

О КОЛЕБАНИЯХ ПРОФИЛЕЙ РШЕТКИ В НЕРАВНОМЕРНОМ ПОТОКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Д. Н. ГОРЕЛОВ

(Новосибирск)

Влияние неравномерности потока на аэродинамические характеристики профилей в решетке исследовалось в работах Г. С. Самойловича [1, 2] и Вайтхеда [3]. В этих работах общая задача разделялась на две независимые задачи: первая — обтекание решетки колеблющихся профилей равномерным потоком жидкости, возмущаемым только рассматриваемой решеткой; вторая — обтекание решетки неподвижных профилей неравномерным потоком. Такое разделение задач возможно в рамках линейной теории, когда неравномерность набегающего на решетку потока и амплитуды колебаний профилей достаточно малы. Однако порядок малости этих двух факторов различен, что в ряде случаев приводит к необходимости учета влияния неравномерности потока на нестационарные аэродинамические характеристики колеблющихся профилей. Решению этой задачи и посвящена данная работа. В частности, показано, что при определенных условиях неравномерность потока может порождать явление параметрического резонанса лопаток турбомашин.

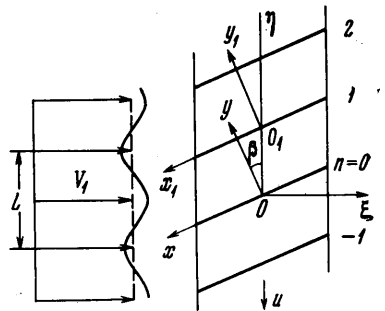
1. Рассмотрим обтекание решетки тонких слабо изогнутых профилей плоским неравномерным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Под неравномерным потоком будем понимать то течение жидкости, которое имело бы место при отсутствии решетки. Предположим, что вектор скорости неравномерного потока задан во всей плоскости течения, мало отличается от некоторого постоянного вектора V_1 и меняется периодически вдоль фронта решетки с некоторым периодом L . Предположим далее, что профили решетки колеблются по заданному гармоническому закону с постоянным сдвигом фазы между колебаниями соседних профилей, а сама решетка перемещается вдоль фронта с постоянной скоростью u . Обозначим через h шаг решетки, c — полухорду профилей, β — угол выноса решетки. Введем декартовы системы координат x_n, y_n , связанные с неколеблющимися профилями решетки. Начало координат поместим в середине n -го профиля ($n = 0, \pm 1, \dots$), ось x_n направим вдоль хорды этого профиля, а ось y_n — вверх. Кроме того, введем систему координат ξ, η , связанную с заданным неравномерным полем скоростей.

В момент $t = 0$ начала обеих систем совпадают; ось η направим вдоль фронта решетки, а ось ξ — перпендикулярно ему (фиг. 1).

Координаты ξ, η и x_n, y_n связаны соотношениями ($n = 0, \pm 1, \dots$)

$$\xi = -x_n \cos \beta - y_n \sin \beta, \quad \eta = -x_n \sin \beta + y_n \cos \beta + nh - ut \quad (1.1)$$

$$x = x_n - nh \sin \beta, \quad y = y_n + nh \cos \beta \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Вектор абсолютной скорости движения жидкости V в системе координат ξ, η представим в виде

$$V = V_1 + v_0 + v_1. \quad (1.3)$$

Здесь v_0 — вектор скорости, определяющий заданную неравномерность поля скоростей¹, а v_1 — вектор скорости движения жидкости, возмущенного решеткой.

Предположим, что возмущенное решеткой движение жидкости потенциально. Тогда вектор v_1 можно представить в виде $v_1 = \text{grad } \varphi$, где $\varphi(x, y, t)$ — потенциал скорости возмущенного решеткой абсолютного движения жидкости в системе координат x, y . Кроме того, будем предполагать, что вектор относительной скорости жидкости составляет малый угол с хордой профилей. Потенциал скорости φ будем искать в виде

$$\varphi(x, y, t) = \varphi_0(x, y, t) + \varphi_1(x, y, t) \quad (1.4)$$

где φ_0 — потенциал скорости возмущенного движения жидкости около решетки, составленной из абсолютно жестких профилей, а φ_1 — дополнительный потенциал скорости, учитывающий колебания профилей решетки.

В дальнейшем будем предполагать, что порядок малости потенциалов φ_0 и φ_1 , как и остальных гидродинамических величин, связанных с ними, предполагается различным, а именно φ_1 имеет более высокий порядок малости, чем φ_0 . Перейдем к определению потенциала скорости φ .

