ПЛОСКАЯ ГИПЕРЗВУКОВАЯ СТРУЯ ГАЗА

М. И. ФОЛЛЭ

(Москва)

Рассмотрено истечение плоской гиперзвуковой струи в покоящуюся среду. Исследованы свойства течения до места образования «висячих» скачков уплотнения.

1. Уравнение плоского установившегося потенциального движения

$$(a^2-u^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-2uv\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+(a^2-v^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \tag{1.1}$$

(где $\varphi(x, y)$ — потенциал скорости, u, v — компоненты вектора скорости, a — скорость звука) в плоскости годографа при помощи преобразования $\Phi(u, v) = ux + vy - \varphi(x, y)$ приводится к линейному виду [1]

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}-\frac{4}{(\gamma-1)^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta^2}-\frac{3-\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{z}\frac{\partial\chi}{\partial z}=0 \qquad \left(z=\frac{1}{M}\right) \tag{1.2}$$

Здесь M — число Маха, θ — угол наклона вектора скорости к оси x. Координаты в плоскости течения выражаются при этом формулами

$$x=\frac{\gamma-1}{2z}\frac{\partial\chi}{\partial z}, \qquad y=\theta x-\frac{\partial\chi}{\partial\theta} \tag{1.3}$$

При выводе уравнения (1.2) предполагалось (гиперзвуковое приближение)

$$h^2z^2\leqslant 1, \quad h^2=(\gamma+1)\,/\,(\gamma-1), \quad \theta^2\leqslant 1$$

а также, что порядок $\partial\Phi\,/\,\partial\theta$ не больше, чем порядок $\partial\Phi\,/\,\partial z$. При этих предположениях модуль вектора скорости во всем течении постоянен. Для $\gamma=(2n+3)\,/\,(2n+1)$ известно [2] общее решение уравнения (1.2)

$$\chi(z,\theta)=\left(\frac{\partial}{z\partial z}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{z}F_1\left(z-\frac{\theta}{2n+1}\right)+\frac{1}{z}F_2\left(z+\frac{\theta}{2n+1}\right)\right\} \tag{1.4}$$

Это решение не содержит простой волны $y=(\theta\pm z)x+f(\theta)$, которая будет особым интегралом уравнения (1.2). На граничной с простой волной характеристике для $\chi(z, \theta)$ выполнено условие [2]

$$\chi=-\int f(\theta)\,d\theta \tag{1.5}$$

2. Как и в работе [3], рассмотрим истечение плоской гиперзвуковой струи из прямого среза в покоящуюся среду. Будем предполагать струю недорасширенной (истечение перерасширенной струи при регулярном пересечении скачков в плоскости симметрии сводится к рассматриваемому).

Рассмотрим половину струи, считая плоскость симметрии твердой стенкой. Безразмерные координаты в плоскости течения $x=z_0'x'\,/\,l$, $y=y'\,/\,l$ зависят от параметра $\eta=z_1'\,/\,z_0'$ и переменных $z=z'\,/\,z_0'$, $\theta=\theta'\,/\,z_0'$.

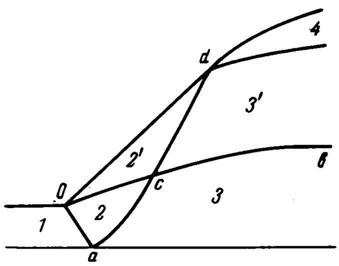
Штрихованные координаты — размерные, индекс нуль относится к невозмущенной струе, единица — к значению на свободной границе струи, l — полуширина струи. От края среза (фиг. 1) отойдет центрированная волна разряжения $y = (\theta - z)x$, область *1* есть область однородного потока $z = 1$, $\theta = 0$, в области *2'* будет однородное течение $z = \eta$, $\theta = (1 - \eta)(2n + 1)$.

