О СИЛЬНОМ ВЯЗКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ НА ТОНКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛАХ

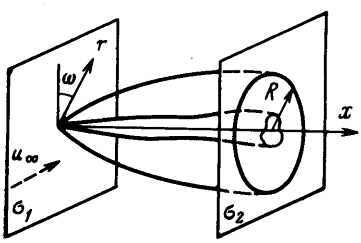
В. В. МИХАЙЛОВ

(*Москва*)

В работах [1, 2] исследовано гиперзвуковое течение вязкого газа около осесимметричных степенных тел на режиме сильного взаимодействия ламинарного пограничного слоя с внешним невязким потоком. В данной работе результаты, полученные в [1, 2], распространены на случай обтекания трехмерного тонкого тела.

1. Рассмотрим обтекание трехмерного тонкого тела, установленного под малым углом атаки, гиперзвуковым потоком термодинамически совершенного вязкого газа.

Ось x цилиндрической системы координат направим вдоль тела (фигура). Введем следующие обозначения: uu_∞, vu_∞, wu_∞ — соответственно осевая (вдоль оси x), радиальная (вдоль r) и окружная составляющие скорости; $\rho\rho_\infty$ — плотность; $p\rho_\infty u_\infty^2$ — давление; $hu_\infty^2/2$ — энтальпия; $\mu\mu_0$ — коэффициент динамической вязкости; u_∞, ρ_∞ — соответственно скорость и плотность невозмущенного потока; μ_0 — коэффициент вязкости при температуре торможения; L — характерная длина, к которой отнесены все линейные размеры; $P = \text{const}$ — число Прандтля; $\varkappa$ — показатель адиабаты. Индексом w будем отмечать значения соответствующих параметров на поверхности тела;



$$H = h + u^2 + v^2 + w^2; \ R_0 = \rho_\infty u_\infty L / \mu_0$$

Примем также, что $\mu = h^k$ ($k = \text{const}$) и число M набегающего потока равно бесконечности.

Пусть в течении существует зона, где можно пренебречь вязкостью. Для этого необходимо условие $R_0 \gg 1$.

Рассмотрим интегральное уравнение сохранения импульса между плоскостями σ_1, σ_2, перпендикулярными оси x (фиг. 1). Поверхность тела обозначим через σ_w и сделаем естественное предположение, что если угол атаки и характерные поперечные размеры тела имеют один и тот же порядок r_*, то можно ввести один характерный поперечный размер R возмущенной зоны течения.

Условие сохранения импульса запишем в виде

$$\iint\limits_{\sigma_2} [\rho u(1-u) - p + \tau_{xx}]\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma_w} [p\cos(n, x) + \tau_{xn}]\, d\sigma \qquad (1.1)$$

Здесь n — внутренняя нормаль к поверхности тела, (n, x) — угол между n и осью x; τ_{xn}, τ_{xx} — напряжения трения в направлении оси x, приложенные к телу и поверхности σ_2.

Из уравнений Навье — Стокса, если $x = O(L)$, имеем следующие оценки:

$$\tau_{xx}^{-1} \geqslant O(R_0 r_*), \qquad \tau_{xn}^{-1} = O(R_0 \varepsilon)$$

Здесь ε — некоторая длина, на которой скорость u вблизи тела меняется на свой порядок. Окончательно получим

$$\rho u(1-u) = O(p) = O(R^2), \iint\limits_{\sigma_2} \tau_{xx} d\sigma \leqslant O\left(\frac{R^2}{R_0 r_*}\right), \qquad \iint\limits_{\sigma_w} \tau_{xn} d\sigma = O\left(\frac{r_*}{R_0 \varepsilon}\right)$$

$$\iint\limits_{\sigma_2} [\rho u(1-u) - p]\, d\sigma = O(R^4), \qquad \iint\limits_{\sigma_w} p \cos(n, x)\, d\sigma = O(R^2 r_*^2)$$

