

К ТЕОРИИ ОТРЫВА ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

В. Я. НЕЙЛАНД

(Москва)

Делается попытка построить метод расчета на основе анализа асимптотического поведения решений уравнений Навье — Стокса при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности и применения известного принципа сращивания асимптотических разложений (например, [1]), представляющих собой решение в разных областях течения. В статье приведены уравнения и краевые условия для первого приближения, метод и результаты численного интегрирования для области, лежащей выше точки отрыва, включая и точку отрыва. Проведено сравнение с экспериментальными данными, а также оценки поправок, соответствующих второму приближению. На основе полученных результатов обсуждается вопрос о пределах применимости приближенных теорий, использующих уравнения пограничного слоя.

1. Рассмотрим обтекание тела сверхзвуковым потоком вязкого газа. Пусть на расстоянии l от передней кромки тела ламинарный пограничный слой отрывается от поверхности. Попытаемся, рассматривая решение уравнений Навье — Стокса при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon = R^{-1/2}$, а R — число Рейнольдса), определить по порядку величины максимальную амплитуду возмущения давления в области безотрывного возмущенного течения, а также размер возмущенной области и распределение функций течения.

Удобно представить уравнения Навье — Стокса в переменных Мизеса, не записывая для краткости в явном виде тех членов, которые не встретятся в дальнейшей части этого раздела

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} - \rho \nu \frac{\partial p}{\partial \psi^*} &= \varepsilon^2 \rho u \frac{\partial}{\partial \psi^*} \left(\rho u \mu \frac{\partial u}{\partial \psi^*} \right) + \dots & (1.1) \\ \rho u \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \psi^*} \right) &= \dots, \quad \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{v}{u}, \quad \frac{\partial n}{\partial \psi^*} = \frac{1}{\rho u} \\ \rho u \frac{\partial h}{\partial x} - u \frac{\partial p}{\partial x} &= \varepsilon^2 \left[\rho u \frac{\partial}{\partial \psi^*} \left(\frac{\rho u \mu}{\sigma} \frac{\partial h}{\partial \psi^*} \right) + \mu \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial \psi^*} \right)^2 \right] + \dots \end{aligned}$$

Здесь все переменные безразмерные; длины отнесены к l ; скорости, давление, энтальпия, плотность, функция тока — к u_0 , ρu_0^2 , u_0^2 , ρ_0 , $\rho_0 u_0 l$ соответственно, а индексом 0 отмечены значения функций в невозмущенном невязком набегающем потоке. Координата x/l отсчитывается вдоль поверхности тела, а nl — расстояние по нормали к ней. Пусть амплитуда возмущения давления $\Delta p = O[\beta(\varepsilon)]$, а длина области $x = O[\lambda(\varepsilon)]$. Если $\beta(\varepsilon) = O(1)$, то течение в первом приближении для области с характерным размером εl описывается уравнениями Эйлера, но тогда из уравнения Бернулли сразу следует, что безотрывного течения с $u > 0$ не существует по крайней мере около поверхности тела. Следовательно, $\beta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Нетрудно видеть, что в этом случае возмущения продольного компонента скорости $\Delta u \sim O(\beta)$ везде, кроме пристеночного слоя, в котором

скорость $u = O(\beta^{1/2})$. В этом подслое $\Delta u \sim u$. Подробнее для течений разрежения аналогичные оценки проведены в работе [2].

Из приведенных выше соображений следует, что для сохранения безотрывного течения необходимо сохранить главные вязкие члены в уравнениях, по крайней мере, для пристеночного слоя, в котором возмущения скорости и невозмущенная скорость имеют одинаковый порядок величины $O(\beta^{1/2})$. Толщина такого подслоя, как это следует из рассмотрения профиля скорости невозмущенного пограничного слоя, есть $O(\varepsilon\beta^{1/2})$.

В основной части пограничного слоя

$$n = O(\varepsilon), \quad v = O(\beta), \quad u = O(1)$$

Следовательно, $(\partial n / \partial x) \sim \beta$. Но, как это следует из уравнений неразрывности, при $\Delta p = O(\beta)$, $\Delta n \sim \varepsilon\beta^{1/2}$ [2]. Это становится очевидным, если вспомнить, что в пристеночном слое с толщиной $O(\varepsilon\beta^{1/2})$ возмущения скорости и невозмущенная скорость одинаковы по порядку величины. Следовательно, возмущения давления распространяются в области с длиной $x = O(\varepsilon\beta^{1/2})$. Приравнявая порядки величин главных вязких и инерционных членов для области $n = O(\varepsilon\beta^{1/2})$, получаем, что $\beta = \varepsilon^{1/2}$.

