К ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ГАЗА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ВНЕШНИХ СИЛ

В. Э. БАСКИН

(Москва)

В линейной постановке определяются поля скоростей и давлений, которые возбуждаются в сжимаемой среде произвольным образом перемещающейся и деформирующейся несущей нитью. Для общего случая нестационарного движения такой нити даны явные формулы, выражающие скорость в заданной точке через интенсивность свободных вихрей, попадающих в построенную для этой точки зону слышимости звуковых сигналов. Рассмотрено течение газа, вызванное произвольным полем внешних объемных сил.

Работы, посвященные определению полей скоростей газа при обтекании тонких тел, в основном относятся к поступательному движению тела с доминирующей постоянной скоростью [1-3]. Скорости газа при винтовом движении в нем прямолинейной несущей нити рассмотрены в [4].

1. Рассмотрим безграничный газ, находившийся до момента $t = 0$ в покое, а затем пришедший в движение под действием произвольного поля внешних массовых сил $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$. В линейном приближении уравнения движения будут

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} p = \rho_0 \mathbf{F}, \qquad \frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{1.1}$$

где ρ_0 — плотность невозмущенного газа, c — скорость звука. Чтобы свести систему (1.1) к одному уравнению, интегрируем первое уравнение по t от 0 до t, и найденное отсюда выражение для $\mathbf{v}$ подставляем во второе уравнение. Обозначив через $\mathbf{D}$ определяемую полем $\mathbf{F}$ величину плотности импульса внешних сил, представим, таким образом, решение системы (1.1) в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{D} + \operatorname{grad} \varphi, \qquad p = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{1.2}$$

где потенциал скоростей φ удовлетворяет следующему неоднородному волновому уравнению:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -U \qquad \left(U = \operatorname{div} \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = \int_0^t \mathbf{F}\, dt \right) \tag{1.3}$$

Так как при $t < 0$ газ покоился, уравнение (1.3) следует решать при нулевых начальных условиях $\varphi|_{t=0} = 0$, $\partial\varphi / \partial t|_{t=0} = 0$. Если функция $\mathbf{D}$ непрерывна и имеет первые производные, то единственное решение уравнения (1.3) при таких условиях дается формулой (Кирхгофа)

$$\varphi(\mathbf{r}_0, t_0) = \iiint\limits_{l<ct_0} \frac{1}{4\pi l} U\left(\mathbf{r}, t_0 - \frac{l}{c} \right) dk \qquad (l = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|) \tag{1.4}$$

Это выражение представляет φ через потенциал объемного распределения запаздывающих источников с плотностью — U.

В дальнейшем наибольший интерес будет представлять случай, когда поле импульсов $\mathbf{D}$ имеет разрывы первого рода. Соответствующий потенциал φ можно получить путем выполнения в формуле (1.4) предельного перехода. Однако удобнее поступить иначе, отыскивая φ в виде

$$\varphi = \operatorname{div} \mathbf{E} \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в (1.3), получим для $\mathbf{E}$ уравнение

$$\nabla^2 \mathbf{E} - c^{-2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mathbf{D} \tag{1.6}$$

К правой части (1.6) может быть добавлен произвольный соленоидальный вектор, который не влияет на φ и потому полагается равным нулю. Уравнение (1.6), как и (1.3), следует решать при нулевых начальных условиях $\mathbf{E}|_{t=0} = 0$, $\partial \mathbf{E} / dt|_{t=0} = 0$, что дает для $\mathbf{E}$ выражение

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t_0) = \iiint\limits_{l<ct_0} \frac{1}{4\pi l} \mathbf{D}\left(\mathbf{r}, t_0 - \frac{l}{c}\right) dK \tag{1.7}$$

Формула (1.7) справедлива для функций $\mathbf{D}$, имеющих разрывы первого рода, и позволяет совместно с (1.5) находить соответствующий потенциал φ.

Можно указать и другой способ построения течений при разрывных полях импульсов $\mathbf{D}$, основанный на переходе от потенциала скоростей φ к потенциалу смещений φ^s, связанному с φ соотношением $\varphi = \partial\varphi^s / \partial t$. Для φ^s справедливо уравнение (1.3) и формула (1.4) при замене в ней $\mathbf{D}$ на

$$\mathbf{D}^s = \int_0^t \mathbf{D}\, dt,$$

Это ликвидирует разрыв функции $\mathbf{D}^s(\mathbf{r}, t_0 - c^{-1}l)$ на поверхности

$$t_0 - c^{-1}l = 0$$

Подставляя выражение (1.5) в (1.2), получим с учетом векторного тождества $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}] + \nabla^2 \mathbf{E}$ и равенства (1.6), что