Покажем, что при условиях $\Lambda_* = r_*^{-2} R_0^{-1/2}, \to \infty$, $R_0 \gg 1$ отношение $r_* / R \to 0$. Предположим обратное, т. е. $r_* / R = O(1)$ при $\Lambda_* \to \infty$. Но тогда в силу $R \to 0$ последовательно получаем

$$O\left(\frac{R^2}{R_0 r_*}\right) < O\left(\frac{r_*}{R_0 \varepsilon}\right), \qquad O\left(\frac{r_*}{R_0 \varepsilon}\right) \geqslant O\left(\frac{1}{R_0}\right) \gg O(r_*^4) = O(R^4)$$

Таким образом, импульс сил вязкости, действующих на тело, не уравновешивается потерей количества движения и импульсом сил давления. Следовательно, при $\Lambda_* \to \infty$ отношение $r_* / R \to 0$. Отсюда нетрудно показать, что при $\Lambda_* \gg 1$ вблизи поверхности тела должна существовать зона с характерным поперечным размером ε, в которой с ошибкой $(\varepsilon / R)^2$ можно пренебречь инерционными силами и силами давления по сравнению с силами вязкости. Для этого достаточно записать уравнение, аналогичное соотношению (1.1), для объема, заключенного между ε, телом и плоскостью σ_2.

Так как суммарная сила вязкости, действующая на любую, окружающую тело поверхность, меньше или равна по порядку R^4, то с ростом площади этой поверхности при удалении от тела напряжения трения должны стремиться к нулю по сравнению с напряжением трения на теле. Отсюда следует, что в зоне, где $(r / r_*)^2 \gg 1$, характерное изменение скорости u не может быть порядка 1, т. е. в этой области $\Delta u = 1 - u \ll 1$. Однако силы вязкости должны играть здесь существенную роль, так как из соображений сохранения расхода зона невязкого течения может занимать лишь часть возмущенного потока.

Таким образом, показано, что при $\Lambda_* \to \infty$ течение около тела можно разбить на две области. Во внутренней области, где $(r / R)^2 \ll 1$, силы вязкости преобладают над инерционными силами. Во внешней области, где $(r / r_*)^2 \gg 1$, скорость u близка к единице[1]. Естественно, что никакой третьей промежуточной зоны не существует, так как указанные две области перекрывают друг друга.

2. Рассмотрим уравнения Навье — Стокса, записанные в цилиндрической системе координат (фигура). Пусть у границы возмущенной зоны течения можно пренебречь вязкостью газа. Тогда в той области, где вязкость существенна, должно выполняться условие

$$O(1) \geqslant O(\Delta u) > O(R^2) \tag{2.1}$$

Если поперечные размеры этой области имеют порядок R, из уравнения неразрывности следует, что v, w будут также порядка R.

---

[1] Вопрос о применимости уравнений сплошной среды и об условиях существования зоны невязкого течения будет рассмотрен в конце работы после полного решения задачи.

Используя полученные оценки и пренебрегая членами с относительным порядком $R^2 / \Delta u$, уравнения Навье — Стокса преобразуем к виду

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{w}{r}\frac{\partial u}{\partial \omega}\right)+\frac{dp}{dx}=\frac{1}{R_0 r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{R_0 r^2}\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial \omega}\right) \tag{2.2}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial r}+\frac{w}{r}\frac{\partial H}{\partial \omega}\right)=\frac{1}{R_0 r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\mu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{h}{P}+u^2\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{R_0 r^2}\frac{\partial}{\partial \omega}\left[\mu\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{h}{P}+u^2\right)\right], \qquad H=h+u^2$$

$$\frac{\partial(\rho r u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho r v)}{\partial r}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial \omega}=0, \qquad p=p(x)$$

Для внутренней области течения из системы (2.2) следует

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial \omega}\right)=0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\mu r\frac{\partial}{\partial r}(g+u^2)\right]+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\mu\frac{\partial}{\partial \omega}(g+u^2)\right)=0, \quad g=\frac{h}{P}$$

На теле и на внешней границе внутренней области должны выполняться условия

$$u_w=0, \quad g_w=\text{const}; \qquad u\to 1, \quad g\to 0 \quad (r\to\infty)$$