Уравнение граничной характеристики ac и инвариант на ней

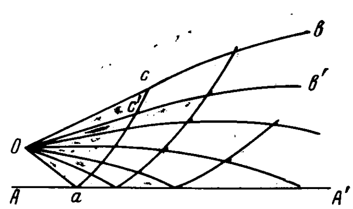
$$y = 2(n+1)x - 2(n+1)x^{n/(n+1)}, \qquad z + \frac{\theta}{2n+1} = 1$$

так как $d^2y \,/\, d^2x < 0$, то эта характеристика выпукла вниз. На ac существует связь $x = z^{-(n+1)}$, в частности в точке c, а также в точке d свободной границы

$$x_c = \eta^{-(n+1)}, \qquad x_d = 2\eta^{-(n+1)}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

В области *3* граничные условия для $\chi(z, \theta)$ имеют вид

$$\chi(z, \theta) = 0 \text{ при } z + \theta \,/\, (2n + 1) = 1, \qquad \partial\chi \,/\, \partial\theta = 1 \text{ при } \theta = 0$$

и решение можно записать следующим образом [2]:

$$\chi(z, \theta) = \frac{2n+1}{2^n n!}\left(\frac{\partial}{z\partial z}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{z}\left[\left(z + \frac{\theta}{2n+1}\right)^2 - 1\right]^n\right\} \tag{2.1}$$

Формулы (1.3) и (2.1) определяют однозначное и непрерывное решение в области *3*

$$x = x(z, \theta), \qquad y = y(z, \theta) \tag{2.2}$$

3. Предположим теперь, что в области *3* функции

$$z = z(x, y), \qquad \theta = \theta(x, y) \tag{3.1}$$

также однозначны и непрерывны. Возьмем две произвольные точки на характеристике cb и проведем через них характеристики положительного семейства

$$z + \frac{\theta}{2n+1} = \text{const}, \qquad \frac{dy}{dx} = \theta + z$$

Легко видеть, что эти характеристики, не пересекаясь, дойдут до плоскости симметрии. Из полученных таким образом точек проведем характеристики отрицательного семейства

$$z - \frac{\theta}{2n+1} = \text{const}, \qquad \frac{dy}{dx} = \theta - z$$

они, также не пересекаясь, выйдут на характеристику ac. Можно показать, что z и θ уменьшаются на отрицательных характеристиках (по мере удаления от характеристики ac) и что z уменьшается, а θ увеличивается на положительных характеристиках (по мере удаления от твердой стенки). Кроме того, характеристики положительного семейства выпуклы вниз, отрицательного — вверх. Очевидно, что течение в области $3'$ есть простая волна.

Так как наклон прямых характеристик $dy/dx = 2(n+1)z - (2n+1)(2\eta - 1)$ уменьшается на cb, то эта простая волна есть волна разрежения, и следовательно, при предположениях п. 3 в области $3'$ скачки уплотнения отсутствуют.

Введем на ac вспомогательный параметр $\eta' = z|_{ac}$, $0 < \eta \leqslant \eta' < 1$ (фиг. 2). Предполагая существование функций (3.1), получаем из формул (2.2)

$$x = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{\partial}{z\partial z}\right)^n\left\{\frac{1}{z}\left[\left(z + \frac{\theta}{2n+1}\right)^2 - 1\right]^n\right\}$$

Воспользуемся известным [2] тождественным преобразованием, верным на характеристиках

$$\left(\frac{\partial}{z\partial z}\right)^n \frac{F(z \pm \theta/(2n+1))}{z} = \frac{1}{2^n}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n \frac{F(2z+a)}{z^{n+1}}$$

$$\left(\pm\frac{\theta}{2n+1} = z + a\right)$$

В рассматриваемом случае $-a = 2\eta' - 1$, следовательно

$$x = \frac{1}{2^{2n} n!}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n \frac{[(2z - 2\eta' + 1)^2 - 1]^n}{z^{n+1}} \tag{3.2}$$

Рассмотрим теперь характеристику $c'b'$ с $\eta' > 1/2$ и предположим, что она не пересечет AA'. На $c'b'$ выполнено условие $0 < z \leqslant \eta' < 1$. Из формулы (3.2) ясно, что при фиксированных n и η' сколь угодно большие x могут достигаться лишь при $z \to 0$. На $c'b'$ существует инвариант

$$z - \frac{\theta}{2n+1} = 2\eta' - 1 > a > 0 \tag{3.3}$$

а $z \to 0$, $\theta \to (1 - 2\eta')(2n+1) < 0$

$$dy/dx = \theta - z \to (1 - 2\eta')(2n+1) < 0 \quad \text{при } x \to \infty$$

Но тогда кривая $c'b'$ пересечет AA'. Следовательно, все $c'b'$, у которых $\eta' > 1/2$, пересекут AA'. Не фиксируя η' и полагая $1/2 - \eta' = \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ (ε мало), получим, что в точке пересечения $c'b'$ с AA' значение z мало, и следовательно, среди характеристик с $\eta' > 1/2$ есть такие, которые пересекут AA' сколь угодно далеко.