Рассмотрим прежде всего случай, когда профили решетки не колеблются. В этом случае возмущенное течение жидкости оказывается тем не менее нестационарным вследствие перемещения заданного неравномерного поля скоростей относительно решетки. Это приводит к появлению переменной циркуляции скорости вокруг каждого профиля и, как следствие, к образованию нестационарных вихревых следов, сходящихся с выходных кромок профилей.

Сделанные выше предположения позволяют сформулировать в рамках линейной теории следующую задачу для определения φ_0 . Потенциал скорости φ_0 вне решетки пластин $|x_n| \leq c, y_n = 0$ и линий разрыва потенциала скорости $-\infty < x_n < -c, y_n = 0$ ($n = 0, \pm 1, \dots$), схематизирующих вихревые следы, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} = 0 \quad (1.5)$$

условию непротекания жидкости через профили решетки

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = - \left(\alpha_0 + \frac{dF}{dx_n} \right) W_1 - v_{0y} \quad \text{при } |x_n| \leq c, \quad y_n = 0 \quad (1.6)$$

$$(W_1 = |W_1|, \quad W_1 = V_1 - u)$$

условию затухания возмущенных скоростей в бесконечном удалении перед решеткой

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \text{grad } \varphi_0 = 0 \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}) \quad (1.7)$$

условию непрерывности давления при переходе через линии разрыва потенциала скорости

$$\left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - W_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right]_{y_n=+0} = \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - W_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right]_{y_n=-0} \quad (-\infty < x_n < -c) \quad (1.8)$$

¹ Вектор v_0 предполагается не зависящим от t .

и постулату Жуковского о конечности скорости в выходных острых кромках профилей решетки.

Здесь $F(x_n)$ — ордината средней дужки n -го профиля решетки, v_{0y} — проекция вектора v_0 на ось y , $\alpha_0 = W_{1y}/W_{1x}$, а координаты x, y связаны с x_n, y_n соотношениями (1.2).

Рассмотрим подробнее выражение для v_{0y} . Обозначим через $v_{0\xi}(\xi, \eta)$ и $v_{0\eta}(\xi, \eta)$ соответственно осевую и окружную составляющие скорости заданного неравномерного поля скоростей в рассматриваемом цилиндрическом сечении осевой турбомашинны. Так как по предположению $v_{0\xi}$ и $v_{0\eta}$ являются периодическими функциями переменной η с некоторым периодом L , то их можно представить рядами Фурье вида

$$v_{0r}(\xi, \eta) = W_1 \sum_{m=0}^{\infty} \left[a_{rm}(\xi) \cos \frac{2m\pi\eta}{L} + b_{rm}(\xi) \sin \frac{2m\pi\eta}{L} \right] \quad (r = \xi, \eta) \quad (1.9)$$

$$a_{rm}(\xi) = \frac{2 - \delta_{0m}}{W_1 L} \int_0^L v_{0r}(\xi, \eta) \cos \frac{2m\pi\eta}{L} d\eta \quad (1.10)$$

$$b_{rm}(\xi) = \frac{2}{W_1 L} \int_0^L v_{0r}(\xi, \eta) \sin \frac{2m\pi\eta}{L} d\eta$$

$$(\delta_{00} = 1, \delta_{0m} = 0 \text{ при } m \neq 0).$$

Составляющая вектора v_0 на ось y равна по определению

$$v_{0y}(\xi, \eta) = -v_{0\xi} \sin \beta + v_{0\eta} \cos \beta \quad (1.11)$$

Отсюда в соответствии с выражениями (1.1), (1.9), (1.10) значения функции v_{0y} в точках n -го профиля ($y_n = 0, |x_n| \leq c$) можно представить в виде

$$v_{0y}(x_n, t) = -W_1 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} A_m(x_n) e^{j(m\Omega t + n\mu_m)} \right\} \quad (1.12)$$

где

$$A_m(x_n) = [A_{\xi m} \sin \beta - A_{\eta m} \cos \beta] \exp \{j(2m\pi x_n \sin \beta / L)\} \quad (1.13)$$

$$A_{rm}(\xi) = a_{rm}(\xi) + j b_{rm}(\xi), \quad \mu_m = -2m\pi h / L, \quad \Omega = 2\pi u / L \quad (1.14)$$

$$(\xi = x_n \cos \beta, r = \xi, \eta, j = \sqrt{-1})$$

Выражение (1.12) позволяет в силу линейности задачи (1.5) — (1.8) искать потенциал скорости φ_0 в виде

$$\varphi_0(x, y, t) = \varphi_0^{(0)}(x, y) + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_0^{(m)}(x, y, t) \quad (1.15)$$

где потенциал $\varphi_0^{(0)}$ описывает стационарное возмущенное движение жидкости около решетки пластин, а $\varphi_0^{(m)}$ — нестационарное периодическое движение с периодом $T_m = 2\pi / m\Omega$ и с соответствующим ему числом Струхала $k_m = m\Omega c / W_1$.

