ВОЛНОВЫЕ РЕЖИМЫ ВОСХОДЯЩЕГО ТЕЧЕНИЯ ТОНКОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ В КОНТАКТЕ С ГАЗОМ

В. Г. СОКОЛОВ

(*Москва*)

Течение жидкости в тонких слоях является одной из гидродинамических проблем химии и теплотехники. Большая поверхность пленок и их малая толщина позволяют ускорить тепловые, диффузионные и химические процессы на границе газ — жидкость.

Теоретические исследования течения жидкости в вертикально падающем тонком слое представлены в работах [1-4]. В данной работе изучаются восходящие волновые течения жидкости в тонком вертикальном слое в контакте с газом, т. е. течения в направлении, противоположном действию силы тяжести, и с учетом воздействия газа на поверхность жидкости. Такие движения встречаются, например, при добыче нефти из пластов, насыщенных газом. На некотором расстоянии от пласта нефть и газ разделяются: газ с большой скоростью движется внутри трубы, занимая значительную ее часть, а жидкость оттесняется к стенкам трубы и образует тонкую пленку. Между нефтью и газом в некоторых случаях возникает волнообразная поверхность раздела, которая движется со скоростью большей чем скорость жидкости, но меньшей чем средняя скорость газа. Аналогичные явления наблюдаются и в скоростных массообменниках.

В работе рассмотрено воздействие газа при его турбулентном и ламинарном течении.

В работах, не учитывающих воздействие газового потока на жидкость, показано, что при длинах волн, возникающих на поверхности пленки, значительно больших средней толщины слоя, движение жидкости в пленке описывается уравнениями пограничного слоя, в которых учтена массовая сила — сила тяжести. Очевидно, с некоторым приближением можно предположить, что и при учете воздействия газа на жидкость течение жидкости описывается теми же уравнениями.

1. Пусть по вертикальной поверхности движется тонкий слой жидкости в направлении, противоположном действию силы тяжести. Ось x_1 направим в сторону течения жидкости и газа, а ось y_1 — перпендикулярно течению. В этой системе координат уравнения движения и неразрывности запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial u_1}{\partial y_1}=-\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2}-g$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial y_1}=0,\qquad \frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}=0 \tag{1.1}$$

Пусть $y_1=h_1(x_1,t_1)$ — уравнение границы раздела и пусть диффузия жидкости в газ и наоборот незначительна, тогда можно написать кинематическое условие

$$v_1=\frac{\partial h_1}{\partial t_1}+u_1\frac{\partial h_1}{\partial x_1} \tag{1.2}$$

Вследствие прилипания жидкости имеем два граничных условия

$$y_1=0,\quad u_1=0,\quad v_1=0 \tag{1.3}$$

Предположим, что на поверхность жидкости действуют давление $p_г$ и касательное напряжение $\tau_г$ со стороны газа и капиллярные силы. Следовательно,

$$y_1=h_1,\quad \rho_1\nu\frac{\partial u_1}{\partial y_1}=\tau_г,\quad p_1=p_2-\sigma\frac{\partial^2 h_1}{\partial x_1^2} \tag{1.4}$$

Здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Перейдем к безразмерным величинам следующим образом:

$$y = \frac{y_1}{h_0}, \quad x = \frac{x_1}{h_0}, \quad t = \frac{u_0}{h_0} t_1, \quad p = \frac{p_1}{\rho_1 u_0^2}$$

$$u = \frac{u_1}{u_0}, \quad v = \frac{v_1}{u_0}, \quad h = \frac{h_1}{h_0}$$

За масштаб длины h_0 принято среднее значение толщины жидкой пленки, масштаб скорости u_0 — средняя по толщине пленки скорость течения жидкости. И если теперь заменить p_1 выражением (1.4) и ввести обозначения

$$R = \frac{h_0 u_0}{\nu}, \quad F = \frac{g h_0}{u_0^2}, \quad N = \frac{\sigma}{h_0 \rho_1 u_0^2}, \quad \tau = \frac{R \tau_{\text{г}}}{\rho_1 u_0^2}, \quad p_0 = \frac{p_{\text{г}}}{\rho_1 u_0^2}$$

то придем к следующей задаче:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p_0}{\partial x} - F + N \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \tag{1.5}$$

$$y = 0, \quad u = 0, \quad v = 0; \quad y = h, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \tau$$

Значения τ и $\partial p_0 / \partial x$ должны быть найдены из условий движения газа.