Рассмотрим теперь характеристику $c'b'$, для которой $\eta' \leqslant 1/2$, она не может пересечь AA' — иначе она пересечет характеристики своего же семейства. Таким образом, характеристика $c'b'$ должна уйти в бесконечность. Из формулы (3.2) следует, что на $c'b'$

$$z \to 0, \quad \theta \to (1 - 2\eta')(2n+1) \geqslant 0$$

$$dy/dx \to (1 - 2\eta')(2n+1) \geqslant 0 \quad \text{при } x \to \infty$$

Следовательно, все характеристики с $\eta' \leqslant {}^1/_2$ уходят в бесконечность и выходят каждая на свою асимптоту. Рассматривая задачу Коши, М. Д. Ладыженский сформулировал [4, 5] условия на начальные данные, достаточные для появления бесконечных областей существования решения. Начальные данные предполагаются им достаточно гладкими, задаются на гладкой дуге MN и удовлетворяют неравенствам

$$|\theta(M) - \theta(N)| \geqslant (\gamma - 1)^{1/2} \max z, \qquad \omega - z > 0 \tag{3.4}$$

максимум z берется на MN, ω — наименьший угол между касательной к MN и направлением скорости. При этом показывается, что область определения решения становится бесконечной, а течение асимптотически совпадает с течением от сверхзвукового источника [4]. Нетрудно видеть, что если достаточно далеко провести прямую, параллельную оси ординат, и за дугу MN принять отрезок этой прямой, принадлежащий области $\mathit{З}$, то на нем условия (3.4) будут выполнены. Следовательно, при $x \to \infty$ течение в области $\mathit{З}$ стремится к течению от сверхзвукового источника.

4. Чтобы гарантировать пригодность полученного решения (2.2) для определения течения во всей области $\mathit{З}$, достаточно выполнить требование

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(z, \theta)} \neq 0 \tag{4.1}$$

во всей области $\mathit{З}$. Тогда существует решение (3.1), где $z(x, y)$, $\theta(x, y)$ — однозначные, непрерывные и дифференцируемые функции.

Условие (4.1) легко приводится к виду

$$J = \left(\frac{1}{z}\frac{\partial\chi}{\partial z} - \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right)\left(\frac{1}{2n+1}\frac{1}{z}\frac{\partial\chi}{\partial z} - \frac{\partial^2\chi}{\partial\theta^2}\right) - \left(\frac{\partial^2\chi}{\partial z\partial\theta}\right)^2 \neq 0 \tag{4.2}$$

Анализ этого условия затруднен тем, что не известно заранее в каких пределах изменяются z и θ в области $\mathit{З}$.

Рассмотрим случай $n = 1$ ($\gamma = 1.67$). Условие (4.2) примет тогда вид

$$J_1 = (3z^2 - \theta^2 + 9 + 2z\theta)(3z^2 - \theta^2 + 9 - 2z\theta) \neq 0 \tag{4.3}$$

Вновь рассмотрим произвольную отрицательную характеристику $c'b'$ (фиг. 2) с параметром $\eta' = z|_{ac}$, $0 < \eta \leqslant \eta' < 1$. Полагая $n = 1$ в формуле (3.2), найдем

$$x = \frac{2\eta' - 1}{z^2} - \frac{2\eta'(1 - \eta')}{z^3} \tag{4.4}$$

При фиксированном η' соотношение (4.4) представляет собой функцию $x = x(z)$. Рассмотрим обратную функцию $z = z(x)$ на $c'b'$ (если такая существует), непрерывную, удовлетворяющую следующим условиям: а) $z_{c'} = z(x_{c'})$, б) угол наклона характеристики $c'b'$ в точке c' непрерывен. Можно показать, что $z = z(x)$ существует и единственна. Так как на $c'b'$ выполнено равенство $z - {}^1/_3\theta = 2\eta' - 1$, то имеем также $\theta = \theta(x)$ при фиксированном η'. Рассматривая совокупность функций $z = z(x)$ и $\theta = \theta(x)$ при различных η' и учитывая (1.3), получаем

$$z = z_1(x, \eta'), \quad \theta = \theta_1(x, \eta'), \quad y = y_1(x, \eta') \quad (0 < \eta \leqslant \eta' < 1) \tag{4.5}$$