Потенциал скорости $\varphi_0^{(0)}$ удовлетворяет уравнению Лапласа (1.5), условию непротекания жидкости через профили решетки ($n = 0, \pm 1, \dots$)

$$\frac{\partial \varphi_0^{(0)}}{\partial y} = - \left[\alpha_0 + \frac{dF}{dx_n} + A_0(x_n) \right] W_1 \quad \text{при } y_n = 0, |x_n| \leq c \quad (1.16)$$

условию затухания возмущений в бесконечности (1.7) и постулату Жуковского.

Потенциал скорости $\varphi_0^{(m)}$ ($m = 1, 2, \dots$) также удовлетворяет уравнению Лапласа и условиям (1.7), (1.8), включая постулат Жуковского. Граничное условие на пластинах $y_n = 0, |x_n| \leq c$ ($n = 0, \pm 1, \dots$) для $\varphi_0^{(m)}$ в соответствии с формулой (1.12) принимает вид

$$\frac{\partial \varphi_0^{(m)}}{\partial y} = W_1 \operatorname{Re} \{ A_m(x_n) \exp [j(m\Omega t + n\mu_m)] \} \quad (1.17)$$

Таким образом, задача о движении решетки жестких профилей в неравномерном потоке свелась к решению ряда задач об обтекании однородным потоком решетки, профили которой колеблются по некоторому заданному закону с круговой частотой $m\Omega$ и сдвигом фазы между колебаниями соседних профилей μ_m ($m = 0, 1, \dots$)¹.

Решение этих задач хорошо известно. В частности, решая задачи (1.5) — (1.8), (1.15) — (1.17) методом, изложенным в работе [4], для перепада гидродинамического давления в точках исходного профиля решетки ($n = 0$) получим выражение

$$\Delta p = p(x, +0, t) - p(x, -0, t) = \frac{1}{2} \rho W_1^2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=0} e^{jm\Omega t} p_m(\psi) \right\} \quad (1.18)$$

где

$$p_m(\psi) = \frac{2}{\sin \psi} \left\{ (\theta_{m0} - \theta_{m1} + \vartheta_{m0} - \vartheta_{m1}) [(1 + \cos \psi) C(k_m) - \cos \psi] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (\theta_{m, n-1} - \theta_{m, n+1} + \vartheta_{m, n-1} + \vartheta_{m, n+1}) \left[\cos n\psi + \frac{jk_m}{n} \sin \psi \sin n\psi \right] \right\} \\ \psi = \arccos(x/c) \quad (1.19)$$

Здесь ρ — плотность жидкости, $C(k_m)$ — функция Теодорсена, θ_{mr} — коэффициенты Фурье заданной функции

$$\delta_{0m} \left(\alpha_0 + \frac{dF}{dx} \right) + A_m(x) = \frac{1}{2} \theta_{m0} + \sum_{r=1}^{\infty} \theta_{mr} \cos r\psi \quad (1.20)$$

а коэффициенты $\vartheta_{m0}, \vartheta_{m1}, \dots$ учитывают аэродинамическую интерференцию профилей решетки и определяются в результате решения соответствующей задачи. Алгоритм определения коэффициентов $\vartheta_{m0}, \vartheta_{m1}, \dots$ построен в работе [4].

2. Перейдем к рассмотрению общего случая, когда профили решетки совершают малые гармонические колебания по заданному закону с постоянным сдвигом фазы между колебаниями соседних профилей.

В рамках линейной теории задача об определении дополнительного потенциала скорости φ_1 формулируется аналогично задаче (1.5) — (1.8), но с другим условием непротекания через профили. Рассмотрим это условие более подробно.

¹ Соответствующие задачи должны решаться без учета эффекта смещения.

