

ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ ЧАПЛЫГИНА О ВИХРЕВОМ ПОТОКЕ, ОБТЕКАЮЩЕМ ПОЛУЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

А. Г. ЯРМИЦКИЙ

(Днепропетровск)

Исследуется обтекание скошенным потоком плоской поверхности с выступом в виде кругового сегмента. В качестве предельного случая найдена функция тока обтекания таким потоком кругового цилиндра, лежащего на дне. Изучено поведение критических точек в зависимости от степени неоднородности набегающего потока.

Ситуация, близкая к рассматриваемой, возникает при обтекании чечевицеобразного профиля или двух соприкасающихся круговых цилиндров в следе за телом.

Рассматривается также динамическое воздействие скошенного потока на цилиндр, оторвавшийся от дна.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Пусть набегающий поток представляет собой параллельное течение с линейным профилем скорости

$$U = U_0 + \Omega y \quad (1.1)$$

Здесь U_0 — скорость набегающего потока на плоской поверхности; Ω — величина, характеризующая завихренность потока.

Функция тока набегающего потока (с точностью до аддитивной постоянной)

$$\psi_0 = U_0 y + 1/2 \Omega y^2 \quad (1.2)$$

Пусть плоская поверхность имеет деформацию в виде кругового сегмента (выступа или углубления) (фиг. 1).

Рассмотрим задачу об определении функции ψ тока возмущенного течения. Уравнение в граничные условия полной задачи такие:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= \Omega, & \psi &= 0 \text{ на } L \\ \psi &= \psi_0 \text{ на } \infty \end{aligned} \quad (1.3)$$

В силу линейности этой задачи представляется возможным исклю-

чить из рассмотрения обтекание выступа (углубления) однородной частью набегающего потока. Такая задача исследована в [1]. Поэтому в дальнейшем под ψ будем понимать функцию тока чисто вихревой части рассматриваемого течения, так что $\psi_0 = 1/2 \Omega y^2$.

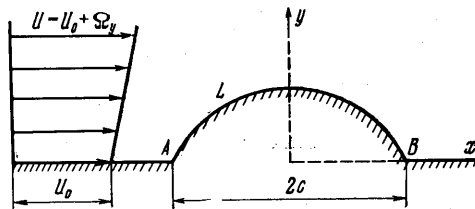
Решение задачи (1.3) будем искать в виде

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \quad (1.4)$$

где ψ_1 — функция тока возмущающего течения, обусловленная деформацией плоской поверхности.

Так как ψ_0 есть частное решение задачи (1.3), соответствующее вихревой части набегающего потока, то нетрудно убедиться, что возмущающий поток будет безвихревым. Комплексный потенциал w_1 этого потока удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\nabla^2 w_1 = 0, \quad \text{Im } w_1 = 1/8 \Omega (z - \bar{z})^2 \text{ на } L, \quad \text{Im } w_1 = 0 \text{ на } \infty \quad (1.5)$$



Фиг. 1

Для решения поставленной задачи перейдем к биполярным координатам ξ, η ; при этом примем следующую связь между комплексной переменной z и переменной $\zeta = \xi + i\eta$

$$z = ic \operatorname{ctg}^{1/2} \zeta \quad (1.6)$$

Такой выбор координат позволяет уравнения

$$\begin{aligned} \xi &= 0, & \xi &= \xi_0 = 1/2\pi n \\ \xi &= \xi_0 = -1/2\pi n & (0 < n < 2) \end{aligned}$$

первое соответствует недеформированной, плоской части поверхности, второе — поверхности выступа и третье — поверхности углубления.

При этом угловые точки A и B поверхности имеют соответственно координаты $\eta = \mp\infty$, ось y соответствует координате $\eta = 0$, бесконечно удаленная точка имеет координаты $\xi = \eta = 0$.

