 \equiv \frac{1}{3}R_0 + (-m + \sqrt{m^2 + n^3})^{1/3} + (-m - \sqrt{m^2 + n^3})^{1/3}$$

$$(m = -\frac{10}{27}R_0^3 + \frac{2}{3}R_0C - 2, n = \frac{2}{9}R_0^2 - \frac{2}{3}C)$$

б) при $C_1 \leq C < C_2$, где

$$C_2 = \frac{5}{6}R_0^2 + (-t + \sqrt{\frac{1}{2}(1/3R_0^3 + 9/2)^3})^{1/2} + (-t - \sqrt{\frac{1}{2}(1/3R_0^3 + 9/2)^3})^{1/2}$$

$$(t = \frac{1}{216}R_0^6 + \frac{5}{4}R_0^3 - \frac{27}{4} \text{ для } R_0 = 0.2, C_2 = 2.16)$$

рассматриваемые участки интегральных кривых (участки, на которых $Z(R)$ — однозначная функция) имеют две точки перегиба с абсциссами

$$R = R_3 \equiv (\frac{1}{3}C - \sqrt{\frac{1}{9}C^2 - \frac{4}{3}A_0})^{1/2},$$

$$R = R_4 \equiv (\frac{1}{3}C + \sqrt{\frac{1}{9}C^2 - \frac{4}{3}A_0})^{1/2}$$

на этих участках

$$Z' = 0 \text{ при } R = R_1,$$

$$Z' = -1 \text{ при } R = R_2.$$

- в) при $C = C_2$ кривая, изменив кривизну в точке с $R = R_3$, в дальнейшем асимптотически стремится к вертикальной прямой

$$R = R_5 \equiv -\frac{1}{3}R_0 + 2|n|^{1/2} \cos [1/3(\pi + \varphi_1)], \quad \cos \varphi_1 = -m|n|^{-3/2}$$

- г) для значений $C_2 < C < C_3 \equiv R_0^{-1} + R_0^2$ (при $R_0 = 0.2$, $C_3 = 5.04$) рассматриваемые участки интегральных кривых имеют точку перегиба при $R = R_3$; точка, в которой $Z' = 0$ отсутствует; $Z' = 1$ при $R = R_5$.

- 2) если $R_0 \geq 2^{-1/3}$ (см. фиг. 3 и 4, на которых представлены типичные формы решений при $R_0 = 1$ и $R_0 = 5$ соответственно), то для значений $C < C_3$ кривизна интегральной кривой всюду отрицательна. В этом случае

$$Z' = 0 \quad \text{при } R = R_1,$$

$$Z' = -1 \quad \text{при}$$

$$R = R_2 \quad (C \leq C_2)$$

$$R = R_6 \equiv \frac{1}{3}R_0 + 2|n|^{1/2} \cos(1/3\varphi_1) \quad (C_2 < C < C_3, \quad R_0 \leq (9/2)^{1/3})$$

$$R = R_6 \quad (C_2 < C \leq C_4 \equiv \frac{5}{9}R_0^2 + 3R_0^{-1}, \quad R_0 > (9/2)^{1/3})$$

$$R = R_7 \equiv \frac{1}{3}R_0 + 2|n|^{1/2} \cos[1/3(\pi - \varphi_2)], \quad \cos \varphi_2 = m|n|^{-3/2} \\ (C_4 < C < C_3, \quad R_0 > (9/2)^{1/3})$$

- 3) если $R_0 < 2^{1/3}$ (фиг. 2 и 3), то

- а) для значений $C_3 < C < C_5 \equiv 2R_0^{-1} + 1/2R_0^2$ (при $R_0 = 0.2$, $C_5 = 10.02$, а при $R_0 = 1$, $C_5 = 2.5$) рассматриваемый участок интегральной кривой с возрастанием S имеет сначала положительную кривизну, а затем отрицательную (абсцисса точки перегиба $R = R_3$); точка $Z' = 0$ отсутствует, $Z' = 1$ при $R = R_5$;

- б) при $C = C_5$ ($A_0 = 0$) кривизна исследуемых участков всюду положительна; кривая пересекает ось вращения под прямым углом;

- в) для значений $C > C_5$ кривизна интегральной кривой всюду положительна и

$$Z' = 0 \quad \text{в точке с абсциссой}$$

$$R = R_8 \equiv (C - \sqrt{C^2 + 4A_0})^{1/2}$$

$$Z' = -1 \quad \text{при}$$

$$R = R_9 \equiv \frac{1}{3}R_0 - 2|n|^{1/2} \cos [1/3(\pi + \varphi_1)] \quad (C_5 < C \leq C_4)$$

$$R = R_{10} \equiv \frac{1}{3}R_0 + 2|n|^{1/2} \cos [1/3(\pi + \varphi_2)] \quad (C > C_4)$$

