

РАСЧЕТ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОВОГО ПОТОКА В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ПРИ ОБТЕКАНИИ ТЕЛА ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННЫМ ГАЗОМ

О. Н. СУСЛОВ

(Москва)

В результате численных решений уравнений пограничного слоя для четырехкомпонентной смеси газов (E, N^+, N_2, N) при наличии вдува газа получены аппроксимационные формулы для теплового потока в зависимости от изменения величин $\lambda\rho/c_p$ и h^* поперек пограничного слоя (λ — коэффициент теплопроводности смеси, ρ — плотность, c_p — теплоемкость, h^* — энтальпия идеального газового состояния смеси) и величины вдува.

Вводится понятие эффективного амбиполярного коэффициента диффузии $D^{(a)}(i)$, позволяющее получать конечные формулы для вычисления конвективных тепловых потоков в «замороженном» пограничном слое. Исследуется поведение этих коэффициентов внутри пограничного слоя.

Получена формула для конвективного теплового потока к стенке от частично ионизованного воздуха как девятикомпонентной смеси

($E, O^+, N^+, NO^+, O, N, NO, O_2, N_2$)

Доказывается, что даже в случае простейшей четырехкомпонентной модели газа необходимо ввести три эффективных амбиполярных коэффициента диффузии

$$D^{(a)}(A) = D(A, M) \quad D^{(a)}(I) = 2D(A, M), \quad D^{(a)}(M) = [1 + c_e(I)]D(A, M)$$

Здесь $D(A, M)$ — бинарный коэффициент диффузии атомов в молекулы, $c_e(I)$ — концентрация ионов на внешней границе пограничного слоя.

Показывается, что предположение о бесконечно большом сечении перезарядки и другие упрощающие предположения, принятые в работе [1], приводят к завышению в величине безразмерного теплового потока на 7—15% для случая «замороженного» пограничного слоя.

1. Рассмотрим движение многокомпонентной смеси частично ионизованного газа. Если считать, что нет внешних электрических и магнитных полей и пренебречь термодиффузией, основная система уравнений для замороженного пограничного слоя в окрестности критической точки запишется в виде

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial x} (\rho u r^n) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v r^n) = 0$$

$$\rho \left[u \frac{\partial c(i)}{\partial x} + v \frac{\partial c(i)}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} [J(i)] = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \sum_{i=1}^N c_p(i) J(i) \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\frac{\partial x(i)}{\partial y} = \sum_{j=1}^N \frac{x(j)x(i)}{D(i,j)} [V(j) - V(i)] + \frac{x(i)e(i)}{kT} E \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial u} = 4\pi N_e \rho \sum_{i=1}^N \frac{c(i)e(i)}{m(i)}, \quad p = \frac{\rho RT}{m} \quad (1.3)$$

Здесь $x(i)$ — молярная концентрация i -й компоненты; $c(i)$ — массовая концентрация; $e(i)$ — заряд частицы сорта i , $J(i)$ — массовый диффузионный поток в направлении y ; $m(i)$ — молекулярный вес i -й компоненты; m — среднемoleкулярный вес смеси; $V(i)$ — диффузионная скорость; $D(i, j)$ — бинарный коэффициент диффузии; E — напряженность электрического поля, возникающего за счет разделения заряда в направлении y ; μ — вязкость смеси; T — температура; k — постоянная Больцмана; N_0 — число Авогадро; N — число компонент.

Уравнения (1.1) (движения смеси, неразрывности, диффузии, энергии) по своему виду — обычные уравнения многокомпонентной смеси газов; (1.2) — соотношения Стефана — Максвелла для ионизованного газа [2]; (1.3) — уравнение Пуассона.

Перейдем в уравнении (1.2) к градиенту массовой концентрации. Используя тождество

$$\frac{\partial c(t)}{\partial y} = \sum_{k=1}^N \frac{m(t)m(k)}{m^2} \left[x(k) \frac{\partial x(t)}{\partial y} - x(i) \frac{\partial x(k)}{\partial y} \right]$$

получим

$$\rho \frac{\partial c(i)}{\partial y} = -c(i) \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^N \left[\frac{m}{m(j)} - \frac{m}{m(k)} \right] \frac{c(k)}{D(j, k)} - \frac{m}{m(j)} \frac{1}{D(i, j)} \right\} J(j) - J(i) \sum_{j=1}^N \frac{x(j)}{D(i, j)} + \frac{\rho c(i)}{kT} \left[e(i) - \sum_{k=1}^N c(k)e(k) \right] E \quad (1.4)$$

Согласно работе [3] введем эффективный коэффициент диффузии в виде

$$\frac{1}{D(i)} = c(i) \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^N \left[\frac{m}{m(j)} - \frac{m}{m(k)} \right] \frac{c(k)}{D(j, k)} - \frac{m}{m(j)} \frac{1}{D(i, j)} \right\} \times \times \frac{J(j)}{J(i)} + \sum_{j=1}^N \frac{x(j)}{D(i, j)} \quad (1.5)$$

Тогда уравнение (1.4) переписывается в виде

$$J(i) = -\rho D(i) \frac{\partial c(i)}{\partial y} + \frac{\rho D(i)c(i)}{kT} \left[e(i) - \sum_{k=1}^N c(k)e(k) \right] E \quad (1.6)$$