В новой системе координат краевая задача (1.5) принимает вид

$$\nabla^2 w_1 = 0 \quad (1.7)$$

$$\operatorname{Im} w_1 = -1/2\Omega c^2 \frac{\sin^2 \xi_0}{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi_0)^2} \quad (\xi = \xi_0) \quad (1.8)$$

$$\operatorname{Im} w_1 = 0 \quad (\xi = 0), \quad \operatorname{Im} w_1 = 0 \quad (\xi = \eta = 0) \quad (1.9)$$

Для удобства введем в рассмотрение функцию

$$w = -w_1 / \Omega c^2 \quad (1.10)$$

Очевидно, что эта функция должна быть решением краевой задачи (1.7), если первое граничное условие записать в виде

$$\operatorname{Im} w = \frac{\sin^2 \xi_0}{2(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi_0)^2} \quad (\xi = \xi_0) \quad (1.11)$$

2. Определение функции w . Имея в виду четкость краевой задачи (1.7) — (1.9) по переменной η , будем искать ее решение в форме интеграла Фурье [2]

$$\operatorname{Im} w = \int_0^{\infty} [A(m) \operatorname{ch} m\xi + B(m) \operatorname{sh} m\xi] \cos m\eta \, dm \quad (2.1)$$

Первое условие (1.9) приводит к уравнению

$$\int_0^{\infty} A(m) \cos m\eta \, dm = 0$$

из которого в силу произвольности η получим $A(m) = 0$. Легко видеть, что при этом второе условие (1.9) выполняется автоматически. Остается удовлетворить условию (1.8), которое приводит к равенству

$$\int_0^{\infty} B(m) \operatorname{sh} m\xi_0 \cos m\eta \, dm = \frac{\sin^2 \xi_0}{2(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi_0)^2}$$

Для определения коэффициента $B(m)$ применим косинус-преобразование Фурье

$$B(m) = \frac{\sin^2 \xi_0}{\pi \operatorname{sh} m\xi_0} \int_0^{\infty} \frac{\cos m\eta \, d\eta}{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi_0)^2}$$

Замечая, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos m\eta \, d\eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi_0} = \pi \frac{\operatorname{sh} m(\pi - \xi_0)}{\operatorname{sh} m\pi \sin \xi_0}$$

дифференцированием по параметру ξ_0 найдем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{\cos m\eta \, d\eta}{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi_0)^2} = \\ & = \frac{\pi}{\operatorname{sh} m\pi \sin^3 \xi_0} [m \operatorname{ch}(\pi - \xi_0) \sin \xi_0 + \operatorname{sh} m(\pi - \xi_0) \cos \xi_0] \end{aligned}$$

Следовательно,

$$B(m) = \frac{m \operatorname{ch} m(\pi - \xi_0) \sin \xi_0 + \operatorname{sh} m(\pi - \xi_0) \cos \xi_0}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m \xi_0 \sin \xi_0} \quad (2.2)$$

Подставляя полученные значения коэффициентов $A(m)$ и $B(m)$ в интеграл (2.1), найдем окончательное выражение для $\operatorname{Im} w$.

Комплексный потенциал возмущающего потока

$$w_1 = -i\Omega c^2 \int_0^{\infty} B(m) \operatorname{sh} m\zeta \, dm \quad (2.3)$$

В случае обтекания полуцилиндрической поверхности $\xi_0 = 1/2\pi$ и

$$B(m) = \frac{m}{2} c s \operatorname{ch}^2 \frac{m\pi}{2}$$

а следовательно,

$$w_1 = -\frac{1}{2} i\Omega c^2 \int_0^{\infty} m \operatorname{sh} m\zeta c s \operatorname{ch}^2 \frac{m\pi}{2} \, dm$$

Имея в виду соотношение

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} m\zeta}{\operatorname{th} m\xi_0} \, dm = \frac{\pi}{2\xi_0} \sin \frac{\zeta}{\xi_0} \pi \left(\cos \frac{\zeta}{\xi_0} \pi - 1 \right)$$

дифференцированием по параметру ξ_0 найдем

$$\int_0^{\infty} m \frac{\operatorname{sh} m\zeta}{\operatorname{sh}^2 m\xi_0} \, dm = \frac{\pi}{4\xi_0^2} c s c^2 \frac{\pi\zeta}{2\xi_0} \left(\frac{\zeta}{\xi_0} \pi - \sin \frac{\zeta}{\xi_0} \pi \right)$$

Отсюда, подставляя значение $\xi_0 = 1/2\pi$, получаем

$$\int_0^{\infty} m \operatorname{sh} m\zeta c s \operatorname{ch}^2 \frac{m\pi}{2} \, dm = \frac{1}{\pi \sin^2 \zeta} (2\zeta - \sin 2\zeta)$$

Таким образом

$$w_1 = i\Omega \frac{c^2}{\pi} (\operatorname{ctg} \zeta - \zeta \operatorname{csc}^2 \zeta) \quad (2.4)$$

Переходя к переменной z и учитывая, что

$$\zeta = i \ln \frac{z+c}{z-c}, \quad \operatorname{ctg} \zeta = -\frac{i}{2c} \left(z + \frac{c^2}{z} \right)$$

окончательно получим

$$w_1 = \frac{\Omega}{2} \frac{c}{\pi} \left[\left(z + \frac{c^2}{z} \right) - \frac{1}{2c} \left(z - \frac{c^2}{z} \right)^2 \ln \frac{z+c}{z-c} \right] \quad (2.5)$$

Этот результат полностью соответствует [3].