В соответствии с основными положениями теории тонкого крыла условие непротекания жидкости через n -й профиль можно записать в виде

$$\left\{ W_1 + v_0 + \frac{1}{2} \text{grad}(\varphi_+ + \varphi_-) \right\} \mathbf{v}^\circ = \frac{\partial \varepsilon^{(n)}}{\partial t} \quad \text{при } |x_n| \leq c, \quad y_n = Y^{(n)} \quad (2.1)$$

$$(Y^{(n)} = F + \varepsilon^{(n)}) \quad (n = 0, \pm 1, \dots)$$

Здесь $Y^{(n)}(x_n, t)$ — ордината средней дужки n -го профиля, $\varepsilon^{(n)}(x_n, t)$ — деформация средней дужки в направлении нормали, \mathbf{v}° — орт нормали к этой дужке, а φ_+, φ_- — значения потенциала скорости при подходе к средней дужке сверху и снизу соответственно. Следует отметить, что при сделанных предположениях о характере колебаний профилей решетки

$$\varepsilon^{(n)}(x_n, t) = \text{Re} \{ cf(x_n) q(t) e^{jn\mu} \} \quad (2.2)$$

Здесь $f(x)$ — форма колебаний исходного профиля ($n = 0$), μ — сдвиг фазы между колебаниями соседних профилей решетки, $q(t)$ — безразмерная обобщенная координата, которая с точностью до постоянной равна $e^{j\omega t}$, а ω — круговая частота колебаний профилей.

При колебаниях профиля орт \mathbf{v}° связан с координатными ортами $\mathbf{x}^\circ, \mathbf{y}^\circ$ соотношением

$$\mathbf{v}^\circ = \mathbf{y}^\circ - \alpha \mathbf{x}^\circ \quad (\alpha = \partial Y^{(n)} / \partial x_n) \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.1) и пренебрегая произведением малых величин, получаем

$$(\alpha_0 + \alpha) W_1 + v_{0y} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_+ + \varphi_-) = \frac{\partial \varepsilon^{(n)}}{\partial t} \quad \text{при } |x_n| \leq c \quad y_n = Y^{(n)} \quad (2.4)$$

Условие (2.4) записано на подвижной границе, что затрудняет практическое его применение. Поэтому целесообразно записать условие (2.4) для точек неподвижного отрезка $|x_n| \leq c, y_n = 0$ ($n = 0, \pm 1, \dots$). Применяя формулу Тейлора, имеем

$$[v_{0y}]_{y_n=Y^{(n)}} = \left[v_{0y} + \frac{\partial v_{0y}}{\partial y} Y^{(n)} \right]_{y_n=0} \quad (2.5)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} (\varphi_+ + \varphi_-) \right]_{y_n=Y^{(n)}} = \left[\frac{\partial}{\partial y} (\varphi_+ + \varphi_-) + Y^{(n)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\varphi_+ + \varphi_-) \right]_{y_n=0}$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial y} (\varphi_+ + \varphi_-) = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\varphi_+ + \varphi_-) = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_+}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_-}{\partial x} \right) = - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)_* + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)_* \right]$$

Здесь звездочками обозначают средние скорости возмущенного движения жидкости вдоль пластины $|x_n| \leq c, y_n = 0$.

В случае обтекания одиночной пластины решение задачи в рамках теории тонкого крыла дает

$$\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)_* = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)_* = 0$$

При обтекании же решетки пластин эти скорости в общем случае отличны от нуля, так как вследствие влияния других профилей, особенно для решетки с выносом, возникает несимметричность течения жидкости.

В соответствии с предположением о порядке малости потенциалов скорости φ_0 и φ_1 при определении φ_1 будем удерживать члены не только порядка $\varepsilon^{(n)}$, но и порядка $\varepsilon^{(n)}\varphi_0$.

С учетом этих замечаний и выражений (1.4), (2.5) условие (2.4) принимает вид

$$\left(\alpha_0 + \frac{dF}{dx_n} \right) W_1 + v_{0y} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + W_1 \frac{\partial \varepsilon^{(n)}}{\partial x_n} + \left[\frac{\partial v_{0y}}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} \right)_* \right] \varepsilon^{(n)} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon^{(n)}}{\partial t} \quad \text{при } |x_n| \leq c, y_n = 0 \quad (2.6)$$

В частном случае неподвижных профилей ($\varepsilon^{(n)} = 0$) условие (2.6) принимает вид (1.6). Таким образом, для потенциала скорости φ_1 граничное условие на профилях решетки имеет вид

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon^{(n)}}{\partial t} - W_1 \frac{\partial \varepsilon^{(n)}}{\partial x_n} - \left[\frac{\partial v_{0y}}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} \right)_* \right] \varepsilon^{(n)} \quad \text{при } |x_n| \leq c, y_n = 0 \quad (n = 0 \pm 1, \dots) \quad (2.7)$$

Первые два члена в правой части выражения (2.7) соответствуют условию непротекания жидкости через профиль, обтекаемый равномерным потоком. Третье слагаемое определяет влияние неравномерности потока на нестационарные аэродинамические характеристики колеблющегося профиля.