Граничным условиям и системе (2.3) удовлетворяет выражение

$$g=(1-u)(g_w+u) \tag{2.4}$$

При этом система (2.3) сводится к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial \omega^2}=0, \quad F=\int_0^u g^k\,du, \quad F(r_w,\omega)=0 \tag{2.5}$$

Общее решение уравнения (2.5) имеет вид

$$F=D\left[\ln\frac{r}{r_*}+f\left(\frac{r}{r_*},\omega\right)\right] \qquad f=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{r}{r_*}\right)^n(A_n\sin n\omega+B_n\cos n\omega) \tag{2.6}$$

Здесь n — целое число, а ось x направлена так, что точка $r=0$ лежит внутри тела.

Из условия $\mu\partial u/\partial r\to 0$ при $r\to\infty$ следует, что $\partial F/\partial r\to 0$ при $r\to\infty$. Следовательно, функция f должна быть ограничена при $r\to\infty$. Таким образом, для определения f имеем

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2}=0, \quad f_w=-\ln\frac{r_w}{r_*}, \quad f(\infty,\omega)=\text{const}$$

Поставленная задача имеет решение, если f_w — непрерывная функция. Этому условию удовлетворяют тела, у которых поперечные размеры имеют один и тот же порядок, т. е. тела, отличные от пластин. Из уравнения (2.6) следует, что при $r/r_*\to\infty$ течение во внутренней области становится как угодно близким к осесимметричному. Таким образом, во внешней области решение должно обладать осевой симметрией, а система (2.2) примет вид

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{dp}{dx}=\frac{1}{R_0 r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r\frac{\partial u}{\partial r}\right),\quad \frac{\partial(\rho r u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho r v)}{\partial r}=0$$
$$\rho\left(u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial r}\right)=\frac{1}{R_0 r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\mu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{h}{P}+u^2\right)\right] \tag{2.7}$$

Решение внутренней задачи при $r/r_* \to \infty$ представим так:

$$F\approx S-\frac{\Delta u^{k+1}}{k+1}(1+g_w)^k\approx\frac{D}{2}\ln\left(\frac{r}{r_*}\right)^2,\quad S=\int_0^1 g^k\,du \tag{2.8}$$

На внешней границе внутренней области

$$(r/r_*)^2=(\varepsilon/r_*)^2=\lambda(R/r_*)^2,\qquad \lambda=(\varepsilon/R)^2\leqslant 1$$

Значение λ может быть как угодно малым, но оно не зависит от стремящегося к бесконечности параметра Λ_*. Пусть X сопротивление тела, тогда

$$c_x=\frac{X}{\rho_\infty u_\infty^2\pi L^2}=\frac{P^k}{R_0\pi}\int\int_{\sigma_w}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}d\omega-\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\omega}dr\right)dx=\frac{2P^k}{R_0}\int_0^x D\,dx$$

Из интегрального уравнения сохранения импульса (1.1) имеем

$$R^2=\frac{a}{pR_0}\int_0^x D\,dx,\qquad a=O(1)$$

Пренебрегая в уравнении (2.8) Δu^{k+1} по сравнению с $S=O(1)$ и подставляя $(r/r_*)^2=\lambda(R/r_*)^2$, получим

$$D=2S\left[\ln\int_0^x D\,dx-\ln(pR_0r_*^2)+\ln(\lambda a)\right]^{-1} \tag{2.9}$$

При $\Lambda_*\to\infty$ значение $D\to 0$, так как $\varepsilon/r_*\to\infty$. Если справедлива оценка

$$d\ln A/d\ln x\leqslant O(\ln A),\qquad A=x/(pR_0r_*^2) \tag{2.10}$$

что требует выполнения условий

$$d\ln p/d\ln x\leqslant O(\ln A),\qquad d\ln r_*/d\ln x\leqslant O(\ln A)$$

то, согласно уравнению (2.9), значение D с относительной ошибкой порядка $\ln\ln A/\ln A$ равно $D=2S/\ln A$. Действительно, считая соотношение (2.10) справедливым, из (2.9) имеем

$$D\approx 2S[\ln A+\ln D+\ln(\lambda a)]^{-1}\approx 2S/\ln A\approx S/\ln(R/r_*)$$
$$\left(\int_0^x D\,dx=xD\left[1+O\left(\frac{d\ln\ln A}{d\ln x}\right)\right]\right)$$

Обозначим суммарный поток тепла к телу через Q. Тогда, применяя соотношение (2.4), получаем

$$c_h=\frac{2Q}{\rho_\infty u_\infty^3\pi L^2}=(1-g_w)c_x$$

Таким образом, равновесное значение энтальпии стенки равно числу Прандтля.