Рассмотрим для простоты случай, когда все ионы положительно и однократно заряжены. Запишем уравнение (1.6) для нейтралов

$$J(n) = -\rho D(n) \frac{\partial c(n)}{\partial y} - \frac{\rho D(n)c(n)e}{kT} c(I)E, \quad n = 1, \dots, N(n) \quad (1.7)$$

для электронов ($i = E$)

$$J(E) = -\rho D(E) \frac{\partial c(E)}{\partial y} - \rho \frac{D(E)c(E)e}{kT} [1 + c(I)]E \quad (1.8)$$

для ионов сорта I_i

$$J(I_i) = -\rho D(I_i) \frac{\partial c(I_i)}{\partial y} + \rho \frac{D(I_i)c(I_i)e}{kT} [1 - a(I)]E, \quad i = 1, \dots, N(I) \quad (1.9)$$

В уравнениях (1.7) — (1.9) e — абсолютная величина заряда электрона

$$c(I) = \sum_{i=1}^{N(I)} c(I_i)$$

2. Из оценок, приведенных в работе [4], следует, что в большей части пограничного слоя, за исключением узкого пристеночного слоя, имеет место амбиполярная диффузия.

Условие отсутствия тока (если стенка диэлектрик) и условие квазинейтральности

$$\sum_{i=1}^{N(I)} \frac{m}{m(I_i)} J(I_i) = \frac{m}{m(E)} J(E), \quad x(E) = \sum_{i=1}^{N(I)} x(I_i) \quad (2.1)$$

позволяет в амбиполярной области исключить поле E из соотношений (1.8) и (1.9) и получить связь между потоком $J(I_i)$ и градиентом концентрации $\partial c(I_i) / \partial y$ в виде закона Фика

$$J(I_i) = -\rho D^{(a)}(I_i) \partial c(I_i) / \partial y \quad (2.2)$$

Эффективный амбиполярный коэффициент диффузии для ионов I_i здесь определен так:

$$D^{(a)}(I_i) = D(I_i) [1 + M(I_i)] [1 + K(I_i)]^{-1} \quad (2.3)$$

$$M(I_i) = \frac{c(I_i)}{c(E)} \frac{\partial c(E) / \partial y}{\partial c(I_i) / \partial y} \frac{1 - c(I)}{1 + c(I)}$$

$$K(I_i) = \frac{c(I_i)}{c(E)} \frac{1 - c(I)}{1 + c(I)} \frac{D(I_i)}{D(E)} \sum_{k=1}^{N(I)} \frac{m(E)}{m(I_k)} \frac{J(I_k)}{J(I_i)} \quad (2.4)$$

Из (1.9), (2.2) — (2.4) и (1.7) получим

$$J(n) = -\rho D^{(a)}(n) \partial c(n) / \partial y \quad (2.5)$$

$$D^{(a)}(n) = D(n) \left[1 + \frac{M(I_i) + K(I_i)}{1 + M(I_i)} \frac{c(I)}{1 - c(I)} \frac{D(n)}{D(I_i)} \frac{c(n)}{c(I_i)} \frac{J(I_i)}{J(n)} \right]^{-1} \quad (2.6)$$

Соотношения (2.1), (2.4) и (2.6) позволяют не рассматривать уравнение диффузии для электронов, представить соотношения (1.4) в виде законов Фика и применить далее метод работы [3].

Переходя в системе (1.1) — (1.3) к новым переменным

$$\int_0^{\eta} \frac{\rho_e}{\rho} d\eta = \left(\frac{n \rho_e \mu_e \beta}{\nu_e \mu_w \rho_w} \right)^{1/2} y, \quad u = \beta x f'(\eta),$$

$$T = T_w + (T_e - T_w) \theta, \quad X(i) = J(i) / \sqrt{n \beta \mu_w \rho_w}$$

$$v = \frac{\rho_e}{\rho} \sqrt{\beta \nu_e} \left(\frac{\mu_w \rho_w n}{\mu_e \rho_e} \right)^{1/2} f(\eta), \quad \mathcal{E} = \frac{e N_0}{m_w p} \left(\frac{\mu_w \rho_w}{n \beta} \right)^{1/2} E$$

получим

$$(l f'')' + f f'' + n^{-1} (\rho_e / \rho - f^2) = 0, \quad X' = f c'$$

$$\left(\frac{c_p l}{c_{pw} \sigma} \theta' \right)' + \left[\frac{c_p}{c_{pw}} f - \sum_{i=1}^N \frac{c_p(i)}{c_{pw}} X(i) \right] \theta' = 0 \quad (2.7)$$

$$lc'(i) = c(i) \sum_{j=1}^N \left[\frac{m}{m(j)} S(i, j) - \sum_{k=1}^N \left(\frac{m}{m(j)} - \frac{m}{m(k)} \right) c(k) S(k, j) \right] X(j) -$$

$$- X(i) \sum_{j=1}^N x(j) S(i, j) + lc(i) \frac{m_w}{m} \left[\frac{e(i)}{e} - c(I) \right] \mathcal{E} \quad (i = 1, \dots, N)$$

$$v_e = \frac{\mu_e}{\rho_e}, \quad \beta = \left(\frac{du_e}{dx} \right)_{x=0}, \quad l = \frac{\mu \rho}{\mu_w \rho_w}, \quad \sigma = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad S(i, j) = \frac{\mu}{\rho D(i, j)} \quad (2.8)$$

Здесь штрих означает производную по η . Индекс e относится к условиям на внешней границе пограничного слоя, w — к условиям на стенке.