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{A} + c^{-2} \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2 \qquad (\mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{E}) \tag{1.8}$$

Формула (1.8) выражает скорости течения газа через вектор — потенциал $\mathbf{A}$. Нетрудно показать, что $\mathbf{A}$ удовлетворяет нулевым начальным условиям и уравнению (1.6), в котором $\mathbf{E}$ заменено на $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$ — на $\mathbf{\Omega}$, где $\mathbf{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{D}$ вследствие (1.2) есть вихрь скорости. Отсюда получаем, что для дифференцируемой функции $\mathbf{D}$

$$\mathbf{A} = \iiint\limits_{l<ct_0} \frac{1}{4\pi l} \mathbf{\Omega}\left(\mathbf{r}, t_0 - \frac{l}{c}\right) dk \tag{1.9}$$

Если функция $\mathbf{D}$ разрывна, то $\mathbf{A}$ определяется как $\operatorname{rot} \mathbf{E}$.

Видно, что и скалярный потенциал φ, и вектор-потенциал $\mathbf{A}$ получаются путем дифференцирования одного и того же «производящего» вектора $\mathbf{E}$. В случае $C \to \infty$ вектор $\mathbf{A}$ согласно (1.9) переходит в известный вектор-потенциал течения несжимаемой жидкости. Интересно отметить, что в случае сжимаемой жидкости по полю вихрей, вообще говоря, нельзя однозначно определить поле скоростей, а по полю вектора $\mathbf{D}$ можно.

2. Рассмотрим течение газа, вызываемое произвольно перемещающейся в нем и деформирующейся линией (несущей нитью). Определим ее движение параметрическим уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, описываемой ей поверхности W и уравнением $\tau(u, v) = t$ формы нити на этой поверхности в момент t. Функции $\mathbf{r}(u, v)$ и $\tau(u, v)$ считаем дважды дифференцируемыми и

соответствующими однократному прохождению нити над каждой точкой поверхности W.

Со стороны нити на газ действует заданное поле нормальных к поверхности W погонных сил $\mathbf{Y}$. Согласно равенству $\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{D}$ одно и то же поле импульсов $\mathbf{D}$ вызывает одинаковые для газа и жидкости поля вихрей. Следовательно, задавая силу $\mathbf{Y}$ в газе посредством формулы Н. Е. Жуковского через циркуляцию Γ присоединенного вихря и скорость $\mathbf{V}$ движения его элемента $\mathbf{Y} = \rho_0 \Gamma \mathbf{V} \times \mathbf{t}$, где $\mathbf{t}$ — орт касательной к нити, будем иметь одинаковое с несжимаемой жидкостью распределение сходящих с нити свободных вихрей.

Вводя вектор $\boldsymbol{\Gamma}(u, v, t)$ импульса массовых сил, передаваемого газу единичной площадкой поверхности W, получим для него выражение

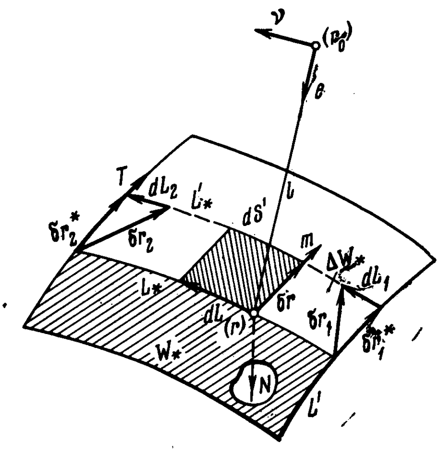
$$\boldsymbol{\Gamma} = \Gamma \mathbf{N} \text{ при } t > \tau(u, v), \qquad \boldsymbol{\Gamma} = 0 \text{ при } t < \tau(u, v) \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{N}$ — вектор нормали к поверхности W, направление которого определяется равенством

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v]\varkappa^{-1} \qquad (\mathbf{r}_u = \partial \mathbf{r} / \partial u,\ \mathbf{r}_v = \partial \mathbf{r} / \partial v,\ \varkappa = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|) \tag{2.2}$$

Производящий вектор $\mathbf{E}$ течения, вызываемого несущей нитью, найдется путем предельного перехода от объемной плотности импульса $\mathbf{D}$ к поверхностной $\boldsymbol{\Gamma}$, так что, полагая в (1.7) $\mathbf{D}dK = \boldsymbol{\Gamma}dS$, получим

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0 t_0) = \iint\limits_{W_*} \frac{1}{4\pi |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} \boldsymbol{\Gamma}\, dS. \tag{2.3}$$



Фиг. 1

Через W_* обозначена «область слышимости» на поверхности W, определяемая условием

$$\Psi(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t_0) \equiv |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| - c[t - \tau(u, v)] \leqslant 0 \tag{2.4}$$

Согласно (2.4) эта область есть геометрическое место точек, из которых успевают дойти до точки $(\mathbf{r}_0)$ к моменту t_0 возбуждаемые несущей нитью звуковые сигналы.