Выражения (1.9) — (1.14), (1.15), (2.2) и условие (2.7) позволяют сделать вывод, что потенциал скорости

$$\varphi_1(x, y, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi_1^{(m)}(x, y) e^{j(m\Omega + \omega)t} \quad (2.8)$$

где $\Phi_1^{(m)}(x, y)$ — некоторая функция координат, определяемая в результате решения соответствующей краевой задачи и зависящая от геометрических параметров решетки, закона колебаний профилей и заданного неравномерного поля скоростей.

Перепад гидродинамического давления, действующего на профили решетки, определяется уравнением Коши — Лагранжа¹

$$\Delta p(x_n, t) = -2\rho \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + W_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v_{0x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right] \quad (2.9)$$

где потенциал скорости φ определяется формулами (1.4), (1.15) и (2.8).

С учетом формул (1.18), (2.2), (2.8) и (2.9) перепад давления $\Delta p(x, t)$ в точках исходного профиля ($n = 0$) в общем случае обтекания решетки колеблющихся профилей неравномерным потоком имеет вид

$$\Delta p(x, t) = \frac{1}{2} \rho W_1^2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} p_m e^{jm\Omega t} + q_0 \left[p_0^{(0)} e^{j\omega t} + \sum_{m=1}^{\infty} \{ p_m^{(1)} e^{j\omega_m^{(1)} t} + p_m^{(2)} e^{j\omega_m^{(2)} t} \} \right] \right\} \quad (2.10)$$

$$q = \operatorname{Re} \{ q_0 e^{j\omega t} \}, \quad \omega_m^{(1)} = \omega + m\Omega, \quad \omega_m^{(2)} = \omega - m\Omega \quad (2.11)$$

Здесь $p_m, p_m^{(1)}, p_m^{(2)}$ и $p_0^{(0)}$ — безразмерные комплексные функции координаты x , вид которых определяется при конкретном решении задачи.

¹ В рамках принятых допущений в выражении (2.9) следует учитывать лишь члены порядка $\varepsilon^{(n)}, v_{0x}$ и $\varepsilon^{(n)}v_{0x}$.

В частности, функция p_m определяется формулой (1.19), в которой при $m < 0$ следует учесть, что вещественная часть функции Теодорсена $S(k_m)$ будет четной функцией от аргумента, а мнимая — нечетной. Аналогичным образом при соответствующем выборе функций $A_m(x)$ определяются и $p_m^{(1)}$, $p_m^{(2)}$, $p_0^{(0)}$.

Таким образом, при движении решетки колеблющихся профилей через неравномерное поле скоростей гидродинамическое давление в точках профилей будет суммой функций, меняющихся с течением времени гармонически с частотами ω , $m\Omega$, $\omega_m^{(1)}$ и $\omega_m^{(2)}$ ($m = 1, 2, \dots$). При этом часть давления, меняющаяся с частотой ω ($p_0^{(0)}$), соответствует обтеканию решетки равномерным потоком жидкости, имеющим в бесконечном удалении постоянную скорость W_1 . Другая часть давления, меняющаяся с частотами $m\Omega$ (p_m и p_{-m}), определяет возмущающие силы, действующие со стороны неравномерного потока на лопатки. Профили при этом предполагаются жесткими. Взаимное влияние неравномерности поля скоростей и закона колебаний профилей решетки учитывается частями давления $p_m^{(1)}$ и $p_m^{(2)}$, меняющимися с частотами $\omega_m^{(1)}$ и $\omega_m^{(2)}$ соответственно. Это обстоятельство, как будет показано в следующем пункте, может качественно изменить характер колебаний профилей в неравномерном потоке по сравнению с колебаниями тех же профилей в равномерном потоке.

3. До сих пор предполагалось, что профили колеблются по некоторому заданному гармоническому закону. Однако действительный закон колебаний лопаток турбомашин оказывается заранее неизвестным и, как правило, негармоническим. Тем не менее выражение (2.10) для перепада давления можно использовать для расчета закона движения упругой лопатки, так как вблизи наиболее интересных режимов амплитуды колебаний мало изменяются за цикл колебаний, что позволяет применять гипотезу гармоничности. По этой гипотезе, которая широко применяется в аэроупругости, функции p_m , $p_0^{(0)}$, $p_m^{(1)}$ и $p_m^{(2)}$ считаются для случая гармонических колебаний профилей, а негармоничность колебаний учитывается только обобщенной координатой $q(t)$.