Будем считать, что течение газа имеет много общего с турбулентным движением несжимаемой жидкости в шероховатых трубах. Примем за стенки трубы, в которой течет газ, твердую границу жидкого слоя, а переменную границу — за шероховатость стенки. И тогда, согласно [5], можем написать

$$\tau_{\text{г}} = \frac{\lambda \rho_{\text{г}} u_{\text{г}}^2}{8}, \quad \frac{\partial p_{\text{г}}}{\partial x_1} = \frac{\lambda \rho_{\text{г}} u_{\text{г}}^2}{4r}, \quad \lambda = \frac{1.32}{(2 - \ln h_1/r)^2}$$

Здесь r — толщина газового потока, $\rho_{\text{г}}$ — плотность и $u_{\text{г}}$ — средняя скорость газа. Роль величины бугорков шероховатости играет h_1, но в отличии от аналогичной величины, приведенной в работе [5], не является постоянной. Положив $h = 1 + \varphi$, где φ представляет собой возмущение поверхности жидкости, подставим в выражение для λ значение $h_1 = h_0 h$ и разложим по степеням φ

$$\lambda = \frac{1.32}{[2 - \ln h_0/r - \ln(1+\varphi)]^2} = \frac{1.32}{(2 - \ln \alpha)^2} + \frac{2.64}{(2 - \ln \alpha)^3} \varphi + \ldots$$

$$\ldots \left(\alpha = \frac{h_0}{r}\right)$$

Для безразмерного касательного напряжения и перепада давления имеем

$$\tau = a + b\varphi + \ldots, \quad \frac{\partial p_0}{\partial x} = -\frac{2\alpha}{R}(a + b\varphi + \ldots)$$

$$a = \frac{0.165 R \rho_{\text{г}} u_{\text{г}}^2}{(2 - \ln \alpha)^2 \rho_1 u_0^2}, \quad b = \frac{0.33 R \rho_{\text{г}} u_{\text{г}}^2}{(2 - \ln \alpha)^3 \rho_1 u_0^2} \tag{1.6}$$

2. Будем рассматривать слой жидкости, не ограниченный вдоль оси x, и искать решения в виде бегущей волны. Тогда характеристики течения будут функциями двух аргументов y и $z = x - ct$, c — скорость волны.

Если ускорение в левой части первого уравнения системы (1.5) заменить его средним значением [6], то это уравнение представится в виде двух равенств

$$N \frac{d^3 h}{\partial z^3} - F - \frac{dp_0}{dz} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G$$

$$G = \frac{1}{h} \int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \frac{1}{h} \frac{d}{dz} \left[\int_0^h (u^2 - cu)\, dy \right]$$

Интегрируя первое из этих равенств, получим

$$u = w(z) \left[\frac{y}{h(z)} - \frac{y^2}{2h^2(z)} \right] + \tau(z) y$$

и подставляя u во второе равенство, придем к уравнению

$$N \frac{d^3 h}{dz^3} + \frac{1}{h} \frac{d}{dz} \left[\frac{cwh}{3} - \frac{2w^2 h}{15} - \frac{5\tau w h^2}{12} + \right.$$
$$\left. + \frac{\tau c h^2}{2} - \frac{\tau^2 h^3}{3} \right] - \frac{w}{Rh^2} - F - \frac{dp_0}{dz} = 0 \qquad (2.1)$$

Из кинематического условия найдем

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{h}{6} (2w + 3\tau h - 6c) \right] = 0$$

Интегрируя и используя условие

$$\int_0^1 u\, dy = 1$$

получаем

$$w = 3c - \frac{3}{2} \tau h + \frac{3}{h} (1 - c) \qquad (2.2)$$

При помощи этого равенства, выражений (1.6), и учитывая, что $h = 1 + \varphi$, можно получить из (2.1) нелинейное третьего порядка уравнение для φ.