Найдем прирост $\delta\mathbf{E}$ вектора (2.3) при увеличении времени на δt и смещении точки $(\mathbf{r}_0)$ вдоль произвольного единичного вектора $\mathbf{v}$ на δh. Если ΔW_* приращение области W_* при таком варьировании, то

$$\delta \mathbf{E} = \delta h \iint\limits_{W_*} \frac{\boldsymbol{\Gamma} dS}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} + \iint\limits_{\Delta W_*} \frac{\boldsymbol{\Gamma} dS'}{4\pi |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} \tag{2.5}$$

Рассмотрим область ΔW_* (фиг. 1). Пусть L_* — геометрическое место точек поверхности W, находящихся на границе области слышимости. Прирост области W_* происходит за счет смещения линии L_* в новое положение L_*'. Обозначая через $\delta\mathbf{r}$ произвольный вектор, соединяющий бесконечно близкие точки кривых L_* и L_*', напишем для этих кривых уравнения

$$\Psi(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t_0) = 0, \qquad \Psi(\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}\delta h, \mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, t_0 + \delta t) = 0$$

Разность этих равенств

$$\mathbf{v}\delta h \operatorname{grad}_0 \Psi + \delta\mathbf{r} \operatorname{grad} \Psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} \delta t = 0$$

дает после вычисления градиентов по переменным $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$ следующее условие, налагаемое на вектор $\delta\mathbf{r}$

$$\delta\mathbf{r}(\mathbf{e}+\boldsymbol{\mu}) = \delta H \tag{2.6}$$

$$\delta H = \mathbf{e}\mathbf{v}\delta h + c\delta t, \quad \mathbf{e} = (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \,/\, |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|, \quad \boldsymbol{\mu} = c\,\mathrm{Grad}\,\tau(u, v)$$

Вектор $\boldsymbol{\mu}$, выражающийся через поверхностный градиент функции $\tau(u, v)$, направлен вдоль нормальной скорости $\mathbf{V}_n$ движения несущей нити, а по величине обратен числу Маха, подсчитанному по этой скорости. В частном случае (2.6) для векторного элемента $d\mathbf{L}$ линии L_* имеем

$$d\mathbf{L}(\mathbf{e}+\boldsymbol{\mu}) = 0 \tag{2.7}$$

Введем на линии L_* произвольные векторы $\mathbf{m}$, лежащие в касательной к поверхности W плоскости, непрерывно изменяющиеся вдоль L_* и ненаправленные вдоль векторов $\mathbf{t}$, имеющих одинаковые с ними точки приложения. Представляя вектор $\delta\mathbf{r}$ в виде $\delta\mathbf{r} = \eta\mathbf{m} + \zeta\mathbf{N}$ и замечая, что коэффициент ζ имеет порядок η^2, получаем с точностью до членов первого порядка относительно δH

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{m}\delta H\Delta^{-1} \qquad (\Delta = \mathbf{m}\cdot(\mathbf{e}+\boldsymbol{\mu})) \tag{2.8}$$

Элемент площади dS', построенного на векторах $\delta\mathbf{r}$ и $d\mathbf{L}$ параллелограмма (положительный, когда $\delta\mathbf{r}$ направлен во вне области W_*, а $d\mathbf{L}$ при взгляде вдоль $\mathbf{N}$ имеет область W_* слева от своего направления), будет

$$dS' = -\delta H[\mathbf{N}\mathbf{m}d\mathbf{L}]\Delta^{-1} \tag{2.9}$$

Если элементами $d\mathbf{L}$ покрыть кривую L_*, то элементы dS' составят некоторую область $\Delta W_*'$. Разность областей $\Delta W_*'$ *и* ΔW_* имеет порядок $(\delta H)^2$, не влияющий на первый дифференциал $\mathbf{E}$. Поэтому, подставляя (2.9) в (2.5), получим

$$\delta\mathbf{E} = \delta h \iint\limits_{W_*} \frac{\Gamma dS}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\frac{1}{|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}|} - \int\limits_{L_*}\frac{\Gamma(\mathbf{e}\cdot\mathbf{v}\delta h + c\delta t)[\mathbf{N}\mathbf{m}\,d\mathbf{L}]}{4\pi|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}|\Delta} \tag{2.10}$$

Коэффициенты при δh и δt в этом выражении соответственно равны $\partial\mathbf{E}\,/\,\partial\mathbf{v}$ и $\partial\mathbf{E}\,/\,\partial t$.