В амбиполярном приближении к уравнениям (2.7), (2.8) необходимо добавить условия (2.1), которые в новых переменных приобретают вид

$$X(E) = \sum_{i=1}^{N(I)} \frac{m(E)}{m(I_i)} X(I_i), \quad c(E) = \sum_{i=1}^{N(I)} \frac{m(E)}{m(I_i)} c(I_i) \quad (2.9)$$

Кроме того, всегда выполняются тождества

$$\sum_{i=1}^N X(i) = 0, \quad \sum_{i=1}^N c(i) = 0 \quad (2.10)$$

Граничные условия обычные

$$f = \alpha, \quad f = 0, \quad c(i) = c_w(i), \quad \theta = 0 \quad \text{при } \eta = 0$$

$$f' = 1, \quad c(i) = c_e(i), \quad \theta = 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty \quad (2.11)$$

Перейдем к вычислению эффективных амбиполярных коэффициентов диффузии, определенных уравнениями (2.4) и (2.6), на внешней границе пограничного слоя и на стенке. Укажем путь нахождения этих коэффициентов при $\eta \rightarrow \infty$.

Запишем уравнения (2.8) для нейтралов, ионов и электронов

$$lc'(n) = \sum_{j=1}^N A(n, j) X(j) - A(n) X(n) - l \frac{m_w}{m} c(n) c(I) \mathcal{E} \quad (j \neq n) \quad (2.12)$$

$$lc'(I_i) - l \frac{m_w}{m} c(I_i) [1 - c(I)] \mathcal{E} = c(I_i) \sum_{j=1}^N A(I_i, j) X(j) - A(I_i) X(I_i), \quad (j \neq I_i)$$

$$l \sum_{k=1}^{N(I)} \frac{m(E)}{m(I_k)} c'(I_k) + l \frac{m_w}{m} c(E) [1 + c(I)] \mathcal{E} = c(E) \sum_{j=1}^N A(E, j) X(j) - A(E) X(E)$$

$$A(i, j) = \frac{m}{m(j)} S(i, j) - \sum_{k=1}^N \left[\frac{m}{m(j)} - \frac{m}{m(k)} \right] c(k) S(k, j) \quad (2.13)$$

$$A(i) = \sum_{j=1}^N x(j) S(i, j)$$

Здесь $1 \leq j \leq N(n)$ означает нейтралы, $N(n) < j \leq N(n) + N(I)$ — ионы, E — электроны,

$$N(n) + N(I) + 1 = N, \quad I_k = N(n) + k, \quad 1 \leq k \leq N(I)$$

а при записи (2.13) для электронов использованы условия (2.9).

Система (2.13) с $N(I) + 1$ неизвестным позволяет найти $c'(I_k)$ и \mathcal{E} как линейные комбинации потоков

$$X(k), \quad (k \neq E)$$

Пусть

$$l'c'(I_k) = \sum_{j=1}^N e(I_k, j) X(j). \quad (j \neq E) \quad (2.14)$$

$$l'g = \sum_{j=1}^N \varepsilon(j) X(j), \quad (j \neq E) \quad (2.15)$$

Используя (2.15), получим уравнение для нейтралов

$$lc'(n) = c(n) \sum_{j=1}^N f(n, j) X(j) - f(n, n) X(n) \quad (2.16)$$

$$n = 1, \dots, N(n), \quad j \neq n, \quad j \neq E$$

Если $1 \leq j \leq N(n)$

$$f(n, j) = A(n, j) - \frac{m_w}{m} c(I) \varepsilon(j)$$

Если $N(n) < j \leq N(n) + N(I)$

$$f(n, j) = A(n, j) - \frac{m_w}{m} c(I) \varepsilon(j) + A(n, E) \frac{m(E)}{m(j)}$$

$$f(n, n) = A(n) + \frac{m_w}{m} c(n) c(I) \varepsilon(n)$$

Заметим, что $f(n, j)$, $e(I_k, j)$, $\varepsilon(j)$ зависят только от концентраций, молекулярных весов, бинарных коэффициентов диффузии и не зависят от потоков и производных от концентраций. При $\eta \rightarrow \infty$ эти величины принимают некоторые постоянные значения $f_e(n, j)$, $e_e(I_k, j)$, $\varepsilon_e(j)$, которые легко подсчитать по граничным условиям.