- 4) если $R_0 \geq 2^{1/3}$ (см. фиг. 4), то для значений $C > C_3$ кривизна интегральной кривой всюду положительна и

$$Z' = 0 \quad \text{при } R = R_8,$$

$$Z' = -1 \quad \text{при}$$

$$R = R_9 \quad (C_3 < C \leq C_4, \quad 2^{1/3} \leq R_0 < (9/2)^{1/3})$$

$$R = R_{10} \quad (C > C_4, \quad 2^{1/3} \leq R_0 < (9/2)^{1/3})$$

$$R = R_{10} \quad (C > C_3, \quad R_0 \geq (9/2)^{1/3})$$

- 5) при $C = C_3$ решением системы (1.4) (для любых значений R_0) будет вертикальная прямая $R = R_0$ ($Z = S$).

Отметим, что для данного фиксированного значения R_0 с возрастанием C величины $R_1, R_2, R_4, R_6 \div R_{10}$ растут, а R_3, R_5 убывают.

3. Пусть $\varepsilon = -1$ (характерные формы решений системы (1.4) при $\varepsilon = -1$ для $R_0 = 1, R_0 = 2,3, R_0 = 5$ и совокупности значений C представлены соответственно на фиг. 5, 6, 7). Тогда

1) если $C < C_{11}$, то кривизна интегральных кривых всюду отрицательна и

$$Z' = 0 \quad \text{при } R = R_{11} \equiv (-C - \sqrt{C^2 - 4A_0})^{1/2}$$

$$Z' = -1 \quad \text{при } R = R_{12} \equiv 1/3 R_0 + 2|n_1|^{1/2} \cos [1/3(\pi + \varphi_{12})]$$

$$(n_1 = 2/9 R_0^2 + 2/3 C, m_1 = -10/27 R_0^3 - 2/3 C R_0 + 2, \cos \varphi_{12} = m_1 |n_1|^{-3/2})$$

Значение C_{11} определяется по-разному в различных интервалах R_0

$$C_{11} = -5/6 R_0^2 + (-t_1 + \sqrt{1/2(-1/3 R_0^3 + 9/2)^3})^{1/3} + (-t_1 - \sqrt{1/2(-1/3 R_0^3 + 9/2)^3})^{1/3} \quad (R_0 \leq 3(2)^{-1/3})$$

$$C_{11} = -5/6 R_0^2 - 2|t_2|^{1/2} \cos(1/3 \psi_2) \quad (3(2)^{-1/3} < R_0 \leq 3(5 + 3\sqrt{3})^{1/3})$$

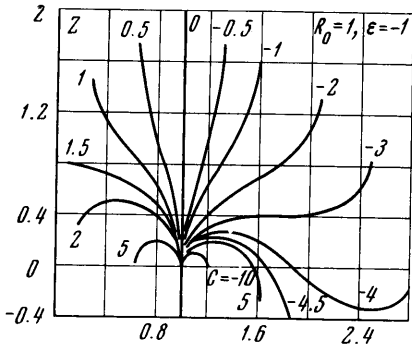
$$C_{11} = -5/6 R_0^2 - 2|t_2|^{1/2} \cos[1/3(\pi - \psi_1)] \quad (R_0 > 3(5 + 3\sqrt{3})^{1/3})$$

Здесь

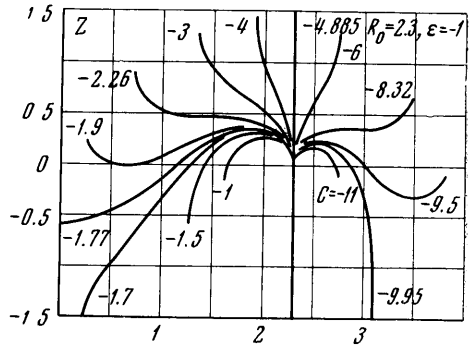
$$t_1 = -1/216 R_0^6 + 5/4 R_0^3 + 27/4, \quad t_2 = -1/36 R_0^4 - 3R_0$$

$$\cos \psi_1 = -t_1 |t_2|^{-3/2}, \quad \cos \psi_2 = t_1 |t_2|^{-3/2}$$

(Значения C_{11} для $R_0 = 1, R_0 = 2,3, R_0 = 5$ равны соответственно $-4.5, -9.95, -31.57$.)