Вычисляя при помощи (2.10) расходимость вектора $\mathbf{E}$, получим искомое выражение для скалярного потенциала течения, вызываемого произвольно движущейся в газе несущей нитью

$$\varphi(\mathbf{r}_0, t_0) = \iint\limits_{W_*}\frac{\Gamma dS}{4\pi}\frac{\partial}{\partial N}\frac{1}{|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}|} - \int\limits_{L_*}\frac{\Gamma\mathbf{e}[\mathbf{N}\mathbf{m}\,d\mathbf{L}]}{4\pi|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}|\Delta} \tag{2.11}$$

(производная вдоль направления $\mathbf{N}$ взята по координатам точки $(\mathbf{r}_0)$). Выражение (2.11) можно получить также путем предельного перехода в формуле (1.4) к разрывному полю импульсов, заключенному между двумя близкими поверхностями, одна из которых W. При этом φ определится как запаздывающий потенциал сближающихся источников и стоков, расположенных на этих поверхностях. В пределе получится выражение (2.11), которое будет, таким образом, потенциалом двойного слоя запаздывающих источников.

Продолжив любым непрерывным образом функцию $\tau(u, v)$ за пределы поверхности W и определив для точки $(\mathbf{r}_0)$ и момента t_0 объем слышимости K_*, найдем, что вектор $\mathbf{n}_s = \mathrm{grad}\,\Psi \equiv \mathbf{e} + c\,\mathrm{grad}\,\tau$ направлен по внешней по отношению к K_* нормали к поверхности S_*, имеющей уравнение

$\Psi = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| - c[t_0 - \tau(\mathbf{r})]$. Орт $\mathbf{t}$ направлен вдоль линии пересечения поверхностей S_* и W, причем по условию выбора направления $d\mathbf{L}$ имеем $[d\mathbf{L}\mathbf{n}_s\mathbf{N}] > 0$. Следовательно

$$\mathbf{t} = \mathbf{c} / |\mathbf{c}| \qquad (\mathbf{c} = (\mathbf{e} + \boldsymbol{\mu}) \times \mathbf{N}) \tag{2.12}$$

С учетом (2.12), в (2.11) имеем $[\mathbf{N}\mathbf{m}d\mathbf{L}]\Delta^{-1} = -|d\mathbf{L}||\mathbf{c}|^{-1}$. Задавая векторы $\mathbf{m}$ коэффициентами $a(u, v)$, $b(u, v)$ на базисных векторах $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$, можно представить потенциал (2.11) еще в следующем виде:

$$\varphi(\mathbf{r}_0, t_0) = \iint\limits_{W_*} \frac{\Gamma\varkappa du\, dv}{4\pi} \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} - \int\limits_{L_*} \frac{\mathbf{\Gamma}\cdot\mathbf{e}\varkappa(adv - bdu)}{4\pi|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|(Aa + Bb)} \tag{2.13}$$

$$A = \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{e} + c\tau_u, \qquad B = \mathbf{r}_v\cdot\mathbf{e} + c\tau_v$$

Вектор-потенциал $\mathbf{A}$ течения от несущей нити после вычисления $\operatorname{rot}\mathbf{E}$ при помощи (2.10) будет

$$\mathbf{A} = -\iint\limits_{W_*} \frac{dS}{4\pi} \mathbf{\Gamma}\times\operatorname{grad}_0\left(\frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|}\right) - \int\limits_{L_*} \frac{\mathbf{e}\times\mathbf{\Gamma}[\mathbf{N}\mathbf{m}d\mathbf{L}]}{4\pi|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|\Delta} \tag{2.14}$$

Используя интегральную формулу векторного анализа, примыкающую к теореме Стокса

$$\iint\limits_{W_*} \Gamma\operatorname{grad}_0\left(\frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|}\right)\times\mathbf{N}dS = \int\limits_{L_*+L'} \frac{-\Gamma d\mathbf{L}}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} + \iint\limits_{W_*} \frac{(\operatorname{grad}\Gamma)\times\mathbf{N}}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} dS \tag{2.15}$$