Комплексная скорость возмущенного потока, соответствующего (1.1), в рассматриваемом случае выражается соотношением

$$\bar{v} = U_0 \left[\sec^2 \frac{\xi}{2} + \lambda \frac{\sin \xi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi} + \frac{\lambda}{\pi} \sec^2 \frac{\xi}{2} (1 - \zeta \operatorname{ctg} \zeta) \right] \quad \left(\lambda = \frac{\Omega c}{U_0} \right) \quad (2.6)$$

Здесь λ — параметр, характеризующий степень неоднородности потока. На плоской поверхности ($\xi = 0$)

$$v = U_0 s \operatorname{ch}^2 \frac{\eta}{2} \left[1 + \frac{\lambda}{\pi} (1 - \eta \operatorname{cth} \eta) \right] \quad (2.7)$$

Как показано Чаплыгиным [3], на этой поверхности, кроме точек у подошвы препятствия, существуют еще две критические точки: одна впереди, а другая позади препятствия. На положение критических точек у основания препятствия неоднородность потока влияния не оказывает. Две другие критические точки, зависящие от степени неоднородности потока, определяются корнями выражения в квадратных скобках (2.7)

$$\lambda = \frac{\pi}{\eta_k \operatorname{cth} \eta_k - 1} \quad (2.8)$$

Анализ этого выражения показывает, что критические точки по мере уменьшения неоднородности потока ($\lambda \rightarrow 0$) смещаются к подошве ($\eta_k \rightarrow \pm \infty$), а с увеличением неоднородности ($\lambda \rightarrow \infty$) стремятся к бесконечности ($\eta_k = 0$).

На поверхности полуцилиндра [3]

$$v = 2U_0 \sin \theta \left[1 + \frac{\lambda}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \sin \theta - \cos \theta \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (2.9)$$

где θ — полярный угол точки на этой поверхности.

Корни выражения

$$\lambda = \frac{2\pi}{2 \cos \theta_k \ln \operatorname{ctg}^{1/2} \theta_k - \pi \sin \theta_k - 2} \quad (2.10)$$

определяют две критические точки, симметрично расположенные на рассматриваемой поверхности.

С уменьшением завихренности течения эти точки начинают смещаться к основанию препятствия, а с ее увеличением — к предельным положениям, определяемым углами

$$\theta_k^{(\max)} = 21^\circ 15', 158^\circ 45'$$

3. Обтекание кругового цилиндра, лежащего на плоской поверхности. Комплексный потенциал (2.3), полученный в предыдущем пункте, может быть использован для описания обтекания кругового цилиндра, лежащего на плоской поверхности, (фиг. 2), если на фиг. 1 устремить точку А к точке В (фиг. 2). Аналогичная задача в случае, когда набегающий поток однороден, изучена в работе [1]. Поэтому в силу линейности задачи достаточно рассмотреть обтекание цилиндра чисто вихревой частью набегающего потока.

Поток определяется функцией тока

$$\psi = 1/2 \Omega y^2 + \text{Im } w_1 \quad (3.1)$$

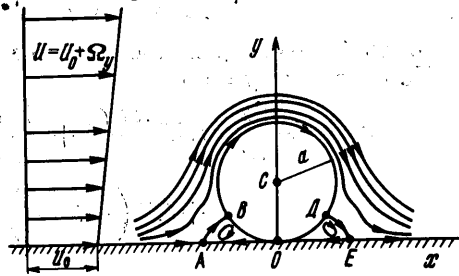
$$w_1 = \frac{1}{2} \Omega a^2 \left\{ \pi \text{cth} \frac{\pi a}{z} - \frac{z}{a} + \frac{i}{2} \left[\Psi' \left(i \frac{a}{z} \right) - \Psi' \left(-i \frac{a}{z} \right) \right] \right\}$$

Здесь a — радиус цилиндра Ψ' — производная от Ψ -функции Эйлера по аргументу.