Используя второе уравнение из (2.7) и то, что функция тока $f \sim \eta$ при $\eta \rightarrow \infty$ из (2.14) и (2.15), получим систему

$$l_e X'(n) = \eta \left[c_e(n) \sum_{j=1}^N f_e(n, j) X(j) - f_e(n, n) X(n) \right] \quad (j \neq n, j \neq E)$$

$$l_e X'(I_k) = \eta \sum_{j=1}^N e_e(I_k, j) X(j) \quad (j \neq E) \quad (2.17)$$

Наконец, исключим из (2.17) поток одной заряженной компоненты, которая не исчезает при $\eta \rightarrow \infty$ с помощью соотношения (2.10). Пусть это будет компонента с номером $N(n) + N(I)$. Тогда система (2.17) переписется так:

$$l_e X'(n) = \eta \left[c_e(n) \sum_{j=1}^N g_e(n, j) X(j) - g_e(n, n) X(n) \right], \quad (j \neq n, N(n) + N(I), E)$$

$$l_e X'(I_k) = \eta \sum_{j=1}^N h_e(I_k, j) X(j), \quad (j \neq N(n) + N(I), E) \quad (2.18)$$

$$g_e(n, j) = f_e(n, j) - f_e(n, N(n) + N(I)), \quad g_e(n, n) = f_e(n, n)$$

$$h_e(I_k, j) = e_e(I_k, j) - e_e(I_k, N(n) + N(I))$$

$$(n = 1, \dots, N(n), I_k = N(n) + 1, \dots, N(n) + N(I) - 1)$$

Решение линейной системы (2.18) в случае отсутствия кратных корней у характеристического уравнения будет

$$X(i) = \sum_{k=1}^N \beta(k, i) \exp\left(-\frac{s(k) \eta^2}{2l_e}\right) \quad (k \neq N(n) + N(I), E) \quad (2.19)$$

где $s(k)$ — корни характеристического уравнения

$$\|a_{ij} - \delta_{ij}s\| = 0$$

$$a_{ij} = \begin{cases} -c_e(j) g_e(j, i) & \text{если } 1 \leq j \leq N(n), i \neq j \\ -h_e(j, i) & \text{если } N(n) < j \leq N(n) + N(I) - 1, i \neq j \end{cases} \quad (2.20)$$

$$a_{ii} = \begin{cases} g_e(i, i) & \text{если } 1 \leq i \leq N(n) \\ -h_e(i, i) & \text{если } N(n) < i \leq N(n) + N(I) - 1 \end{cases}$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad \delta_{ij} = 1 \quad (i = j)$$

Пусть все корни (2.20) положительны. Обозначим наименьший из корней s^* , а соответствующее ему $\beta(k, i)$ — через $\beta^*(i)$ и предположим, что некоторые нейтралы исчезают на бесконечности. Тогда имеет место следующее утверждение: для всех компонент, не исчезающих при $\eta \rightarrow \infty$

$$X(i) = \beta^*(i) \exp(-s^* \eta^2 / 2l_e)$$

Для нейтралов, исчезающих на бесконечности

$$X(n) = \beta(n, n) \exp(-s(n) \eta^2 / 2l_e)$$

$$s(n) = g_e(n, n) = A_e(n) = \sum_{j=1}^N x_e(j) S_e(n, j) \quad (2.21)$$

Из уравнений диффузии системы (2.7) для компонент, не исчезающих на бесконечности (в том числе для $i = N(n) + N(I)$), имеем

$$X'(i) = -(\eta / l_e) s^* \beta^* \exp(-s^* \eta^2 / 2l_e) = -(s^* / l_e) \eta X(i) = \eta c'(i)$$

или

$$X(i) = -(l_e / s^*) c'(i) \quad (2.22)$$

Для нейтралов, исчезающих на бесконечности, аналогично

$$X(n) = -(l_e / s(n)) c'(n) \quad (2.23)$$

Сравнивая (2.22) и (2.23) с законами Фика (2.2) и (2.5), получаем соответственно

$$s^* = S_e^{(a)}(i), \quad s(n) = S_e^{(a)}(n) \quad (2.24)$$

Здесь эффективные амбиполярные числа Шмидта определены так:

$$S^{(a)}(k) = \mu / \rho D^{(a)}(k)$$

Замечание. В случае вдува легкой компоненты в ионизованный воздух или в какой-либо тяжелый газ, например CO_2 , s^* равно $s(n)$ для этой компоненты.

Если вдуваемая компонента — водород, то в случае вдува ее в ионизованный воздух имеем для всех компонент, не исчезающих на бесконечности

$$S_e^{(a)}(i) = S_e^{(a)}(\text{H}_2) = \sum_{j=1}^N x_e(j) S_e(\text{H}_2, j) \quad (j = \text{O}, \text{O}^+, \text{N}, \text{N}^+, \text{E}, \text{NO}, \text{NO}^+)$$

Для четырехкомпонентной смеси А, I, E, M, если молекулы исчезают на внешней границе

$$S_e^{(a)}(\text{A}) = S_e^{(a)}(\text{I}) = S_e^{(a)}(\text{M}) = \sum_{j=1}^N x_e(j) S_e(\text{M}, j) = [1 + c_e(\text{I})]^{-1} S_e(\text{A}, \text{M}) \quad (2.25)$$

Перейдем к вычислению эффективных амбиполярных коэффициентов диффузии (обобщенных чисел Шмидта) на стенке.