где $L_* + L'$ — граница области W_*, можно преобразовать выражение (2.14) к виду

$$\mathbf{A} = \iint\limits_{W_*} \frac{1}{4\pi l} \frac{\partial(\mathbf{r}_*\Gamma)}{\partial(u, v)} du\, dv - \int\limits_{L'} \frac{\Gamma d\mathbf{L}}{4\pi l} + \int\limits_{L_*} \frac{\Gamma d\mathbf{L}^{**}}{4\pi l} \tag{2.16}$$

Здесь через $d\mathbf{L}^{**}$ обозначен векторный элемент, определяемый равенством

$$d\mathbf{L}^{**} = -\frac{[\mathbf{N}\times\boldsymbol{\mu}][\mathbf{N}\mathbf{m}d\mathbf{L}]}{\Delta} \equiv -c\frac{\partial(\tau, \mathbf{r})}{\partial(u, v)} \frac{adv - bdu}{Aa + Bb} \tag{2.17}$$

Вычислим прирост потенциала (2.11) при перемещении точки $(\mathbf{r}_0)$ на вектор $\mathbf{v}\delta h$ и росте времени на δt. Обозначим через φ_1 и φ_2 первое и второе слагаемые (2.11). Прирост $\delta\varphi_1$ подсчитывается точно так же, как прирост $\delta\mathbf{E}$, с тем лишь отличием, что под интегралами вместо $\mathbf{\Gamma} / l$ стоит множитель $\Gamma\partial(l^{-1}) / \partial N$. Таким образом, получим

$$\delta\varphi_1 = \delta h \frac{\partial}{\partial\nu}\left[\iint\limits_{W_*} \frac{\Gamma dS}{4\pi} \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{l}\right)\right]_{w_*=\text{const}} - \int\limits_{L_*} \frac{\Gamma\delta H[\mathbf{N}\mathbf{m}d\mathbf{L}]}{4\pi\Delta} \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{l}\right) \tag{2.18}$$

Коэффициент при δh в первом слагаемом (2.18) равен проекции $v_\nu^* = \mathbf{v}^*\cdot\mathbf{v}$ скорости $\mathbf{v}^*$ течения несжимаемой жидкости, вызванного слоем диполей, распределенных по области W_* с поверхностной интенсивностью $\mathbf{\Gamma}$. Вычисляя эту скорость при помощи формулы Био — Савара, получим

$$\mathbf{v}^* = \iint\limits_{W_*} \frac{1}{4\pi l} \mathbf{e}\times\frac{\partial(\mathbf{r}\Gamma)}{\partial(u, v)} du\, dv - \int\limits_{L_*+L'} \frac{\Gamma\mathbf{e}\times d\mathbf{L}}{4\pi l^2} \tag{2.19}$$

Дифференциал $\delta\varphi_2$ запишем следующим образом:

$$\delta\varphi_2 = -\int_{L_*'}\left\{\frac{\mathbf{\Gamma}\cdot\mathbf{e}[\mathbf{Nm}\,d\mathbf{L}]}{4\pi l\Delta}\right\}' + \int_{L_*}\frac{\mathbf{\Gamma}\cdot\mathbf{e}[\mathbf{Nm}\,d\mathbf{L}]}{4\pi l\Delta}$$

где штрих у подынтегрального выражения показывает, что все величины берутся при приращенных значениях аргументов $\mathbf{r}_0$ и t_0. Выберем конкретное семейство векторов $\delta\mathbf{r}$. Их концы будут лежать на кривой L_*°, совпадающей с L_*' на всем своем протяжении, за исключением, быть может, концов, так как элементы $\delta\mathbf{r}_i$, выходящие из начала $(i=1)$ и конца $(i=2)$ кривой L_*, вообще говоря, не подходят к крайним точкам кривой L_*'. Присоединение к кривой L_*° элементов $d\mathbf{L}_i = (-1)^i(\delta\mathbf{r}_i^* - \delta\mathbf{r}_i)$, где $\delta\mathbf{r}_i^*$ — векторы, соединяющие начальные и конечные точки кривых L_* и L_*', дает множество точек, покрывающих всю кривую L_*'. Отсюда получим

$$\delta\varphi_2 = -\int_{L_*^\circ}\left\{\frac{\mathbf{\Gamma}\cdot\mathbf{e}[\mathbf{Nm}\,d\mathbf{L}]}{4\pi l\Delta}\right\}' + \int_{L_*}\frac{\mathbf{\Gamma}\cdot\mathbf{e}[\mathbf{Nm}\,d\mathbf{L}]}{4\pi l\Delta} - \Big|_{i=1}^{i=2}\frac{\mathbf{\Gamma}\cdot\mathbf{e}[\mathbf{Nm}(\delta\mathbf{r}_i^*-\delta\mathbf{r}_i)]}{4\pi l\Delta} \tag{2.20}$$