Действительно, $w_1 \rightarrow 0$ при больших значениях $|z|$. Следовательно, на бесконечности функция тока ψ определяет плоско-параллельный поток с постоянным поперечным градиентом скорости.

Далее, учитывая разложение

$$\begin{aligned} \Psi' \left(i \frac{a}{z} \right) - \Psi' \left(-i \frac{a}{z} \right) &= \\ &= -4i \frac{a}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k^2 + a^2/z^2)^2} \quad (3.2) \end{aligned}$$



Фиг. 2

легко заметить, что функция w принимает действительные значения при $y = 0$, т. е. линия $y = 0$ будет линией тока $\psi = 0$.

Функция тока $\psi = 0$ также и при $2ay = z\bar{z}$. В самом деле функция

$$\text{cth} \frac{\pi a}{z} = \text{cth} \left(\frac{\pi a x}{r^2} - i \frac{\pi a y}{r^2} \right) \quad (r^2 = x^2 + y^2)$$

при $\pi a y / r^2 = \pi / 2$ принимает действительные значения.

Выражение

$$-z/a + 1/2i [\Psi'(ia/z) - \Psi'(-ia/z)] \quad (3.3)$$

при этом имеет вид

$$-\frac{x}{a} - \frac{i}{2} \frac{r^2}{a^2} + \frac{i}{2} \left[\Psi' \left(\frac{1}{2} + i \frac{ax}{r^2} \right) - \Psi' \left(-\frac{1}{2} - i \frac{ax}{r^2} \right) \right] \quad (3.4)$$

Мнимая часть этого выражения

$$-\frac{r^2}{2a^2} + \frac{1}{2} \text{Re} \left[\Psi' \left(\frac{1}{2} + i \frac{ax}{r^2} \right) - \Psi' \left(-\frac{1}{2} + i \frac{ax}{r^2} \right) \right] \quad (3.5)$$

Введем обозначение

$$Z = -\frac{1}{2} + i \frac{ax}{r^2} \quad (3.6)$$

Тогда выражение (3.5) примет вид

$$-r^2 / 2a^2 + 1/2 \text{Re} [\Psi'(Z + 1) - \Psi'(Z)] \quad (3.7)$$

С помощью известного соотношения

$$\Psi(Z + 1) = \Psi(Z) + Z^{-1} \quad (3.8)$$

выражение (3.7) можно упростить, записав его следующим образом:

$$-1/2 [r^2 / a^2 + \text{Re}(1/Z^2)] = -y^2 / a^2 \quad (3.9)$$

Учитывая (3.1), найдем, что $\psi = 0$ при $2ay = r^2$.

Таким образом, линия тока $\psi = 0$ состоит из действительной оси $y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 = 2ay$.

Комплексная скорость возмущенного течения, соответствующая (1.1), может быть записана в виде

$$\bar{v} = U_0 \left\{ \frac{\pi^2 a^2}{z^2} \operatorname{cs} \operatorname{ch}^2 \frac{\pi a}{z} + \frac{\lambda}{2} \left[\frac{2y}{a} + \frac{\pi^2 a^2}{z^2} \operatorname{cs} \operatorname{ch}^2 \frac{\pi a}{z} + \frac{a^2}{2z^2} \left(\Psi'' \left(\frac{ia}{z} \right) + \Psi'' \left(-\frac{ia}{z} \right) \right) - 1 \right] \right\} \quad (3.10)$$

Здесь Ψ'' — вторая производная от Ψ -функции Эйлера по аргументу. На плоскости $y = 0$

$$v = U_0 \frac{\pi^2 a^2}{x^2} \operatorname{cs} \operatorname{sh}^2 \frac{\pi a}{x} \left\{ 1 + \frac{\lambda}{2} \left[1 + \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{sh}^2 \frac{\pi a}{x} \left(\Psi'' \left(i \frac{a}{x} \right) + \Psi'' \left(-i \frac{a}{x} \right) \right) - \frac{x^2}{\pi^2 a^2} \operatorname{sh}^2 \frac{\pi a}{x} \right] \right\} \quad (3.11)$$