Далее будем решать линеаризованную задачу, пренебрегая членами φ^2, $\varphi d\varphi / dz$ и более высокого порядка. Это означает, что рассматриваются волновые поверхности раздела, имеющие небольшие отклонения от некоторого среднего положения и малый наклон. При этих условиях из (2.1) и (2.2) имеем следующее уравнение:

$$\frac{d^3 \varphi}{dz^3} + \frac{A}{N} \frac{d\varphi}{dz} + \frac{B}{NR} \varphi + \frac{D}{NR} = 0 \qquad (2.3)$$

коэффициенты A, B и D не зависят от φ и z

$$A = \frac{1}{120} [144 + 24c(5c - 12) - 6a(1 + c) - 6b - 3a^2 - 2ab]$$

$$B = 9 - 3c + 1.5(b - a) + 2ab$$
$$D = 1.5a - 3 - FR + 2\alpha a$$

Решение этого уравнения будет периодическим, если D и B равны нулю, а коэффициент A больше нуля. Из первого условия получим уравнение для определения α

$$\frac{100}{11s}=\frac{4\alpha+3}{4(2-\ln\alpha)^2}-\frac{100FR}{33s}, \qquad s=\frac{R\rho_{\text{г}}u_{\text{г}}^2}{\rho_1 u_0^2} \tag{2.4}$$

Второе условие, если исключить a и α, дает скорость волны

$$c=3+\left(1+\frac{FR}{3}\right)\frac{8\alpha+3\ln\alpha}{(4\alpha+3)(2-\ln\alpha)} \tag{2.5}$$

При этом значении c коэффициент A можно представить в виде

$$A=ms^2-ns+3$$

$$m=\frac{15\cdot 10^{-5}}{(2-\ln\alpha)^6}(320\alpha^2+45\ln^2\alpha+252\alpha\ln\alpha-24\alpha+15\ln\alpha-30)$$

$$n=\frac{165\cdot 10^{-4}}{(2-\ln\alpha)^3}(5-20\ln\alpha-48\alpha) \tag{2.6}$$

Знак A зависит от знаков n, m и дискриминанта квадратного трехчлена, стоящего в правой части (2.6). Легко видеть, что дискриминант положителен при $0<\alpha<1$. Можно также доказать, что $m(\alpha)$ имеет два положительных корня, меньший из которых $\alpha\approx 0.18$, а функция $m(\alpha)$ при $0<\alpha<0{,}18$ больше нуля. При этих значениях α функция $n(\alpha)$ тоже положительна. Следовательно, при $0<\alpha<0.18$ существуют два числа

$$s_1=\frac{n-\sqrt{n^2-12m}}{2m}, \qquad s_2=\frac{n+\sqrt{n^2-12m}}{2m}$$

оба положительные, такие, что при значениях s, удовлетворяющих условиям $0<s<s_1$ и $s>s_2$, коэффициент A будет положителен.

Таким образом показано, что граница раздела между жидкостью и газом может быть волновой поверхностью, уравнение которой

$$h=1+\beta\sin\left[\sqrt{A/N}(x-ct)\right]$$

Безразмерная скорость этой поверхности (2.5) меньше трех и зависит от отношения средней скорости газа к средней скорости жидкости.

Можно указать и другие соотношения между n, m и s при $\alpha>0.18$, для которых коэффициент A будет положителен. Но рассматривается только случай $0<\alpha<0.18$, так как формулы (1.6) справедливы при малой относительной шероховатости порядка 0.2 — 5%, за величину которой можно принять α.

Здесь рассматривается движение жидкости и газа, происходящее в направлении, противоположном действию силы тяжести. Движение жидкости вызывается перепадом давления, создаваемым в жидкости, и касательным воздействием газового потока на поверхность раздела. Очевидно, что не при всех динамических напорах газа (при фиксированных напорах жидкости) подобные движения возможны; при малых напорах газа жидкость и газ движутся в смешанном виде, и лишь с увеличением напора газа происходит разделение и появляется поверхность раздела. Укажем предел для динамического напора газа, после достижения которого может иметь место волновое движение поверхности раздела. Из формулы (2.4) видно, что правая ее часть должна быть положительна. Подставив R, F и s, получим

$$\rho_{\text{г}}u^2_{\text{г}}>gr\rho_1\frac{400\,\alpha\,(2-\ln\alpha)^2}{33\,(4\alpha+3)}$$