где знак подстановки означает суммирование значений стоящей за ней функции в точках начала $(i=1)$ и конца кривой L_*, с переменной знака при $i=1$. Если L_* состоит из ряда кусков, то указанное суммирование производится для каждого из них. Производя в первом интеграле (2.20) замену переменной интегрирования $\mathbf{r}'$ на $\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}$, получим

$$\delta\varphi_2 = -\int_{L_*}\delta'\left\{\frac{\mathbf{\Gamma}\cdot\mathbf{e}[\mathbf{Nm}\,d\mathbf{L}]}{4\pi l\Delta}\right\} - \Big|_{i=1}^{i=2}\frac{\mathbf{\Gamma}\cdot\mathbf{e}[\mathbf{NmT}]\,\delta H}{4\pi l\Delta\mathbf{T}\cdot(\mathbf{e}+\boldsymbol{\mu})} \tag{2.21}$$

Здесь через $\mathbf{T}$ обозначен вектор касательной к границе области W, а символ δ' означает дифференцирование при смещении точек $(\mathbf{r}_0)$ и $(\mathbf{r})$ на векторы $\mathbf{v}\delta h$ и $\delta\mathbf{r}$. Так как величины $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{m}$ и $\boldsymbol{\mu}$ зависят только от положения точки $(\mathbf{r})$, то дифференцируя их по направлению $\mathbf{m}$, находим

$$\delta'\mathbf{\Gamma} = \delta H(a\mathbf{\Gamma}_u + b\mathbf{\Gamma}_v)\Delta^{-1}, \qquad \delta'\mathbf{m} = \delta H(a\mathbf{m}_u + b\mathbf{m}_v)\Delta^{-1},$$
$$\delta'\boldsymbol{\mu} = \delta H(a\boldsymbol{\mu}_u + b\boldsymbol{\mu}_v)\Delta^{-1} \tag{2.22}$$

(Индексы u, v означают частное дифференцирование).

Прирост $\delta'\mathbf{l}$ вектора $\mathbf{l} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ будет $\delta'\mathbf{l} = \delta\mathbf{r} - \mathbf{v}\delta h$, откуда вследствие $\delta' l = \mathbf{e}\cdot\delta'\mathbf{l}$ и $\delta'\mathbf{e} = \delta'(\mathbf{l}/l)$ получим

$$\delta' l = \delta H\mathbf{m}\cdot\mathbf{e}\Delta^{-1} - \mathbf{e}\mathbf{v}\delta h,$$
$$\delta'\mathbf{e} = \delta H[\mathbf{m} - \mathbf{e}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{e})](l\Delta)^{-1} - \delta h[\mathbf{v} - \mathbf{e}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e})] \tag{2.23}$$
$$\delta'\Delta = \delta HM\Delta^{-1} + [E\delta h\mathbf{e}\cdot\mathbf{v} + E'c\delta t]\Delta^{-1} - \mathbf{m}\cdot\mathbf{v}\delta h(l\Delta)^{-1}$$
$$M = a[(\boldsymbol{\mu}\mathbf{m})_u + \mathbf{e}\cdot\mathbf{m}_u] + b[(\boldsymbol{\mu}\mathbf{m})_v + \mathbf{e}\mathbf{m}_v]$$
$$E = \mathbf{m}^2 + (\mathbf{me})(\mathbf{m}\boldsymbol{\mu}), \qquad E' = \mathbf{m}^2 - (\mathbf{em})^2$$

Прирост $\delta' d\mathbf{L}$ элемента $d\mathbf{L}$ при перемещении его точек вдоль векторов $\mathbf{m}$ будет $\delta' d\mathbf{L} = (d\mathbf{L}\cdot\nabla)\delta\mathbf{r}$, отсюда

$$\delta'[\mathbf{Nm}d\mathbf{L}] = \delta H\{[\mathbf{Nn}'d\mathbf{L}] + [\mathbf{Nn}''d\mathbf{L}]\}\Delta^{-1}$$
$$(\mathbf{n}' = (\mathbf{m}\cdot\nabla)\mathbf{m},\ \mathbf{n}'' = (d\mathbf{L}\nabla)\mathbf{m})$$

Вычисляя входящие в это выражение направленные производные от $\mathbf{m}$, получим

$$\delta'[\mathbf{N}\mathbf{m}d\mathbf{L}] = \delta H dp[(a\varkappa)_u + (b\varkappa)_v]\Delta^{-1} \qquad (dp = adv - bdu) \quad (2.24)$$