Предположим, что перечисленные условия имеют место. Представим кинетическую и потенциальную энергию колеблющейся лопатки в виде ¹

$$T = \frac{1}{2} M c^2 \dot{q}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} M c^2 \omega_c^2 q^2 \quad (3.1)$$

где коэффициент M учитывает распределение масс и форму колебаний лопатки, а ω_c — собственная частота колебаний лопаток. Обобщенная сила, в которую включены силы механического демпфирования и аэродинамические силы, действующие на колеблющуюся лопатку, определяется равенством

$$Q = -2M c^2 d_0 \dot{q} - l c k \int_{-c}^{+c} \Delta p(x, t) f(x) dx \quad (3.2)$$

Здесь l — длина лопатки; Δp , c и f — перепад гидродинамического давления, полухорда и форма колебаний лопатки в некотором выбранном поперечном сечении; k — коэффициент, учитывающий изменение Δp , c и f вдоль лопатки, а коэффициент d_0 учитывает силы механического демпфирования.

В соответствии с гипотезой гармоничности и формулой (2.10)

$$Q = -2M c^2 d_0 \dot{q} - 2\rho W_1^2 l c^2 k \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} Q_m e^{jm\Omega t} + \right. \\ \left. + q_0 \left[Q_0^{(0)} e^{j\omega t} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ Q_m^{(1)} e^{j\omega_m^{(1)} t} + Q_m^{(2)} e^{j\omega_m^{(2)} t} \right\} \right] \right\} \quad (3.3)$$

где

$$Q_m = \frac{1}{4c} \int_{-c}^{+c} p_m(x) f(x) dx, \quad Q_m^{(r)} = \frac{1}{4c} \int_{-c}^{+c} p_m^{(r)}(x) f(x) dx \quad (r = 0, 1, 2) \quad (3.4)$$

¹ Предполагается, что все лопатки идентичны, а каждая лопатка имеет только одну степень свободы.

Введем вещественные коэффициенты

$$\begin{aligned} f_{m1} &= \operatorname{Re}(Q_m + Q_{-m}), & b_{m1} + j d_{m1} &= Q_m^{(1)} + Q_m^{(2)}, & b_{01} + j d_{01} &= Q_0^{(0)} \\ f_{m2} &= \operatorname{Im}(-Q_m + Q_{-m}), & d_{m2} - j b_{m2} &= Q_m^{(1)} - Q_m^{(2)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Тогда выражение (3.3) с учетом равенств $q = q_0 \cos \omega t$, $\dot{q} = -\omega q_0 \sin \omega t$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} Q &= -2Mc^2 d_0 q' - 2\rho W_1^2 c^2 l k \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left[f_{m1} + b_{m1} q + \frac{1}{\omega} d_{m1} q' \right] \cos(m\Omega t) + \right. \\ &\quad \left. + \left[f_{m2} + b_{m2} q + \frac{1}{\omega} d_{m2} q' \right] \sin(m\Omega t) \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

В рассматриваемом случае уравнения движения лопаток сводятся к одному уравнению

$$\ddot{q} + \Psi_1(t) \dot{q} + \Psi_0(t) = f(t) \quad (3.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Psi_1(t) &= 2(d_0 + \gamma \omega d_{01}) + 2\gamma \omega \sum_{m=1}^{\infty} [d_{m1} \cos(m\Omega t) + d_{m2} \sin(m\Omega t)] \\ \Psi_0(t) &= \omega^2 \left\{ \left(\frac{\omega c}{\omega} \right)^2 + 2\gamma b_{01} + 2\gamma \sum_{m=1}^{\infty} [b_{m1} \cos(m\Omega t) + b_{m2} \sin(m\Omega t)] \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\gamma \omega^2 \left\{ f_{01} + \sum_{m=1}^{\infty} [f_{m1} \cos(m\Omega t) + f_{m2} \sin(m\Omega t)] \right\} \\ &\quad (\gamma = \rho W_1^2 l k / M \omega^2) \end{aligned}$$

Общее решение уравнения (3.7) имеет вид

$$q(t) = A q_1 + B q_2 + \left[-q_1 \int \frac{q_2 f dt}{q_1 q_2' - q_1' q_2} + q_2 \int \frac{q_1 f dt}{q_1 q_2' - q_1' q_2} \right] \quad (3.9)$$

где q_1, q_2 — фундаментальные решения однородного уравнения

$$\ddot{q} + \Psi_1(t) \dot{q} + \Psi_0(t) q = 0 \quad (3.10)$$

а A, B — произвольные постоянные.