Таким образом, показано, что при быстром возрастании давления безотрывное течение сохраняется при $\Delta p \leq O(\varepsilon^{1/2})$ в области с длиной $x = O(\varepsilon^{3/4})$.

Используем полученные результаты для получения уравнений и крайних условий при $\varepsilon \rightarrow 0$ из уравнений Навье — Стокса в первом приближении.

Во внешней части пограничного слоя необходимо ввести следующие независимые переменные и асимптотические представления для функций течения

$$x = \varepsilon^{3/4} X, \quad \psi^* = \varepsilon \psi \quad (1.2)$$

$$u(x, \psi^*; \varepsilon) = u_0(X, \psi) + \varepsilon^{1/2} u_1(X, \psi) + \dots, \quad v(x, \psi^*; \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} v_1(X, \psi) + \dots$$

$$n(x, \psi^*; \varepsilon) = \varepsilon n_0(X, \psi) + \varepsilon^{3/4} n_1(X, \psi) + \varepsilon^{3/2} n_2(X, \psi) + \dots$$

$$p(x, \psi^*; \varepsilon) = p_0(X, \psi) + \varepsilon^{1/2} p_1(X, \psi) + \dots, \quad \rho(x, \psi^*; \varepsilon) = \rho_0 + \varepsilon^{1/2} \rho_1(X, \psi) + \dots$$

Подставляя (1.2) в уравнения Навье — Стокса и переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial n_1}{\partial \psi} = 0, \quad p_1 = -\rho_0 u_0 u_1 \\ \frac{\gamma p_0}{p_1} = \frac{\rho_0}{\rho_1}, \quad \frac{\partial n_1}{\partial x} = \frac{v_1}{u_0} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Краевые условия для системы (1.3) получаются из условий срачивания с областью пограничного слоя при $X \rightarrow -\infty$ и внешнего сверхзвукового потока $\psi \rightarrow +\infty$:

$$u_0(X, \psi) \rightarrow u_0(\psi), \quad \rho_0(X, \psi) \rightarrow \rho_0(\psi), \quad p_0(X, \psi) \rightarrow p_0 \quad (1.4)$$

Здесь $u_0(\psi)$, $\rho_0(\psi)$, p_0 соответствуют невозмущенному пограничному слою

$$\sqrt{M_0^2 - 1} p_1(X) = (dn_1 / dX) + \theta, \quad \theta^* = \varepsilon^{1/2} \theta \quad (1.5)$$

Здесь M — число Маха, θ^* — угол наклона поверхности тела.

Отметим, что $p_1(X)$ и $n_1(X)$ не зависят от ψ , что следует из первых двух уравнений (1.3).

Для вязкого подслоя с толщиной $n = O(\varepsilon^{1/4})$ необходимо ввести следующие независимые переменные и асимптотические представления для функций течения:

$$\begin{aligned} u(x, \psi^*; \varepsilon) &= \varepsilon^{1/4} U_1(X, \Psi) + \dots, & v(x, \psi^*; \varepsilon) &= \varepsilon^{3/4} V_1(X, \Psi) + \dots \\ n(x, \psi^*; \varepsilon) &= \varepsilon^{1/4} N_1(X, \Psi) + \dots, & \rho(x, \psi^*; \varepsilon) &= \rho_0(\Psi) + \dots \\ p(x, \psi^*; \varepsilon) &= p_0 + \varepsilon^{1/2} p_1(X, \Psi) + \dots \end{aligned} \quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) в уравнения Навье — Стокса, получим

$$\begin{aligned} \rho_0(0) U_1 \frac{\partial U_1}{\partial X} + \frac{\partial p_1}{\partial X} &= \rho_0^2(0) \mu(0) U_1 \frac{\partial}{\partial \Psi} \left[U_1 \frac{\partial U_1}{\partial \Psi} \right] \\ \frac{\partial p_1}{\partial \Psi} &= 0, & \frac{\partial N_1}{\partial X} &= \frac{V_1}{U_1}, & \frac{\partial N_1}{\partial \Psi} &= \frac{1}{\rho_0(0) U_1} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь $\rho_0(0)$ и $\mu(0)$ — плотность и коэффициент вязкости газа у стенки в невозмущенном пограничном слое, т. е. при $X \rightarrow -\infty$. Ниже будем их обозначать ρ и μ . Краевое условие для $U_1(X, \Psi)$ и $n_1(X)$ получается из сращивания решения во внешней и внутренней области

$$U_1(X, \Psi) \rightarrow \sqrt{2u_0'(0) / \rho} \Psi^{1/2} \quad \text{при } \Psi \rightarrow \infty$$

$$n_1(X) = \lim \left[\int_0^{\Psi} \frac{d\Psi}{\rho U_1} - \sqrt{2/\rho u_0'(0)} \Psi^{1/2} \right] \quad \text{при } \Psi \rightarrow \infty$$