Исследование этого выражения показывает, что на рассматриваемой плоскости имеются три критические точки: A , O , E (фиг. 2). В существовании этих точек легко убедиться, используя асимптотическое выражение для второй производной Ψ -функции

$$\Psi''(z) = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z^4} + \frac{1}{6z^6} - \dots$$

$$(|z| \geq 1, |\arg z| \leq \pi - \varepsilon, \varepsilon > 0)$$

Так, замечая, что при $x \rightarrow 0$ выражение в фигурных скобках стремится к $-\infty$, а при возрастающих по абсолютной величине x оно стремится к единице, приходим к выводу о существовании точек A и E . Местоположение этих точек определяется корнями выражения в фигурных скобках (3.11)

(3.12)

$$\lambda = 4\pi^2 a^2 \left\{ 2x_k \operatorname{sh}^2 \frac{\pi a}{x_k} - 2\pi^2 a^2 - a^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\pi a}{x_k} \left[\Psi'' \left(\frac{ia}{x_k} \right) + \Psi'' \left(-\frac{ia}{x_k} \right) \right] \right\}^{-1}$$

Как показывает анализ этого выражения, с уменьшением неоднородности потока ($\lambda \rightarrow 0$) точки A и E смещаются к точке касания цилиндра с плоскостью, а с увеличением неоднородности ($\lambda \rightarrow \infty$) устремляются в бесконечность.

На поверхности цилиндра $z\bar{z} = 2ay$, и согласно (3.10)

$$\bar{v} = U_0 \left\{ \frac{\pi^2 (1+it)^2}{4} \operatorname{sch}^2 \frac{\pi t}{2} + \frac{\lambda}{2} \left[\frac{3-t^2}{1+t^2} + \frac{\pi^2 (1+it)^2}{4} \operatorname{sch}^2 \frac{\pi t}{2} - \frac{1}{8} (1+it)^2 \left(\Psi'' \left(\frac{1+it}{2} \right) + \Psi'' \left(-\frac{1+it}{2} \right) \right) \right] \right\} \quad \left(t = \frac{x}{y} \right) \quad (3.13)$$

Максимальная скорость соответствует верхней точке цилиндра ($x = 0$, $y = 2a$) и имеет величину

$$v_{\max} = U_0 \left\{ \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{2}\lambda \left[3 + \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{8} \left(\Psi'' \left(\frac{1}{2} \right) + \Psi'' \left(-\frac{1}{2} \right) \right) \right] \right\} \quad (3.14)$$

Используя (3.8), найдем

$$\Psi''(-1/2) = \Psi''(1/2) + 16$$

Если учесть еще, что

$$\Psi''(x) = -2 \sum_{k=0}^{\infty} (x+k)^{-3} = -2\zeta(3, x)$$

где $\zeta(3, x)$ — ζ -функция Римана, окончательно получим

$$U_{\max} = U_0 \{ 1/4\pi^2 + 1/2\lambda [1 + 1/4\pi^2 + 1/2\zeta(3, 1/2)] \} \quad (3.15)$$

Положив $\zeta(3, 1/2) \approx 8.3$, имеем

$$v_{\max} \approx (2.5 + 3.8\lambda)U_0$$

Таким образом, по сравнению с потенциальным течением положительная завихренность ($\lambda > 0$) увеличивает максимальную скорость потока на цилиндре.

Отделяя действительную и мнимую части выражения (3.13), вблизи точки касания цилиндра с плоскостью ($|t| \gg 1$) получим

$$v_x = U_0\lambda t^{-2} + O(t^{-4}), \quad v_y = 2U_0\lambda t^{-3} + O(t^{-5}) \quad (3.16)$$

Следовательно, вблизи начала координат $v_x > 0$ при любом t , а $\text{sign } v_y = \text{sign } t$. Если учесть еще, что в верхней точке цилиндра $v_x = v_{\max} > 0$, то приходим к выводу о существовании на поверхности цилиндра двух боковых симметрично расположенных критических точек B и D . Кроме того, как было сказано, имеется еще одна критическая точка в месте касания цилиндра с плоскостью (фиг. 2).

С уменьшением завихренности набегающего потока ($\lambda \rightarrow 0$) точки B и D приближаются к началу координат. С увеличением λ эти точки стремятся к предельным положениям, определяемым корнями выражения в квадратных скобках (3.13).

4. Обтекание кругового цилиндра вблизи плоской поверхности (экрана) скошенным потоком, параллельным этой поверхности.