По аналогии с работами [3], [5] и в соответствии с (2.2) и (2.5) будем искать отношение диффузионных массовых потоков на стенке в виде

$$[J(i) / J(j)]_w = [D_w^{(a)}(i) / D_w^{(a)}(j)]^m (c_e(i) - c_w(i)) / (c_e(j) - c_w(j)) \quad (2.26)$$

Показатель m находился из численного решения и представлен на фиг. 1 и 2 как функция

$$\psi_i = [l / S^{(a)}(i)]_e, \quad \psi_j = [l / S_{(j)}^{(a)}]_e$$

и величины вдува α . Подставляя (2.26) в (1.5), (2.4), (2.6), получим систему трансцендентных уравнений для нахождения всех $D_w^{(a)}(i)$.

Рассмотрим частные случаи:

1. Для тройной смеси (E, I, A) из (2.3), (2.4) и (2.6) следует, что $D^{(a)}(I) = D^{(a)}(A) = D^{(a)}(E) = 2D(A, I)$ по толщине пограничного слоя.

2. Для четырехкомпонентной смеси (E, I, A, M) с граничными условиями

$$c(M) = 0, c(E) = c_e(E), c(A) = c_e(A) \quad \text{при } y \rightarrow \infty$$

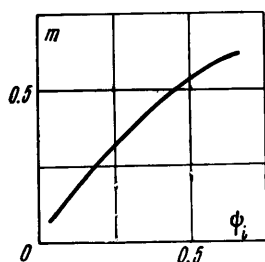
$$c(M) = 1, c(E) = c(A) = 0 \quad \text{при } y = 0$$

из решения системы (2.3), (2.4), (2.6), (2.26) получаем

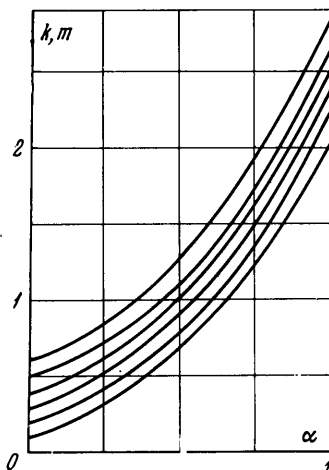
$$D_w^{(a)}(I) = 2D_w(A, M)$$

$$D_w^{(a)}(A) = D_w(A, M)$$

$$D_w^{(a)}(M) = [1 - 0.5(2 / (1 + c_e(I)))^m c_e(I)]^{-1} D_w(A, M) \quad (2.27)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

При умеренных вдувах $m \sim 1$ и $D_w^{(a)}(M) = (1 + c_e(I))D_w(A, M)$. $D_w^{(a)}(M)$ меняется от $D_w^{(a)}(A, M)$ при $c_e(I) = 0$ до $2D_w(A, M)$ при $c_e(I) = 1$.

3. Краевая задача (2.7) — (2.11) решалась численно по методу работы [6] в частном случае смеси E, N⁺, N, N₂ при изменении концентрации $c_e(N^+)$ от 0 до 1, при вдувах $\alpha = 0, -0.25, -0.5, -1$ и температурах стенки $T_w = 300$ и 3000° . Бинарные коэффициенты диффузии рассчитывались по известной формуле

$$D(\alpha, \beta) = 0.00575 \left(\frac{1}{m(\alpha)} + \frac{1}{m(\beta)} \right)^{1/2} T^{3/2} [PQ(\alpha, \beta)]^{-1}$$

$$Q(\alpha, \beta) = \pi \sigma^2(\alpha, \beta) \Omega(\alpha, \beta)$$

для пар нейтрал-нейтрал и заряженная частица-нейтрал (за исключением $Q(N^+, N)$ вычислялись для потенциала Леннарда — Джонса) и

$$Q(\alpha, \beta) = (\pi / 2) (e^2 / kT)^2 \ln \lambda(\alpha, \beta)$$

для пар заряженная частица-заряженная частица.

Здесь $\ln \lambda(\alpha, \beta)$ — кулоновский логарифм. Нужно отметить, что величины $Q(\alpha, \beta)$, приведенные в работах [7, 8], для взаимодействия заряженных частиц мало отличаются друг от друга.

Сечение перезарядки $Q = Q(N^+, N)$ бралось из работ [1] и [9]. В работе [1] значение Q в четыре раза больше, чем в [9].

Коэффициенты вязкости и теплопроводности для отдельных компонент и смесей рассчитывались по формулам работы [7]. Теплоемкости компонент аппроксимированы по данным [10]. Кроме того, были произведены расчеты с коэффициентами вязкости и теплопроводности, принятыми в [1]. Результаты при $\alpha = 0$ приведены в таблице.

Для выяснения влияния величины α на

$$g'(0) = \theta_w' c_{pw} (T_e - T_w) / (h_e^* - h_w^*)$$

были проведены расчеты при $p = 1$ бар, $T_w = 300^\circ$ К. Для $T_e = 13000^\circ$ К значение $g'(0) = 0.2275, 0.11, 0.0386, 0.0011$ соответственно для вдувов $\alpha = 0, -0.25, -0.5, -1$.