Уравнение (3.10) с помощью подстановки

$$q(t) = w(t) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int \Psi_1(t) dt \right\} \quad (3.11)$$

сводится к уравнению Хилла [5]

$$\ddot{w} + \Phi(t) w = 0, \quad \Phi(t) = \Psi_0 - 1/2 \Psi_1' - 1/4 \Psi_1^2 \quad (3.12)$$

Здесь $\Phi(t)$ — периодическая функция с периодом.

Фундаментальные решения уравнения Хилла имеют вид [5]

$$w_r(t) = e^{\lambda_r t} X_r(t) \quad (r = 1, 2) \quad (3.13)$$

Здесь X_1, X_2 — периодические функции с периодом $2\pi / \Omega$, а λ_1, λ_2 — характеристические показатели, которые будут комплексными.

В соответствии с (3.8)

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} \int \Psi_1(t) dt \right\} = \sigma(t) \exp \{ -(d_0 + \gamma \omega d_{01}) t \} \quad (3.14)$$

где функция

$$\sigma(t) = \exp \left\{ -\gamma \omega \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\Omega} [d_{m1} \sin(m\Omega t) - d_{m2} \cos(m\Omega t)] \right\} \quad (3.15)$$

Таким образом, фундаментальное решение однородного уравнения (3.10) имеет вид

$$q_r(t) = \sigma(t) X_r(t) \exp \{ (\lambda_r - d_0 - \gamma \omega d_{01}) t \} \quad (r = 1, 2) \quad (3.16)$$

В частном случае обтекания решетки пластин равномерным потоком, когда $\Omega = 0$, функции $\sigma(t), X_1, X_2$ вырождаются в константы, а $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$.

В неравномерном потоке закон колебаний профилей, определяемый формулой (3.17), может быть весьма сложным, а при определенных значениях параметров может возникнуть явление параметрического резонанса¹. Для определенности в дальнейшем будем рассматривать наиболее интересный для практических приложений случай, когда неравномерность поля скоростей набегающего на решетку потока меняется гармонически с частотой $m\Omega$, а коэффициент $\gamma \ll 1$ ². В этом случае [6] с точностью до величин первого порядка малости функция

$$\Phi(t) = \omega^2 \left[\left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 + 2\gamma b_{01} + 2\gamma e_m \cos(m\Omega t + \tau_0) \right] \quad (3.17)$$

где

$$e_m = \left[\left(b_{m1} - \frac{m\Omega}{2\omega} d_{m2} \right)^2 + \left(b_{m2} + \frac{m\Omega}{2\omega} d_{m1} \right)^2 \right]^{1/2} = 2 | Q_m^{(2)} | \quad (3.18)$$

$$\tau_0 = \arctg \left\{ \left(b_{m2} + \frac{m\Omega}{2\omega} d_{m1} \right) / \left(b_{m1} - \frac{m\Omega}{2\omega} d_{m2} \right) \right\} \quad (3.19)$$

Введем обозначения

$$\theta_0 = \left(\frac{2\omega}{m\Omega} \right)^2 \left[\left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 + 2\gamma b_{01} \right], \quad \theta_2 = \left(\frac{2\omega}{m\Omega} \right)^2 \gamma e_m \quad (3.20)$$

и новую переменную

$$\tau = 1/2 [m\Omega t - \tau_0]$$

Тогда уравнение (3.12) сведется к хорошо изученному уравнению Матье

$$d^2 w / d\tau^2 + (\theta_0 + 2\theta_2 \cos 2\tau) w = 0. \quad (3.22)$$

Решение этого уравнения удобно искать в виде [5]

$$w(\tau) = e^{\Lambda \tau} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{2r} e^{2jr\tau} \quad \left(\Lambda = \frac{2\lambda}{m\Omega} \right) \quad (3.23)$$

где c_{2r} — постоянные коэффициенты.