Значение правой части этого неравенства зависит от толщины газового потока r и «относительной шероховатости» α, например, для $\alpha=2\%$ и $r=1$ *см* получим

$$\rho_{\text{г}}u_{\text{г}}^2>27\cdot 10\ \textit{Г}/\textit{см}\cdot\textit{сек}^2$$

При этих значениях скорости число Рейнольдса для газа имеет значение больше 10^4, что совпадает с порядком чисел Рейнольдса, при которых осуществляется режим развитой шероховатости и для которых получены формулы (1.6) [5]. Суть этого режима заключается в том, что происходит отрывное обтекание бугорков шероховатости, а это приводит к тому, что сопротивление не зависит от рейнольдсова числа, но зависит от относительной шероховатости и пропорционально скоростному напору. Как известно, такие явления имеют место при обтекании плохо обтекаемых тел, например, при отрывном обтекании пластинки.

3. Кроме режима развитой шероховатости могут осуществляться и другие режимы течения газа [5]. При этих режимах, включая и турбулентное течение, происходит плавное обтекание бугорков шероховатости и коэффициент сопротивления λ не зависит от высоты бугорков. Следовательно, нужно предположить, что λ не зависит от h_1, а τ и dP_0 / dz не будут функциями φ.

Тогда вместо (2.3) имеем

$$\frac{d^3\varphi}{dz^3} + \frac{A_1}{N}\frac{d\varphi}{dz} + \frac{B_1}{NR}\varphi + \frac{D_1}{NR} = 0$$

$$A_1 = {}^1/_{40}[48 + 40c^2 - 96c - 2\tau c - 2\tau - \tau^2]$$

$$B_1 = 9 - 3c - 1.5\tau, \qquad D_1 = 1.5\tau - 3 - Rdp_0 / dz - FR$$

$$\tau = \mathrm{const}, \qquad dp_0 / dz = \mathrm{const} \tag{3.1}$$

Если положить

$$c = 3 - 0.5\,\tau, \qquad \frac{dp_0}{dz} = \frac{3}{2}\frac{\tau}{R} - \frac{3 + FR}{R} \tag{3.2}$$

то решение уравнения (3.1) будет периодическим при

$$0 < \tau < 2, \qquad \tau > 6$$

Покажем, что эти условия неприемлемы.

По смыслу скорость поверхности раздела не может быть отрицательна, так как газ и жидкость движутся в одном восходящем направлении. Следовательно, $\tau > 6$ не подходит. При $\tau < 2$, заменяя τ через dp_0 / dz и используя (3.2), приходим к

$$RF < 4\alpha \qquad \text{или} \qquad u_0 > \frac{gh_0r}{4\nu}$$

Если 1—10 *см* — порядок изменения r, а 0.1—1 *см* — порядок изменения h_0, то минимальное значение правой части последнего неравенства будет 2500 *см/сек* и $u_0 >$ > 2500 *см/сек*. При этих значениях u_0 и h_0 числа Рейнольдса будут превышать критические значения примерно в 20 раз и нельзя предполагать, что течение жидкости описывается уравнениями (1.1).

Таким образом, при турбулентном и ламинарном течении газа в предположении, что касательное напряжение и перепад давления в газе постоянны и что жидкость и газ движутся раздельно в направлении, противоположном действию силы тяжести — восходящее течение, волновой режим пленки не обнаруживается.

Из решения п.2 видно, что осталась неопределенной амплитуда волны β. Следовательно, характеристики течения содержат параметр, для определения которого, очевидно, нужно решать задачу о развитии течения. когда осуществляется переход от течения смеси к раздельному движению жидкости и газа. При этом более плотная среда движется в тонком слое, прилегающем к неподвижной поверхности, а менее плотная — внутри трубы.

Аналогичным образом можно изучить движение жидкости в падающей пленке в прямотоке и противотоке газа.

Поступило 2 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. ЖЭТФ, 1948, т. 18, вып. 1.
2. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959, стр. 683—688.
3. Маурин Л. Н., Сорокин В. С. О волновом течении тонких слоев вязкой жидкости, ПМТФ, 1962, № 4.
4. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1, стр. 43—51.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., Физматгиз, 1959, стр. 634—639.
6. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехиздат., 1955, стр. 221—223.