Фиг. 5



Фиг. 6

2) если $C = C_{11}$, то кривая, сохраняя кривизну отрицательной, асимптотически стремится к вертикальной прямой $R = R_{12}$ при $S \rightarrow \infty$;

3) если $C_{11} < C < C_{12} \equiv R_0^{-1} - R_0^2$, то рассматриваемые участки интегральных кривых при возрастании S имеют вначале отрицательную кривизну, а затем положительную (абсцисса точки перегиба

$$R = R_{13} \equiv (-1/3 C + \sqrt{1/9 C^2 + 4/3 A_0})^{1/2}$$

$$Z' = 1 \quad \text{при } R = R_{14} \equiv -1/3 R_0 + (m_1 + \sqrt{m_1^2 + n_1^3})^{1/3} + (m_1 - \sqrt{m_1^2 + n_1^3})^{1/3}$$

При этом для значений $C_{11} < C < C_{13} \equiv -R_0^2 - 2R_0^{1/2}$ (величины C_{13} для $R_0 = 1, R_0 = 2,3, R_0 = 5$ равны соответственно $-3, -8.32, -29.47$) функция $Z(R)$ имеет две точки экстремума: при $R = R_{11}$ (точка максимума) и при $R = R_{15} \equiv (-C + \sqrt{C^2 - 4A_0})^{1/2}$ (точка минимума), кото-

рые для $C = C_{13}$ сливаются с точкой перегиба. Для значений $C_{13} < C < C_{12}$ стационарных точек у функции $Z(R)$ не существует;

- 4) при $C = C_{12}$ решением системы (1.4) служит вертикальная прямая $R = R_0$ ($Z = S$);
- 5) если $C_{12} < C < C_{14}$, то рассматриваемые участки интегральных кривых при увеличении S имеют вначале положительную кривизну, а затем отрицательную (абсцисса точки перегиба $R = R_{13}$; $Z' = 1$ при $R = R_{14}$).

Причем, если $R_0 > 4^{1/3}$, то для значений $C_{14} > C > C_{15} \equiv -R_0^2 + 2R_0^{1/2}$ (величина C_{15} при $R_0 = 2.3$ и $R_0 = 5$ равна соответственно -2.26 и -20.53) функция $Z(R)$ имеет две точки экстремума: при $R = R_{15}$ (точка максимума) и при $R = R_{11}$ (точка минимума), которые при $C = C_{15}$ сливаются с точкой перегиба. Выражение для C_{14} имеет различный вид в зависимости от значений R_0

$$C_{14} = 2R_0^{-1} - 1/2 R_0^2 \quad (R_0 < 2(2)^{1/3})$$

$$C_{14} = -5/6 R_0^2 + 2|t_2|^{1/2} \cos [1/3(\pi + \psi_2)] \quad (2(2)^{1/3} \leq R_0 \leq 3(5 + 3\sqrt{3})^{1/3})$$

$$C_{14} = -5/6 R_0^2 - 2|t_2|^{1/2} \cos [1/3(\pi + \psi_1)] \quad (R_0 > 3(5 + 3\sqrt{3})^{1/3})$$

- 6) если $C = C_{14}$, то

- а) при $R_0 \leq 4^{1/3}$ кривизна интегральных кривых всюду положительна (за исключением точки, лежащей на оси Z , при $R_0 = 4^{1/3}$, в которой кривизна равна нулю); кривая, выходя из начальной точки, пересекает ось вращения под прямым углом (см. фиг. 5; значение C_{14} для $R_0 = 1$ равно 1.5);

- б) при $4^{1/3} < R_0 < 2(2)^{1/3}$ (см. фиг. 6; для $R_0 = 2.3$ $C_{14} = -1.77$) интегральные кривые также пересекают ось Z ; при этом с возрастанием S рассматриваемые участки имеют вначале положительную кривизну, а затем отрицательную (абсцисса точки перегиба $R = R_{13}$; $Z' = 0$ при $R = R_{15}$ и $R = 0$);

- в) при $R_0 \geq 2(2)^{1/3}$ (см. фиг. 7; $C_{14} = -18.93$ для $R_0 = 5$) кривая, выходя из начальной точки и достигнув максимального значения Z в точке с $R = R_{15}$, в дальнейшем асимптотически стремится к вертикальной прямой

$$R = R_{16} \equiv 1/3 R_0 + 2|n_1|^{1/2} \cos [1/3(\pi - \varphi_{12})]$$

сохраняя кривизну положительной;