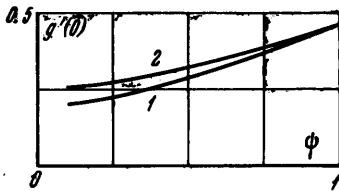
| Q | T _w | T _e | 10000 | 8000 | 13000 | 10000 | 16000 | 13000 |
|-----|--------------------|----------------|-------|------------------|--------|------------------|-------|------------------|
| | | p | 1 | 10 ⁻² | 1 | 10 ⁻² | 1 | 10 ⁻² |
| [9] | 300 | ψ | 0.371 | 0.286 | 0.22 | 0.125 | 0.121 | 0.048 |
| | | g' | 0.255 | 0.248 | 0.2275 | 0.2125 | 0.213 | 0.1945 |
| | | c _h | 0.376 | 0.367 | 0.35 | 0.329 | 0.339 | 0.314 |
| | 3000 | ψ | 0.823 | — | 0.488 | — | 0.27 | 0.107 |
| | | g' | 0.378 | — | 0.3285 | — | 0.298 | 0.253 |
| | | c _h | 0.537 | — | 0.9 | — | 0.226 | 0.455 |
| [1] | 300 | ψ | 0.245 | 0.23 | 0.116 | 0.083 | 0.087 | 0.043 |
| | | g' | 0.235 | 0.23 | 0.205 | 0.2 | 0.203 | 0.19 |
| | | c _h | 0.34 | 0.34 | 0.309 | 0.304 | 0.307 | 0.294 |
| | c _h [1] | — | 0.378 | 0.362 | 0.365 | 0.365 | 0.347 | 0.305 |
| | | 0.388 | 0.36 | 0.366 | 0.339 | 0.313 | 0.308 | |

При T_e = 16000° К значение g'(0) = 0.213, 0.095, 0.034 для вдувов α = 0, -0.25, -0.5. На основании этих расчетов (осесимметричный случай величина g'(0) аппроксимирована в виде

$$g'(0) = (0.195\psi^{-0.3}h_w^*/h_e^* + 0.318)\psi^{0.174} + 0.67\sigma_w\{1 + [0.81 - 1.2(l/\sigma)_e]\alpha\}$$

$$\psi = (l/\sigma)_e\sigma_w, \quad 0.05 < \psi < 0.6 \quad (3.1)$$

Точность аппроксимации 5%. На фиг. 3 представлена эта зависимость при α = 0 (кривая 1 при h_w*/h_e* = 0.02, кривая 2 при h_w*/h_e* = 0.2).

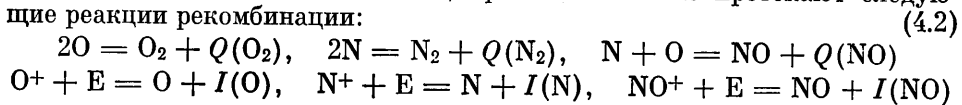


Фиг. 3

4. Рассмотрим формулу для теплового потока к стенке от ионизованного воздуха (E, O⁺, N⁺, NO⁺, O, N, NO, O₂, N₂) при наличии вдува O₂ и N₂

$$q_w = \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial y} - \sum_{k=1}^N h(k)J(k) \right] \quad (4.1)$$

Считаем пограничный слой «замороженным», причем на стенке протекают следующие реакции рекомбинации:



Выберем за элементы O⁺, N⁺, E и запишем закон сохранения элементов на стенке

$$\sum_{k=1}^N m_l(k)J(k) = 0, \quad l = O^+, N^+, E \quad (4.3)$$

Здесь m_l(k) — весовая доля элемента l в компоненте k. Так как на девять компонент имеем три элемента, то можно выразить шесть удельных энтальпий h(k) через три независимые и теплоты реакций Q(k) и I(k). Принимая за независимые удельные энтальпии h(O₂), h(N₂), h(E), получим

$$h(O) = h(O_2) + \frac{Q(O_2)}{m(O_2)}, \quad h(N) = h(N_2) + \frac{Q(N_2)}{m(N_2)}$$

$$h(NO) = m(O) \frac{h(O_2)}{m(NO)} + m(N) \frac{h(N_2)}{m(NO)} + q_1$$

$$h(O^+) = h(O_2) - m(E) \frac{h(E)}{m(O)} + q_2 h(N^+) = h(N_2) - m(E) \frac{h(E)}{m(N)} + q_3$$

$$h(NO^+) = m(O) \frac{h(O_2)}{m(NO)} + m(N) \frac{h(N_2)}{m(NO)} - m(E) \frac{h(E)}{m(NO)} + q_4$$

$$q_1 = \frac{Q(O_2)}{2m(NO)} + \frac{Q(N_2)}{2m(NO)} - \frac{Q(NO)}{m(NO)}$$

$$q_2 = \frac{Q(O_2)}{m(O_2)} + \frac{I(O)}{m(O)}, \quad q_3 = \frac{Q(N_2)}{m(N_2)} + \frac{I(N)}{m(N)}, \quad q_4 = q_1 + \frac{I(NO)}{m(NO)}$$