В рассматриваемом случае $\theta_0 > 0$, $\theta_2 > 0$ и $\theta_0 \gg 2\theta_2$, что позволяет характеристический показатель Λ определять приближенно как решение уравнения

$$\sin^2 \left(j\Lambda \frac{\pi}{2} \right) = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\theta_0} \right) \left[1 + \frac{\pi \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{\theta_0} \right)}{4 \sqrt{\theta_0}} \frac{\theta_2^2}{1 - \theta_0} \right] \quad (3.24)$$

Для практических приложений важно найти режимы параметрического резонанса, на которых происходит потеря устойчивости колебаний лопаток. При $\theta_2 \ll 1$ эти режимы находятся вблизи значений $\theta_0 = n^2$ ($n = 1, 2, \dots$). Наиболее опасной является область вблизи $\theta_0 = 1$, так как при возрастании n область неустойчивости быстро сужается и механическое демпфирование в состоянии погасить вибрации лопаток. Приближенное решение уравнения (3.24) в предельном случае $\theta_0 \rightarrow 1$ имеет вид

$$\Lambda = \pm (j + 1/2 \theta_2) \quad (3.25)$$

Отсюда следует, что решение уравнения (3.18) при $\theta_0 = 1$ ($\omega_c = m\Omega/2$) становится неустойчивым, если $\theta_2 \neq 0$. Колебания же профиля в соответствии с формулами (3.17), (3.20), (3.25) теряют устойчивость при условии, что логарифмический декремент затухания

$$\delta = 2\pi \{ d_0 / \omega + \gamma (d_{01} - 1/2 e_m) \} \leq 0. \quad (3.26)$$

В равномерном потоке коэффициент $e_m = 0$ и условие (3.26) будет определять область автоколебаний профилей решетки с одной степенью свободы.

¹ Возможность явления параметрического резонанса в турбомашинах высказали впервые Сабатюк и Систо в обзоре [6]. В дальнейшем этот вопрос рассматривал Г. С. Самойлович в работе [2] и пришел к выводу о невозможности возникновения параметрического резонанса профилей решетки, пересекающей в своем движении вихревые кромочные следы, сходящиеся с предшествующей решеткой.

При этом нестационарные аэродинамические силы определялись приближенно (без учета $v_{0x} \partial \varphi_1 / \partial x$ в формуле (2.9)).

² Именно этот случай рассматривал Г. С. Самойлович [2].

Основную роль играет порядок величины коэффициента e_m по сравнению с d_{01} . Параметрический резонанс реален, если $e_m \sim |d_{01}|$, и не реален, если для всех практически интересных случаев $e_m \ll |d_{01}|$. Поэтому важно привести хотя бы один пример расчета, в котором $e_m \sim |d_{01}|$. С этой целью рассмотрим чисто крутильные колебания профилей решетки в потоке, неравномерность поля скоростей которого определяется выражениями

$$v_{0\xi} = W_1 a_{\xi m} \cos(2\pi m \eta / L), \quad v_{0\eta} = 0 \quad (a_{\xi m} = \text{const}) \quad (3.27)$$

где m — целое число, а вектор W_1 направлен вдоль хорды профилей.

Используя результаты работы [4], проведем расчет коэффициентов e_m и d_{01} для случая решетки с густотой $\tau = 1$, углом выноса $\beta = 60^\circ$, ось вращения выбиралась в середине профиля, будем считать, что профили решетки колеблются синфазно ($\mu_m = 0$), а частота колебаний соответствует числу Струхала $k = 0.1$. Тогда получим

$$e_m / d_{01} = 8.06 a_{\xi m} \quad \text{при } \omega = \Omega / 2$$

Так как обычно коэффициент $a_{\xi m} = 0.1 \div 0.2$, то в рассматриваемом случае $e_m \sim d_{01}$. Таким образом, подтверждается реальная возможность параметрического резонанса.

В заключение отметим, что вне узких зон вблизи частот колебаний профилей, кратных $m\Omega/2$, неравномерность потока увеличивает демпфирование колебаний по сравнению с демпфированием их в равномерном потоке.

Поступило 26 IX 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Самойлович Г. С. Неустановившийся вихревой поток вокруг решетки тонких вибрирующих профилей. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
2. Самойлович Г. С. О неустановившихся аэродинамических силах и динамических напряжениях в лопатках при резонансных колебаниях, вызванных вихревыми следами. Изв. АН СССР, ОН, Механика и машиностроение, 1962, № 4.
3. Whitehead D. S. Force and moment coefficients for vibrating aerofoils in cascade. ARC R., M., 1962, No. 3254.
4. Горелов Д. Н., Доминас Л. В. Расчет аэродинамических сил и моментов, действующих на решетку пластин, колеблющихся в плоском потоке несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 3.
5. Мак-Лаклан Н. В. Теория и приложения функций Матье. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
6. Sabatink A., Sisto F. A survey of aerodynamic excitation problems in turbomachines. Trans. ASME, 1956, vol. 78, No. 3.