Соответствующая краевая задача (фиг. 3) может быть сформулирована следующим образом:

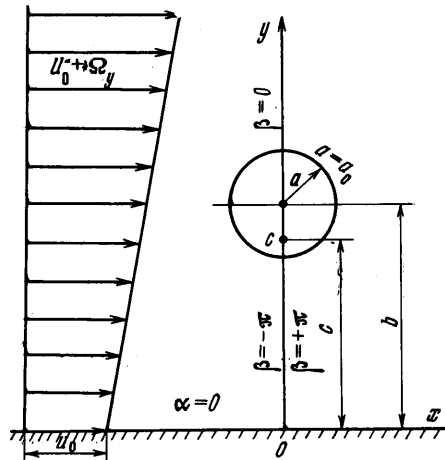
$$\nabla^2\psi = \Omega \quad (4.1)$$

$$\psi = \text{const}, \quad \psi = 0, \quad \psi = \psi_0$$

Здесь первое условие для ψ на окружности, второе — на плоскости $y = 0$ и третье — в бесконечности с точностью до постоянной.

Ограничимся изучением обтекания цилиндра чисто вихревой частью набегающего потока с функцией тока

$$\psi_0 = 1/2\Omega y^2 \quad (4.2)$$



Фиг. 3

Функцию тока возмущенного течения будем искать в виде

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{1}{2}\Omega y^2(1 - a^4/r^4) - \Omega by(1 - a^2/r^2)a^2/r^2 - \\ & - \frac{1}{2}\Omega(1 - a^2/r^2)[\frac{1}{2}a^2 + b^2(1 - a^2/r^2)] + \Omega \operatorname{Im} F(z) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$r^2 = x^2 + (y - b)^2$$

$F(z)$ — аналитическая в верхней полуплоскости вне круга радиуса a функция. Функция $F(z)$ удовлетворяет условиям:

на контуре цилиндра

$$\operatorname{Im} F = \operatorname{const} \quad (4.4)$$

на оси x

$$\operatorname{Im} F = \frac{1}{2}b^2(1 - a^2/r^2)^2 + \frac{1}{4}a^2(1 - a^2/r^2) \quad (4.5)$$

на бесконечности

$$\left. \frac{dF}{dz} \right|_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad F|_{z \rightarrow \infty} = \operatorname{const} \quad (4.6)$$

Для решения задачи (4.4) — (4.6) перейдем к биполярным координатам α, β (фиг. 3), положив при этом

$$z = ic \operatorname{cth} \frac{1}{2}\zeta \quad (\zeta = \alpha + i\beta)$$

Нетрудно видеть, что ось x будет линией $\alpha = 0$, бесконечно удаленная точка имеет координаты $\alpha = \beta = 0$, а $\alpha_0 = \ln [\chi + (\chi^2 - 1)^{1/2}]$, где $\chi = b/a$ — относительное отстояние цилиндра от экрана.

Во введенной таким образом системе координат условия (4.4) — (4.6) можно записать так:

$$\operatorname{Im} F(\zeta) = \operatorname{const} \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0 \quad (4.7)$$

$$\operatorname{Im} F(\zeta) = 2a^2S^2 \operatorname{sh}^2 \alpha_0 + \frac{1}{2}a^2S \operatorname{th} \alpha_0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0 \quad (4.8)$$

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\alpha_0 / (\operatorname{ch} 2\alpha_0 - \cos \beta)$$

$$F'(ic \operatorname{cth} \frac{1}{2}\zeta) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \beta = 0 \quad (4.9)$$

$$F(\zeta) = \operatorname{const} \quad \text{при} \quad \alpha_0 \rightarrow \infty \quad (4.10)$$

Решение ищем в виде ряда

$$\operatorname{Im} F(\zeta) = A + B\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{ch} k\alpha + B \operatorname{sh} k\alpha) \cos k\beta \quad (4.11)$$

Постоянные A, B, A_k и B_k определим из граничных условий; при $\alpha = 0$

$$\operatorname{Im} F(\zeta) = A + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\beta \quad (4.12)$$

Разложим правую часть (4.8) в ряд Фурье, воспользовавшись разложением

$$S = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2m\alpha_0} \cos m\beta \quad (4.13)$$

Известно [4], что

$$S^2 = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos k\beta, \text{ если}$$

$$S = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\beta$$

$$b_0 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2$$

$$b_k = \frac{a_0 a_k}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m a_{m+k} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^k a_m a_{k-m} + \frac{1}{2} \sum_{m=k+1}^{\infty} a_m a_{m-k}$$