Преобразуем (4.1) с учетом (4.3) и (2.1)

$$q_w = \left\{ \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \frac{Q(O_2)J(O)}{m(O_2)} - \frac{Q(N_2)J(N)}{m(N_2)} - q_1 J(NO) - \right. \\ \left. - q_2 J(O^+) - q_3 J(N^+) - q_4 J(NO^+) \right\}_w \quad (4.4)$$

Отношение массового диффузионного потока к градиенту температуры будем искать в виде

$$\left[- \frac{J(i)}{\lambda \partial T / \partial y} \right]_w = \left[\rho D_{(i)}^{(a)} \frac{\partial c(i)}{\lambda \partial T / \partial y} \right]_w = L_w^{(a)k} \frac{c_e(i) - c_w(i)}{h_e^* - h_w^*} \\ L_w^{(a)}(i) = \frac{\rho c_p D^{(a)}(i)}{\lambda} \quad (4.5)$$

где $L_w^{(a)}(i)$ — амбиполярные эффективные числа Льюиса на стенке, $D_w^{(a)}(i)$ рассчитаны в п. 2, а показатель k — как функцию величин

$$(l/\sigma)_e, \quad \psi_i = [l(1 + c(I))]_e / S_e(A, M), \quad \alpha$$

необходимо брать из численных решений (фиг. 2 и 4). С учетом (4.5) (4.4) перепишется в виде

$$q_w = (2\beta\mu_w\rho_w)^{1/2} \sigma_w^{-1} g'(0) \left\{ h_e - h_w^* + c_e(O)[L^{(a)k}(O) - 1] \frac{Q(O_2)}{m(O_2)} + \right. \\ \left. + c_e(N)[L^{(a)k}(N) - 1] \frac{Q(N_2)}{m(N_2)} + c_e(NO)[L^{(a)k}(NO) - 1] q_1 + \right. \\ \left. + c_e(O^+)[L^{(a)k}(O^+) - 1] q_2 + c_e(N^+)[L^{(a)k}(N^+) - 1] q_3 + \right. \\ \left. + c_e(NO^+)[L^{(a)k}(NO^+) - 1] q_4 \right\}_w \quad (4.6)$$

$$h_e = h_e^* + h_d + h_I, \quad h_d = \frac{Q(O_2)}{m(O_2)} [c_e(O) + c_e(O^+)] + \\ + \frac{Q(N_2)}{m(N_2)} [c_e(N) + c_e(N^+)] + q_1 [c_e(NO^+) + c_e(NO)] \\ h = \frac{I(O)}{m(O)} c_e(O^+) + \frac{I(N)}{m(N)} c_e(N^+) + \frac{I(NO)}{m(NO)} c_e(NO^+)$$

где $g'(0)$ необходимо брать из численных решений или формулы (3.1).

Перепишем теперь (4.6) с учетом следующих конкретных значений $Q(i)$ и $I(i)$ в кал/мол:

$$\begin{aligned} Q(\text{O}_2) = 117973, \quad Q(\text{N}_2) = Q(\text{N}_2) = 225072, \quad Q(\text{NO}) = 150043 \\ I(\text{O}) = 314052, \quad I(\text{N}) = 335520, \quad I(\text{NO}) = 213378 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Энергии диссоциации и ионизации единицы массы воздуха в h_d и h_I в кал/г примут следующие значения:

$$\begin{aligned} h_d = 3686[c_e(\text{O}) + c_e(\text{O}^+)] + 8038[c_e(\text{N}) + c_e(\text{N}^+)] + 716[c_e(\text{NO}) + \\ + c_e(\text{NO}^+)], \quad h_I = 19628 c_e(\text{O}^+) + 23965 c_e(\text{N}^+) + 7113 c_e(\text{NO}^+) \end{aligned} \quad (4.8)$$

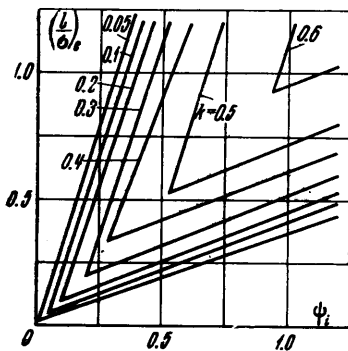
Считая для простоты, что на стенке произошла рекомбинация до молекул, и пользуясь близостью бинарных коэффициентов диффузии $D(i, \text{O}_2)$ и $D(i, \text{N}_2)$ ($i = \text{O}, \text{N}, \text{O}^+, \text{N}^+, \text{NO}, \text{NO}^+$), получим

$$L_w^{(a)}(\text{O}) = L_w^{(a)}(\text{N}) = L_w(\text{N}, \text{N}_2)$$

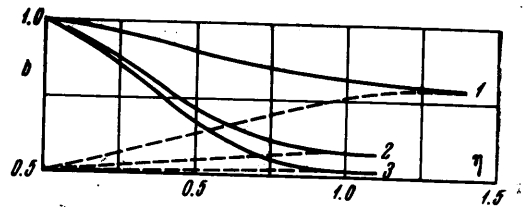
$$L_w^{(a)}(\text{NO}) = L_w(\text{N}_2, \text{N}_2)$$