- 7) если $C > C_{14}$ и $R_0 \leq (4)^{1/3}$, то интегральные кривые имеют всюду положительную кривизну; $Z' = 0$ при $R = R_{15}$ и $Z' = -1$ при

$$R = R_{17} \equiv 1/3 R_0 + (-m_1 + \sqrt{m_1^2 + n_1^3})^{1/3} + (-m_1 - \sqrt{m_1^2 + n_1^3})^{1/3}$$

- 8) если $4^{1/3} < R_0 \leq 3(2)^{-1/3}$, то при $C_{14} < C < C_{16} \equiv 3R_0^2 - [12(R_0^4 - R_0)]^{1/2}$ ($C_{16} = -1.68$ для $R_0 = 2.3$) исследуемые участки интегральных кривых имеют две точки перегиба, с абсциссами $R = R_{18} \equiv (-1/3 C - \sqrt{1/9 C^2 + 4/3 A_0})^{1/2}$ и $R = R_{13}$, которые при $C = C_{16}$ сливаются в одну. При $C > C_{16}$ точки нулевой кривизны отсутствуют. Производная $Z' = 0$ в точке с $R = R_{15}$; производная $Z' = -1$ в точке с $R = R_{17}$.

- 9) если $3(2)^{-1/3} < R_0 < 2(2)^{1/3}$ и

- а) $C_{14} < C < C_{17} \equiv -5/6 R_0^2 + 2|t_2|^{1/2} \cos [1/3(\pi + \psi_2)]$, то на рассматриваемых участках интегральных кривых имеется

Уравнение равновесной поверхности

$$-(\rho_2 - \rho_1) \omega^2 r^2 / 2\sigma = 2H + \text{const}$$

после введения параметра $\Delta = P^{-1/2}$ и безразмерных переменных $r^* = r/l$, $z^* = z/l$ переписывается в форме

$$r^{*2} = -\Delta^2 H^* + h_0^2 \quad (4.1)$$

Здесь H^* — средняя кривизна поверхности раздела в переменных r^* , z^* ; h_0 — неизвестная постоянная (в дальнейшем звездочки у этих величин опускаются). Уравнение (4.1) содержит малый параметр Δ^2 при старших производных. Решение этого уравнения должно удовлетворять условию (1.2) на неизвестных круговых контурах Γ_1 и Γ_2 , а также условию (1.3), записанному в новых переменных.

Если положить $\Delta = 0$, то предельное уравнение имеет решение $r \equiv h_0$, представляющее собой круговую цилиндрическую поверхность, которое, вообще говоря, не удовлетворяет условию (1.2). Если $0 < \Delta \ll 1$, то решение задачи (4.1), (1.2), (1.3) значительно отличается от константы $r = r_0$ (см. фиг. 8) лишь в узких областях вблизи Γ_1 и Γ_2 . Главная разность имеет характер функции типа погранслоя [5, 6].

Считая для простоты, что $r(z)$ — однозначная функция (заметим, что это предположение позволяет упростить выкладки, но не влияет на окончательный результат), уравнение (4.1) представим в форме

$$\Delta^2 \left[\frac{r''}{(\sqrt{1+r'^2})^3} - \frac{1}{r\sqrt{1+r'^2}} \right] = r^2 - h_0^2, \quad \left(' = \frac{d}{dz} \right) \quad (4.2)$$

Так как в точках равновесной поверхности, для которых $r(z) = r_0$, удвоенная средняя кривизна равна r_0^{-1} , то из (4.1) получим

$$r_0^2 - h_0^2 = -\Delta^2 r_0^{-1} \quad (4.3)$$

Принимая, что окружность Γ_1 лежит в плоскости $z = z_1$, выполним преобразование растяжения в области, примыкающей к контуру Γ_1

$$r = r_0 + \Delta \xi_1, \quad z = z_1 + \Delta \eta$$

В новых переменных уравнение (4.2) с учетом (4.3) будет

$$\frac{\Delta \xi_1''}{(\sqrt{1+\xi_1'^2})^3} - \frac{\Delta^2}{(r_0 + \Delta \xi_1)\sqrt{1+\xi_1'^2}} = 2\Delta r_0 \xi_1 + \Delta^2 (\xi_1^2 - r_0^{-1}) \quad \left(' = \frac{d}{d\eta} \right)$$