Эти формулы строятся вне зависимости от того пересекаются ли характеристики в области *3* или нет, но из их построения ясно, что если непрерывное решение (3.1) существует, то формулы (4.5) дают его параметрическую запись. Нетрудно видеть, что $z(x)$ и $\theta(x)$ на $c'b'$ монотонно убывают и удовлетворяют неравенствам

$$0 < z \leqslant \eta', \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 3(1-\eta') \tag{4.6}$$

Возвращаясь к (4.3) и учтя (4.6), видим, что первая скобка якобиана J_1 положительна. Рассмотрим на $c'b'$ вторую скобку

$$3z^2 - \theta^2 + 9 - 2z\theta = -{}^3/_4\theta^2 + \mathrm{const}$$

минимум второй скобки соответствует максимальному углу θ, следовательно, достаточно проверить ее на характеристике ac

$$z = \eta', \quad \theta = 3(1-\eta'), \quad 3z^2 - \theta^2 + 9 - 2z\theta = 12\eta' > 0$$

Если теперь предположить, что в области *3* нет непрерывного решения (3.1), то тогда должна существовать точка (z°, θ°), в которой якобиан обратится в нуль, но $J_1 > 0$ во всей области *3*. Следовательно, существует однозначное непрерывное решение (3.1) в области *3*, формулы (4.5) дают его параметрическую запись, а неравенства (4.6) — область изменения значений функций. Это решение обязано удовлетворять всем свойствам, полученным в п. 3.

5. Докажем, что однозначное непрерывное решение (3.1) в области *3* существует при $n = 2$ $(\gamma = 1.4)$. Доказательство проводится аналогично п. 4. Условие (4.1) примет вид

$$J_2 = \left[z_4^4 - 2z^2\left(\frac{3\theta^2}{25} - 1\right) + 5\left(1 - \frac{\theta^2}{25}\right)^2 + \frac{4}{5}\theta z^3 + \frac{4}{5}\theta z\left(1 - \frac{\theta^2}{25}\right)\right] \times$$
$$\times \left[z^4 - 2z^2\left(\frac{3\theta^2}{25} - 1\right) + 5\left(1 - \frac{\theta^2}{25}\right)^2 - \frac{4}{5}\theta z^3 - \frac{4}{5}\theta z\left(1 - \frac{\theta^2}{25}\right)\right] \neq 0 \tag{5.1}$$

На произвольной характеристике $c'b'$ имеем, полагая $n = 2$ в формуле (3.2)

$$x = \frac{1}{8z^5}\left[4(3\mu^2 - 1)z^2 + 12z\mu(1-\mu^2) + 3(1-\mu^2)^2\right]$$
$$\mu = 2\eta' - 1 \tag{5.2}$$

При построении на $c'b'$ обратной функции приходится отдельно разбирать следующие случаи: а) $3\mu^2 - 1 \geqslant 0$, $\mu > 0$, б) $3\mu^2 - 1 < 0$, в) $3\mu^2 - 1 > 0$, $\mu < 0$. Во всех трех случаях при тех же требованиях, что и в п. 4, на $c'b'$ существует единственная функция $z = z(x)$. Точно так же получаем параметрическую запись

$$z = z_2(x, \eta'), \quad \theta = \theta_2(x, \eta'), \quad y = y_2(x, \eta') \quad (0 < \eta \leqslant \eta' < 1) \tag{5.3}$$

и неравенства

$$0 < z \leqslant \eta', \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 5(1-\eta') \tag{5.4}$$

причем $z(x)$ и $\theta(x)$ монотонно убывают на $c'b'$.