3. Из системы уравнений (2.7), записанной в дивергентной форме, можно получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\rho ru(-\Delta u^2 - h) + 2rp] + \frac{\partial}{\partial r}\Big[\rho rv(-\Delta u^2 - h) + \frac{\mu r}{R_0}\Big(\frac{1}{P}\frac{\partial h}{\partial r} - 2\Delta u\frac{\partial u}{\partial r}\Big)\Big] = 0 \tag{3.1}$$

Если пренебречь величиной Δu по сравнению с 1, то нетрудно видеть, что записанное уравнение вместе с уравнением неразрывности и соотношением $\partial p / \partial r = 0$ является по существу уравнениями гиперзвуковой теории плоских сечений для случая течения вязкого газа. При этом роль поршня играет бесконечная нить, на которой происходит выделение энергии. Энергия, выделившаяся на единице длины нити, равна теплу, уходящему от тела в единицу времени, деленному на u_∞, плюс сопротивление тела. Пренебрежем в уравнении (3.1) членами с относительным порядком Δu и проинтегрируем это уравнение по площади, занятой внешней частью зоны вязкого течения, от $x = 0$ до $x = x$. Обозначим координаты r внешней и внутренней границ этой зоны соответственно через δ и ε. Переходя к криволинейному интегралу, получим

$$\int_0^x p\frac{d\delta^2}{dx}dx + \frac{p\delta^2}{\varkappa - 1} = \frac{1 + g_w}{R_0}P^k\int_0^x D\,dx \qquad (\varepsilon^2 \ll \delta^2) \tag{3.2}$$

Используя модифицированную формулу Ньютона, имеем

$$p = N(d\delta / dx)^2, \qquad N = \mathrm{const} \tag{3.3}$$

Усилим требования, наложенные на форму поверхности тела и давление в п. 2. Пусть

$$d\ln r_* / d\ln x < O(\ln A), \qquad d\ln p / d\ln x < O(\ln A) \tag{3.4}$$

В этом случае, если $n > -1$, $m < 0$, при интегрировании от 0 до x выражений типа $x^n(\ln A)^m$ можно вынести из-под знака интеграла величину $(\ln A)^m$. Принимая во внимание этот факт и выражая D с помощью уравнения (2.10), получим

$$p = {}^9/_{16}NE^2(xR_0\ln A)^{-1/2}, \qquad \delta = Ex^{3/4}(R_0\ln A)^{1/4} \tag{3.5}$$

$$E = \Big[\frac{64}{9}\frac{S}{N}\frac{\varkappa - 1}{3\varkappa - 1}P^k(1 + g_w)\Big]^{1/4}$$

Окончательно с относительной погрешностью $\ln\ln A / \ln A$ имеем

$$\ln A = \ln\Lambda, \qquad \Lambda = x^{3/2}r_*^{-2}R_0^{-1/2}$$

$$p\Big(\frac{x}{r_*}\Big)^2 = \frac{9NE^2}{16}\Big(\frac{\Lambda^2}{\ln\Lambda}\Big)^{1/2}, \qquad \frac{\delta}{r_*} = E\Big(\frac{\Lambda^2}{\ln\Lambda}\Big)^{1/4}$$

$$c_x\Big(\frac{x}{r_*}\Big)^2 = \frac{c_h}{1 - g_w}\Big(\frac{x}{r_*}\Big)^2 = 4SP^kr_*^2\frac{\Lambda^2}{\ln\Lambda} \tag{3.6}$$

Таким образом, если форма тела удовлетворяет первому из условий (3.4), то второе условие (3.4) выполняется.