С помощью (2.22)—(2.24) развернем дифференциал в подынтегральном выражении (2.21). Тогда

$$\delta\varphi_2 = \mathbf{v}\delta h \int\limits_{L_*} \frac{dp}{4\pi l^2\Delta^2}\{[K\mathbf{e} + \mathbf{m}(\Gamma^*\mathbf{e})] + \Gamma^*\Delta\} +$$

$$+ c\delta t \int\limits_{L_*} \frac{K'\,dp}{4\pi l^2\Delta^2} - \Big|_{i=1}^{i=2} \frac{\Gamma^*\mathbf{e}\delta H(a\beta - b\alpha)}{4\pi l\Delta(A\alpha + B\beta)} \quad (2.25)$$

Здесь

$$K = \Gamma^*\cdot\mathbf{e}(E + Ml)\Delta^{-1} - \mathbf{G}\cdot\mathbf{e}l - 2(\Gamma^*\mathbf{e})(\mathbf{m}\mu), \qquad \mathbf{G} = (\Gamma^* a)_u + (\Gamma^* b)_v$$

$$K' = \Gamma^*\cdot\mathbf{e}(E' + Ml)\Delta^{-1} - \mathbf{G}\cdot\mathbf{e}l + 2(\Gamma^*\mathbf{e})(\mathbf{m}\mathbf{e}), \qquad \Gamma^* = \Gamma\varkappa$$

Величины α и β представляют собой коэффициенты вектора $\mathbf{T}$ на базисе $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$. Если уравнение границы области W будет $f(u, v) = \mathrm{const}$, то величина входящего в (2.25) отношения α / β определится из равенства $f_u\alpha + f_v\beta = 0$.

Коэффициент при δh в выражении для $\delta\varphi_1 + \delta\varphi_2$ дает производную $\partial\varphi / \partial\mathbf{v}$, а коэффициент при δt — производную $\partial\varphi / \partial t$. Таким образом, искомые производные от потенциала скоростей найдены.

Отбросив в получающемся из (2.25) выражении для $\partial\varphi / \partial\mathbf{v}$ векторный множитель $\mathbf{v}$, будем иметь искомую скорость $\mathbf{v}$ течения газа, вызываемого произвольно движущейся несущей нитью. Представим эту скорость в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)},$$

$$\mathbf{v}^{(0)} = \iint\limits_{W_*} \frac{1}{4\pi l^2}\mathbf{e}\times\frac{\partial(\mathbf{r}, \Gamma)}{\partial(u, v)}du\,dv - \int\limits_{L'} \frac{\Gamma\mathbf{e}\times d\mathbf{L}}{4\pi l^2}$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = \int\limits_{L_*} \frac{\Gamma\mathbf{e}\times d\mathbf{L}^{**}}{4\pi l^2} \qquad \left(d\mathbf{L}^{**} = -c\frac{\partial(\tau, \mathbf{r})}{\partial(u, v)}\frac{adv - bdu}{Aa + Bb}\right) \quad (2.26)$$

$$\mathbf{v}^{(2)} = \int\limits_{L_*} \frac{adv - bdu}{4\pi l^2\Delta^2}[K\mathbf{e} - \mathbf{m}(\Gamma^*\cdot\mathbf{e})] - \Big|_{i=1}^{i=2} \frac{(\Gamma^*\cdot\mathbf{e})\mathbf{e}[a\beta - b\alpha]}{4\pi l\Delta(A\alpha + B\beta)}$$

Входящий в (2.26) произвольный вектор $\mathbf{m} = a\mathbf{r}_u + b\mathbf{r}_v$ должен удовлетворять на L_* условию $\Delta \equiv Aa + Bb \neq 0$, что выполняется при $a = A$ и $b = B$, если при этом точка $(\mathbf{r}_0)$ не лежит на огибающей звуковых волн. Если можно взять $\mathbf{m} = \mathbf{r}_u$ $(a = 1,\ b = 0)$, то третья формула (2.26) перейдет в следующую:

$$\mathbf{v}^{(2)} = \int\limits_{L_*} \frac{1}{4\pi l^2 A^2}\left\{\frac{\mathbf{e}(\Gamma^*\cdot\mathbf{e})}{A}[\mathbf{r}_u{}^2 + c\tau_u(\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{e}) + l(\mathbf{r}_{uu}\mathbf{e} + c\tau_{uu})] -\right.$$