Докажем, что $J_2 > 0$. Для этого достаточно, чтобы вторая скобка якобиана $T(z, \theta)$ была положительной. Функцию $T(z, \theta)$ на $c'b'$ можно записать в виде

$$T(\theta) = -0.128(2\eta' - 1)\theta^3 - 0.96(2\eta'^2 - 2\eta' + 1)\theta^2 + \text{const}$$

Хотя $T(\theta)$ убывает лишь в некоторой окрестности $\theta = 0$ при $\theta \geqslant 0$, легко видеть, что этого достаточно, и $T(z, \theta)$ на $c'b'$ имеет в c' минимум. На характеристике ac

$$T(z, \theta) = 8\eta'^2 > 0$$

Аналогично п. 4 получаем, что в области *3* при $n = 2$ существует однозначное непрерывное решение вида (3.1). Формулы (5.3) дают его параметрическую запись, а неравенства (5.4) — область изменения значений функций. Все выводы п. 3 справедливы и при $n = 2$.

6. В статье [3] найдено решение в плоскости годографа в области *4*. В этой статье показано, что функции F_1 и F_2 из формулы (1.4) для $\chi(z, \theta)$ можно записать в виде

$$\zeta_\pm = z \pm \frac{\theta}{2n+1}, \qquad F_2(\zeta_+) = \frac{2n+1}{2^n n!}(\zeta_+^2 - 1)^n$$

$$F_1(\zeta_-) = -\frac{2n+1}{2^n n!}(\zeta_-^2 - 1)^n + \sum_{i=1}^{n+1} b_i \exp\frac{\beta_i \zeta_-}{\eta}$$

где коэффициенты b_i находятся из линейной алгебраической системы, а β_i — из характеристического уравнения

$$\beta^{n+1} - \frac{(n+2)(n+1)}{2}\beta^n +$$

$$+ \frac{(n+2)(n+1)n + (n+1)n(n-1) + \ldots + 3\cdot 2\cdot 1}{2}\beta^{n-1} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!}{2^n n!} = 0 \qquad (6.1)$$

В действительности такая запись характеристического уравнения годится лишь при $n = 1$ и $n = 2$. Для произвольного n уравнение должно иметь следующий вид:

$$(-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!}{2^n n!} + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(n+1)![2(n-k+1)]!}{k![(n-k+1)!]^2 2^{n-k+1}} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{k} a_{ki}\beta^{k-i+1}(-1)^{n+2-k+i} = 0$$

$$a_{ki} = a_{k-1,\, i-1}(k + i - 3) + a_{k-1,\, i} \quad (k > 1,\ i > 1)$$

$$a_{k1} = 1 \quad (k \geqslant 1), \qquad a_{1i} = 0 \quad (i \geqslant 2) \qquad (6.2)$$

Отметим, что в работе [3] сделан следующий основной вывод: «...при любых соотношениях чисел Маха в невозмущенной струе и на ее границе со средой ударные волны в струе образуются до прохождения ею первого сжатия». Однако, как следует из приведенных выше результатов, такой вывод, как и рассмотренная в работе [3] структура течения, верен лишь при $^1/_2 < \eta < 1$, во всяком случае для $\gamma = 1.4$ и $\gamma = 1.67$. При любом η ($\gamma = 1.4$ и $\gamma = 1.67$) существует изэнтропическое ядро, к которому относятся области *3* и *3'* (фиг. 1). При $0 < \eta \leqslant {}^1/_2$ ядро становится бесконечным с неограниченно увеличивающимся поперечным сечением (при $\eta = {}^1/_2$ сечение стремится к постоянной величине). Течение в ядре по мере удаления от сопла стремится к течению от сверхзвукового источника. Очевидно, что при $0 < \eta \leqslant {}^1/_2$ область *4* будет последней областью, других областей, как это имеет место в случае $^1/_2 < \eta < 1$, фактически разобранном в статье [3], не будет. Можно показать также, что при $^1/_2 < \eta < 1$ изэнтропичность в области *4* обязательно нарушится. В связи с этим необходимо иметь в виду, что ударная волна, зародившись в области *4*, может проникнуть в ядро струи и нарушить его изэнтропичность.

Работа велась под руководством Г. Г. Черного, который оказал автору большую помощь.

Поступило 11 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Фалькович С. В. Плоское движение газа при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ, 1947, т. 11, вып. 4.
2. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
3. Смирнов В. А. Об истечении плоской гиперзвуковой струи в покоящуюся среду. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
4. Ладыженский М. Д. О течениях газа с большой сверхзвуковой скоростью. Докл. АН СССР, 1960, т. 134, № 2.
5. Ладыженский М. Д. Анализ уравнений гиперзвуковых течений и решение задачи Коши. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.