Обозначим $u_0'(0) = a$ и до конца раздела отбросим индекс, обозначающий номер приближения. Удобно систему (1.7) привести к новым переменным

$$\xi = p / \rho a^{1/2} \nu^{3/2}, \quad \eta = (a / \nu)^{1/2} N / \xi^{1/2}, \quad \Psi = \rho a^{1/2} \nu^{2/3} \xi f(\xi, \eta)$$

Тогда уравнения и краевые условия принимают вид

$$f''' = \xi^{1/2} (d\xi/dX) [1 + (1/2)f'^2 - ff''] + \xi^{3/2} (d\xi/dX) (ff' - f'f'') \quad (1.8)$$

$$f = f' = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \quad f'' \rightarrow 1 \quad \text{или } f' \rightarrow \sqrt{2(f+1)} \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty \quad (1.9)$$

$$n(X) = (\nu/a)^{1/2} \xi^{1/2} (\eta - \sqrt{2f}) \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty. \quad (1.10)$$

Здесь штрихами отмечено дифференцирование по η , а точками — по ξ . Поскольку невозмущенному пограничному слою соответствует $\xi = 0$, то начальные условия имеют простой вид

$$f''(0, \eta) = 1, \quad f'(0, \eta) = \eta, \quad f(0, \eta) = \eta^2 / 2 \quad (1.11)$$

Если на длине области взаимодействия поверхность тела не меняет угла наклона, то можно ввести продольную переменную ξ

$$\xi_1 = [2(M_0^2 - 1)^{1/2} \rho a^{1/2} \nu^{3/2} / (\nu/a^{1/2})]^{1/2} \xi$$

Тогда коэффициент $\beta(\xi)$ в уравнении (1.8) принимает вид

$$\beta(\xi_1) = \xi_1^{1/2} (d\xi/dx) = \xi_1^2 / \lim_{\eta \rightarrow \infty} [- (2f)^{1/2} - (-\eta f' + 2\xi_1 f' / (2f))^{1/2}] \quad (1.12)$$

Можно видеть, что в переменных ξ_1, η задача сводится к решению (1.8), (1.12) при начальном условии (1.14) и краевых условиях (1.9). Нигде в эти соотношения не входят M, R и температурный фактор. Они появляются только при переходе на физическую плоскость

$$dX = \left[\frac{g_w [1 + 1/2(\gamma - 1)M_0^2]^{3/2}}{(M_0^2 - 1)^{1/4}} \right] \frac{1}{2^{3/4}(0,332)^{5/4}} \frac{\xi_1^{1/2} d\xi_1}{\beta(\xi_1)}$$

Распределение коэффициента давления определяется по формуле

$$C_p = \xi_1 C_{f_0}^{1/2} / (M_0^2 - 1)^{1/4}$$

где C_{f_0} — коэффициенты сопротивления трения в невозмущенном пограничном слое перед точкой отрыва. Если, например, рассматривать обтекание плоской пластины и считать, что $\mu \sim T^\omega$, то

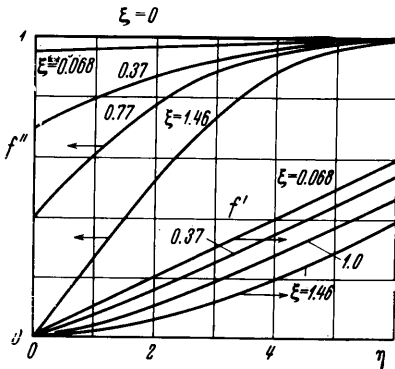
$$C_p = 0.815 (T^*)^{1/4(\omega-1)} \xi_1 / R^{1/4} (M_0^2 - 1)^{1/4} \quad (R - \text{число Рейнольдса}).$$

Такая форма закона подобия прекрасно согласуется с многочисленными экспериментальными данными¹.

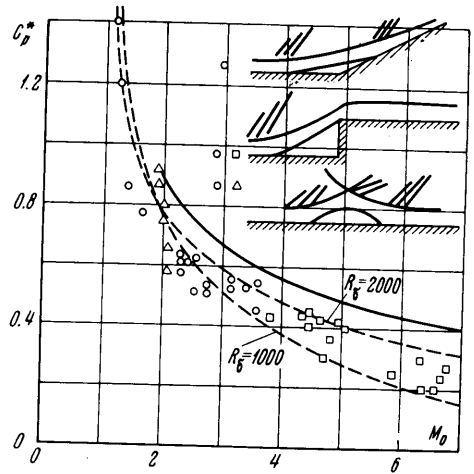
2. Полученная система уравнений и краевых условий допускает простые решения, если задавать зависимость $\beta(\xi)$ и определять какому телу соответствует полученное решение, находя θ_w .