Решение уравнения (4.4) при граничном условии (1.2) на линии Γ_1 будем искать в виде [7, 8]

$$\xi_1(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_{1n}(\eta) \Delta^n \quad (4.5)$$

Подставляя (4.5) в (4.4), (1.2) и собирая члены с одинаковыми степенями Δ , придем к уравнениям и граничным условиям для определения $\xi_{1n}(\eta)$. В частности, для $\xi_{10}(\eta)$ получим следующую задачу

$$\xi_{10}'' (1 + \xi_{10}'^2)^{-3/2} = 2r_0 \xi_{10}, \quad \xi_{10}'|_{\eta=0} = \text{tg}(\beta_1 - \alpha) \quad (4.6)$$

Здесь β_1 — угол, образуемый с осью z касательной к меридианальному сечению стенки сосуда в точке линии Γ_1 .

Второе краевое условие для ξ_{10} имеет вид

$$\xi_{10} \rightarrow 0, \quad \xi_{10}' \rightarrow 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty \quad (4.7)$$

Таким образом, задача определения $\xi_{10}(\eta)$ (как и ранее рассмотренная [7, 8] пространственная задача нахождения свободной поверхности покоящейся жидкости в сильном поле тяжести) идентична плоской задаче о равновесной форме свободной поверхности жидкости, находящейся в поле сил тяжести и соприкасающейся с одной стороны с твердой стенкой. Решение последней может быть получено в явной форме [9]. Аналогично найдем

$$\eta = B - r_0^{-1}(2r_0 - r_0^2\xi_{10}^2)^{1/2} - \frac{1}{2\sqrt{2r_0}} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - r_0\xi_{10}^2/2}}{1 + \sqrt{1 - r_0\xi_{10}^2/2}} \quad (4.8)$$

Здесь

$$B = r_0^{-1} \sqrt{r_0[1 + \cos(\beta_1 - \alpha)]} + \frac{1}{2\sqrt{2r_0}} \ln \frac{1 - \sqrt{[1 + \cos(\beta_1 - \alpha)]/2}}{1 + \sqrt{[1 + \cos(\beta_1 - \alpha)]/2}}$$

Таким образом, (4.8) дает $\eta = \eta(\xi_{10}, \alpha, r_0, \beta_1)$. Пусть $r = f(r)$ — уравнение стенки сосуда. Тогда, ограничиваясь первым приближением, можно считать, что

$$f(z_1) = r_0 + \Delta\xi_{10}|_{\eta=0} \equiv r_0 + \Delta\xi_{10}(\alpha, r_0, \beta_1)$$

Учитывая, что $\beta_1 = \arctg f'(z_1)$, из приведенного соотношения находится $z_1 = z_1(\alpha, r_0)$, а затем определяется $\xi_{10} = \xi_{10}(\eta, \alpha, r_0)$.

Проведя в окрестности линии Γ_2 выкладки, аналогичные приведенным, получим $\xi_{20} = \xi_{20}(\eta, \alpha, r_0)$.

Представляя решение задачи (4.2), (1.2) в виде

$$r = r_0 + \Delta[\xi_{10}(\eta, \alpha, r_0) + \xi_{20}(\eta, \alpha, r_0)]$$

постоянную r_0 найдем из условия (1.3), записанного в переменных r, z .

Автор благодарит Л. В. Бабенко, составившую программу для численного счета, а также А. Д. Мышкиса и А. Д. Тюпцова за обсуждение результатов и полезные советы.

Поступило 17 II 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Слобожанин Л. А. Гидростатика в слабых силовых полях. Равновесные формы поверхности вращающейся жидкости в условиях невесомости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
2. Слобожанин Л. А. Гидростатика в слабых силовых полях. О кольцеобразных фигурах равновесия вращающейся жидкости и об их устойчивости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.
3. Беляева М. А., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях. Сб. «Математические методы в динамике космических аппаратов». М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1968, вып. 6, стр. 5—68.
4. Лихтенштейн Л. Фигуры равновесия вращающейся жидкости. М., «Наука», 1965, стр. 27—30.
5. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, Изд. 4. М., Физматгиз, 1963, т. 2, стр. 542—555.
6. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Усп. матем. н., 1957, т. 12, вып. 5 (77).
7. Моисеев Н. Н., Черноусько Ф. Л. Задачи колебаний жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 6.
8. Срубщик Л. С., Юдович В. И. Об асимптотическом интегрировании уравнения равновесия жидкости с поверхностным натяжением в поле тяжести. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 6.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, Изд. 2. М., Гостехиздат, 1953, стр. 288.