$$L_w^{(a)}(\text{NO}^+) = 2L_w(\text{N}_2, \text{N}_2)$$

$$L_w(\text{I}) = 2L_w(\text{N}, \text{N}_2)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Используя (4.7) и полагая $L_w(\text{N}_2, \text{N}_2) / L_w(\text{N}, \text{N}_2) = 0.73$ найдем окончательную формулу для конвективного теплового потока

$$\begin{aligned} q_w = (2\beta\mu_w\rho_w)^{1/2}\sigma_w^{-1}g'(0) \{h_e - h^* + [L^k(\text{N}, \text{N}_2) - 1]h_d + \\ + [(2L(\text{N}, \text{N}_2))^k - 1]h_I + L^k(\text{N}, \text{N}_2)(2^k - 1)(3686c_e(\text{O}^+) + \\ + 8038c_e(\text{N}^+)) + L^k(\text{N}, \text{N}_2)[(1.46)^k - 1]716c_e(\text{NO}^+) - L^k(\text{N}, \text{N}_2)[1 - \\ - (0.73)^k]716c_e(\text{NO}) - [2L(\text{N}, \text{N}_2)]^k(1 - (0.73)^k)7113c_e(\text{NO}^+)\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Для обтекания ионизованным азотом

$$\begin{aligned} q_w = (2\beta\mu_w\rho_w)^{1/2}\sigma_w^{-1}g'(0) \{h_e - h^* + [L^k(\text{N}, \text{N}_2) - 1]h_d + \\ + [(2L(\text{N}, \text{N}_2))^k - 1]h_I + 8038L^k(\text{N}, \text{N}_2)(2^k - 1)c_e(\text{N}^+)\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$h_d = 8038[c_e(\text{N}) + c_e(\text{N}^+)], \quad h_I = 23965 c_e(\text{N}^+) \quad (4.11)$$

В работе [1] сделано основное предположение о бесконечно большом сечении перезарядки, которое, как следует из соотношений (1.8), ведет к равенству эффективных амбиполярных коэффициентов диффузии для атомов, молекул и ионов

$$S^{(a)}(\text{N}^+) / S(\text{N}, \text{N}_2) = S^{(a)}(\text{N}) / S(\text{N}, \text{N}_2) = [1 + c_e(\text{N}^+)]^{-1} = \text{const}$$

по всей толщине пограничного слоя. В действительности, как следует из фиг. 5, $b_1 = S^{(a)}(N^+) / S(N, N_2)$ меняется от 0.5 на стенке до $[1 + c_e(N^+)]^{-1}$ на внешней границе пограничного слоя (пунктирные линии), а $b_2 = S^{(a)}(N) / S(N, N_2)$ уменьшается от 1 на стенке до $[1 + c_e(N^+)]^{-1}$ на внешней границе (сплошные линии). Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям $c_e(N^+) = 0.27, 0.77, 0.937$.

$$L^* = \frac{m(N)}{m} \frac{\rho D(N, N_2) c_p(N)}{[1 + c(N^+)] \lambda(N)} = 0.6$$

— второе допущение работы [1]. С целью проверки влияния этих ограничений на величину

$$c_h = -q_w (\sigma_w c_{pw} / \lambda_w \rho_w \beta)^{1/2} / (h_e - h_w)$$

был проведен расчет обтекания тела ионизованным азотом с коэффициентами вязкости и теплопроводности, взятыми из [1]. Результаты представлены в таблице (две последние строки): c_h в данной работе на 7—15% меньше, чем в [1]. Из этой же таблицы следует, что неточности в вычислении ϕ слабо влияют на величину c_h .

Автор благодарит Г. А. Тирского за ценные замечания и обсуждение работы.

Поступило 20 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Fay I. A., Kemp N. H. Theory of stagnation point heat transfer in a partially ionized diatomic gas. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 12. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1964, № 1.)
2. Жданов В. М. Явления переноса в частично ионизованном газе. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
3. Тирский Г. А. Определение эффективных коэффициентов диффузии в ламинарном многокомпонентном пограничном слое. Докл. АН СССР, 1964, т. 15, № 6, стр. 1278—1281.
4. Chung P. M. Electrical characteristics of Couette and stagnation boundary-layer flows of weakly ionized gases. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 1.
5. Резников Б. И., Тирский Г. А. Обобщенная аналогия между коэффициентами массообмена в ламинарном многокомпонентном пограничном слое с произвольным градиентом давления. Докл. АН СССР, 1964, т. 158, № 4, стр. 798—801.
6. Петухов И. В. О численном интегрировании уравнений ламинарного пограничного слоя. Докл. АН СССР, 1960, т. 132, № 2.
7. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
8. Полянский В. А. Диффузия и проводимость в частично ионизованной много-температурной газовой смеси. ПМТФ, 1964, № 5.
9. Fay I. A., Kemp N. H. Theory of heat transfer to a shock — tube end — wall from an ionized monatomic gas. J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, No. 4, pp. 659—672.
10. Гурвич Л. В. и др. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. М., Изд-во АН СССР, 1962, т. 2.
11. Тирский Г. А. Определение тепловых потоков в окрестности критической точки двойной кривизны при обтекании тела диссоциирующим газом произвольного состава. ПМТФ, 1965, № 1.