Однако наибольший интерес представляет решение прямой задачи при $\theta_w = 0$, поскольку оно позволяет получить универсальную зависимость функций течения для широкого класса форм тел, не обладающих чрезмерно большой кривизной в окрестности точки отрыва. Численное решение прямой задачи проводилось с использованием конечных разностей для замены производных по ξ в уравнении (1.8).

Весьма полезной оказалась замена переменных $f_1 = f - 1/2\eta^2$. Она позволила избежать потери точности при счете верхней части профиля, что весьма существенно в данной задаче, так как распределение давления индуцируется самим пограничным слоем. Переход с характеристики на характеристику осуществлялся с заданным шагом по $f''(\xi, 0)$. При этом шаг выбран так, чтобы на последней характеристике точно выполнялось условие отрыва $f''(\xi, 0) = 0$. На каждой полосе сначала задавалось предполагаемое значение ξ и подбиралось значение β , обеспечивающее выполнение последнего краевого условия (1.9). Затем заданное значение β сравнивалось с определяемым по формуле



Фиг. 1



Фиг. 2

(1.12). Процедура повторялась при другом значении ξ , пока не достигали совпадения заданного и вычисленного значения β с желаемой точностью.

Полученные в результате численного интегрирования профили скорости и трения в подслое приведены на фиг. 1.

¹ Закон подобия для распределения давления в области свободного взаимодействия установлен в работе [3].

Соответствующие отрывные профили во всем пограничном слое легко можно было бы получить, используя известные формулы определения композитных разложений по внешнему и внутреннему [4]. Они дали бы ответ на вопрос о форме отрывного профиля при данном виде распределения давления, которое, очевидно, соответствует «свободному взаимодействию». Попытки получения вида отрывного профиля делались рядом авторов, правда, только для несжимаемой жидкости, например Гольдштейном, Каплуном, Стюартсоном.

На фиг. 2 проведено сравнение величины коэффициента давления $C_p^* = C_p R^{1/4}$ в точке отрыва, полученного в данной работе (сплошная кривая) и в работе [4] (пунктирные кривые) с экспериментальными данными различных авторов, собранными в работе [2]. В работе [4] использованы интегральные уравнения пограничного слоя в переменных Дородницына — Лиза и профили скорости и энтальпии торможения в виде полиномов четвертой и пятой степени соответственно. Поскольку в таком методе нет точного закона подобия, поэтому приведены две кривые, соответствующие двум крайним возможным значениям толщины пограничного слоя в начале области взаимодействия.

Результаты асимптотической теории первого приближения вполне удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными, но всюду идут несколько выше. Это становится понятным, если вспомнить, что в первом приближении не учитывается изменение толщины вытеснения внешней части сверхзвукового пограничного слоя. В течение сжатия она должна уменьшаться. Нетрудно показать, что эффект дает относительную погрешность порядка $R^{-1/8}$. С ростом числа M он возрастает. Кстати, эта погрешность устанавливает и предел точности, с которой выполняется и сам закон подобия для области течения со свободным взаимодействием.

В отличие от приближенных методов, использование асимптотических разложений позволяет построить следующие приближения. Но даже до завершения численных расчетов второго приближения можно указать на следующие важные выводы: во втором приближении уравнения уже содержат поперечный перепад давлений, а поправка растет по величине с ростом числа M . Это значит, что все выводы, которые делаются относительно свободного взаимодействия с использованием уравнений пограничного слоя, становятся сомнительными. Очевидно также, что для построения самой асимптотической теории, дающей хорошие результаты для больших гиперзвуковых чисел M , нужно строить другое первое приближение, совершая двойной предельный переход $R \rightarrow \infty$ и $M \rightarrow \infty$.

Поступило 2 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
2. Матвеева Н. С., Нейланд В. Я. Ламинарный пограничный слой вблизи угловой точки тела. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4.
3. Charman D. R., Kuehn D. M., Larson H. K. Investigation of separated flows in supersonic and subsonic streams with emphasis on the effect of transition. NASA, TN, 1957, 3869.
4. Елькин Ю. Г., Нейланд В. Я. О расчете характеристик ламинарных зон отрыва. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 5, стр. 812—820.
5. Erdos J., Pallone A. Schock — boundary layer interaction and flow separation. Proc. 1962 Heat Trans. and Fluid Mech. Inst., Stanford Univ. press, 1962.