4. Определим значения постоянных, входящих в уравнения (3.6)

$$S=\int_0^1(1-u)^k(g_w+u)^k du=\frac{g_w^k}{k+1}F\left(1,-k,k+2,-\frac{1}{g_w}\right)$$

Здесь F — гипергеометрическая функция. Для некоторых частных значений k и g_w имеем

$$S=(4)^k[\Gamma(k+1)]^2/\Gamma(2k+2)\qquad(g_w=1)$$

$$S=[\Gamma(k+1)]^2/\Gamma(2k+2)\qquad(g_w=0),\qquad S=(1+3g_w)/6\qquad(k=1)$$

$$S=\frac{(1+g_w)^2}{8}\left[\arcsin\frac{1-g_w}{1+g_w}+\frac{\pi}{2}-\frac{1-g_w}{4}\sqrt{g_w}\right]\qquad\left(k=\frac{1}{2}\right)$$

Здесь Γ — гамма-функция. Значения параметра N и δ/R заимствуем из приведенных в работе [2] результатов расчета осесимметричного обтекания тела $r_w\sim x^{3/4}$ потоком невязкого газа. Тогда, используя уравнения (3.5), (3.6), получаем

$$\frac{\delta}{R}=b_1,\qquad\frac{\delta}{r_*}=b_2\left(\frac{SP^k(1+g_w)\Lambda^2}{\ln\Lambda}\right)^{1/4},\qquad p\left(\frac{x}{r_*}\right)^2=b_3\left(\frac{SP^k(1+g_w)\Lambda^2}{\ln\Lambda}\right)^{1/2}$$

$$b_1=0.875,\quad b_2=0.995,\quad b_3=0.506\ \text{при}\ \varkappa=1.4;$$

$$b_1=0.819,\quad b_2=1.06,\quad b_3=0.562\ \text{при}\ \varkappa=1.67$$

Приведенные выражения вместе с последним из соотношений (3.6), переписанные в соответствующих переменных, полностью совпадают с результатами полученными в работах [2, 3] для случая сильного вязкого взаимодействия на осесимметричных степенных телах. Однако выше показано, что указанные соотношения применимы и для произвольных тонких тел, отличных от пластин, если форма тела удовлетворяет первому из неравенств (3.4).

5. Дадим асимптотическую оценку области применимости основной системы уравнений (2.2).

Условие (2.1) приводит к неравенству $(\ln\Lambda)^{(1-k)/2(1+k)}R_0^{-1/2}\ll1$ $(x\approx\approx1)$. Выполнение на теле использованных выше граничных условий может быть обеспечено лишь тогда, когда длина свободного пробега молекул вблизи стенки много меньше характерного радиуса тела.

Для этого при $g_w=O(1)$ режим течения должен быть таким, чтобы выполнялось неравенство $(\Lambda\ln\Lambda)^{1/2}R_0^{-1/4}\ll1$.

Точность самого асимптотического решения оценивается в работе [3] сравнением с численным решением для случая обтекания осесимметричного тела $r_w\sim x^{3/4}$. При этом оказывается, что относительно малая ошибка (порядка 20—30%) достигается лишь в диапазоне $\Lambda>10^9$, т. е. для исчезающе тонких тел. Однако полученные результаты могут оказаться полезными и практически, указывая на некоторые качественные особенности обтекания тонких тел существенно вязким газом. В частности, можно ожидать, что в том случае, когда поперечные размеры тела много меньше соответствующих размеров возмущенной зоны течения, форма тела будет оказывать слабое влияние на полное сопротивление и теплопередачу.

Поступило 27 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Stewartson K. Viscous hypersonic flow past a slender cone. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 5.
2. Ellinwood J. W., Mirels H. Axisymmetric hypersonic flow with strong viscous interaction. Air Force Rept., No. SSD—TR—67142.
3. Ellinwood J. W., Mirels H. Hypersonic viscous interaction theory for slender axisymmetric bodies. AIAA Paper, No. 68—1.