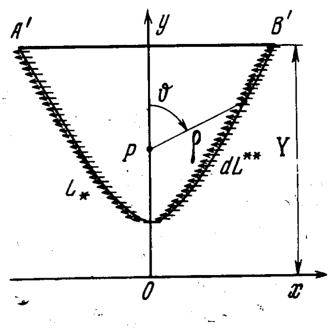
$$\left. - \mathbf{e}(\Gamma_u{}^*\cdot\mathbf{e})l - (\mathbf{r}_u + 2\mathbf{e}c\tau_u)(\Gamma^*\mathbf{e})\right\}dv - \Big|_{i=1}^{i=2} \frac{(\Gamma^*\mathbf{e})\mathbf{e}\beta}{4\pi lA(A\alpha + B\beta)} \quad (2.27)$$

Выражение (2.27) существенно проще (2.26) и будет в то же время вполне общим, так как выбор сетки u, v остается произвольным.

Для давления газа P согласно (1.2), (2.18) и (2.25) получим

$$P = \rho_0 c \int\limits_{L_*} \frac{\mathbf{e}\cdot\Gamma^*\Delta - K'}{4\pi l^2 \Delta^2}(a dv - b du) + \rho_0 c \left.\frac{\mathbf{e}\cdot\Gamma^*\beta}{4\pi l A (A\alpha + B\beta)}\right|_{i=1}^{i=2} \tag{2.28}$$

Формулы (2.26) решают в общем виде задачу нахождения скоростей течения газа, вызываемых в нем несущей нитью, которая может произвольно перемещаться и деформироваться, описывая при движении криволинейную поверхность. Для получения скоростей $\mathbf{v}^{(0)}$ согласно (2.26) на пелене свободных вихрей строится зона слышимости и по формуле Био — Савара определяются скорости от попадающих в нее элементов вихрей. Скорости $\mathbf{v}^{(1)}$ определяются также по формуле Био — Савара, примененной к элементам вихрей $d\mathbf{L}^{**}$, которые распределены вдоль кривой L_*, лежащей на границе области слышимости. Если пелена вихрей плоская и скорости определяются на ней, то $\mathbf{v}^{(2)} \equiv 0$ и указанная выше процедура полностью определяет скорости газа. В общем случае появляется дополнительный член $\mathbf{v}^{(2)}$, определяемый по (2.26) или (2.27). Если $\tau = \text{const}$, что соответствует мгновенному воздействию поверхностного поля давлений на жидкость, то имеем $\mathbf{v}^{(1)} \equiv 0$.



Фиг. 2

Пример. Бесконечная прямолинейная нить интенсивности $\Gamma = \text{const}$ начинает в момент $t = 0$ двигаться по плоскости xy с постоянной дозвуковой скоростью V. Определим скорости газа в точке $P(0, y_0, 0)$ в момент t_0 совмещения нити с осью x. Область слышимости W_* на плоскости xy будет ограничена прямой $y = Vt_0$ и гиперболой L_* с фокусом в точке P, директриссой $y = 0$ и эксцентриситетом $\mu = c / V$ (фиг. 2). Скорости $\mathbf{v}^{(0)}$ вызываются отрезком вихря $A'B'$, а скорости $\mathbf{v}^{(1)}$ — элементами вихрей

$$d\mathbf{L}^{**} = \mathbf{i}\mu\rho(1 - \rho\cos\vartheta)^{-1}d\vartheta$$

распределенными вдоль линии L_* (показаны штрихами). Скорости $\mathbf{v}^{(2)}$ отсутствуют. Интегрирование скоростей от указанных элементов вихрей дает для проекции скорости v_z выражение

$$v_z = \frac{\Gamma}{2\pi y_0}\operatorname{Re}\left(\left(\frac{Y}{Y-y}\right)^2 - M^2\right)^{1/2} \qquad \left(M = \frac{V}{c},\ Y = Vt_0\right)$$

В частном случае стационарного движения ($Y \to \infty$) это выражение совпадает с известным результатом пересчета скоростей на основе преобразования Прандтля — Глауэрта.

Поступило 19 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Prandtl L. Theorie des Flugrengtragflügels im rusammenddrückbaren Medium. Luftfahrtforschung, 1963, Bd 13, Nr. 10.
2. Красильщикова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. М.— Л., Гостехиздат, 1952.
3. Ward G. N. Linearized theory of steady High-speed flow. Cambridge Univ. Press, 1955.
4. Франкль Ф. И. Теория винта с конечным числом лопастей при больших поступательных и окружных скоростях. Тр. ЦАГИ, 1942, № 540.