Подставляя сюда значения коэффициентов разложения (4.13) и используя хорошо известные соотношения

$$\sum_{m=1}^k e^{-4\alpha_0 m} = \frac{e^{-2\alpha_0} - e^{-2\alpha_0(2k+1)}}{2 \operatorname{sh} 2\alpha_0}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} e^{-4\alpha_0 m} = \frac{e^{-2\alpha_0}}{2 \operatorname{sh} 2\alpha_0}$$

нетрудно убедиться, что

$$b_0 = 1/2 \operatorname{cth} 2\alpha_0, \quad b_k = 1/2 (k + \operatorname{cth} 2\alpha_0) e^{-2k\alpha_0}$$

Опуская промежуточные выкладки, получим

$$\operatorname{Im} F|_{\alpha=0} = 1/4 a^2 \operatorname{sh} 2\alpha_0 + a^2 \sum_{k=1}^{\infty} (k \operatorname{sh}^2 \alpha_0 + 1/2 \operatorname{sh} 2\alpha_0) e^{-2k\alpha_0} \cos k\beta \quad (4.14)$$

Сравнивая (4.12) и (4.14), найдем

$$A = 1/4 a^2 \operatorname{sh} 2\alpha_0, \quad A_k = a^2 (k \operatorname{sh}^2 \alpha_0 + 1/2 \operatorname{sh} 2\alpha_0) e^{-2k\alpha_0}$$

Условие (4.7) приводит к требованию

$$A + B\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{ch} k\alpha_0 + B_k \operatorname{sh} k\alpha_0) \cos k\beta = \operatorname{const}$$

Полагая $\operatorname{const} = A$, запишем

$$B\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{ch} k\alpha_0 + B_k \operatorname{sh} k\alpha_0) \cos k\beta = 0$$

В силу произвольности β получаем

$$B = 0, \quad B_k = -A_k \operatorname{cth} k\alpha_0$$

Подставляя найденные значения A , B , A_k и B_k в (4.11), с точностью до аддитивной постоянной находим

$$F(\zeta) = -1/2 i a^2 \operatorname{sh} 2\alpha_0 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2k\alpha_0} \frac{k \operatorname{th} \alpha_0 + 1}{\operatorname{sh} k\alpha_0} \operatorname{sh} k(\zeta - \alpha_0) \quad (4.15)$$

Условия (4.9) и (4.10) выполняются автоматически.

Ряд (4.15) сходится при $\alpha_0 > 0$, т. е. при любом $b > a$.

При достаточном удалении цилиндра от плоскости ($b \rightarrow \infty$, а следовательно, и $\alpha_0 \rightarrow \infty$) из (4.3) и (4.15) получаем известное [5] выражение для функции тока в случае обтекания цилиндра потоком без твердых границ.

Предельный случай $\alpha_0 \rightarrow 0$, если при этом и $c \rightarrow 0$ ($b = a$ — конечные величины), соответствует обтеканию кругового цилиндра, лежащего на дне (см. п. 3).

Привлекая соотношения (4.3) и (4.15), запишем выражение для скорости потока на контуре цилиндра

$$v_\theta = \Omega a \left[2 \sin \theta (\sin \theta + \operatorname{ch} \alpha_0) - \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha_0 \operatorname{ch} \alpha_0}{\sin \theta + \operatorname{ch} \alpha_0} \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-2k\alpha_0} \frac{k \operatorname{th} \alpha_0 + 1}{\operatorname{sh} k\alpha_0} \cos k\beta \right] \quad (4.16)$$

Здесь θ — полярный угол точки на контуре.

Гидродинамическая сила, действующая на цилиндр в вихревом потоке

$$P = 2\rho\Omega^2\pi a^2 b (1 + \varepsilon) \quad (4.17)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\left(2 \operatorname{sh}^3 \alpha_0 \frac{\operatorname{ch} \alpha_0 \cos \beta - 1}{(\operatorname{ch} \alpha_0 - \cos \beta)^3} - \frac{\operatorname{sh} \alpha_0}{(2 \operatorname{ch} \alpha_0 - \cos \beta)} \right) \Phi(\beta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2\alpha_0 \Phi^2(\beta) \right] (\operatorname{ch} \alpha_0 \cos \beta - 1) d\beta \quad (4.18)$$

Здесь

$$\Phi(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-2k\alpha_0} \frac{k \operatorname{th} \alpha_0 + 1}{\operatorname{sh} k\alpha_0} \cos k\beta$$

При $\alpha_0 \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ и из формулы (4.17) вытекает известное [5] выражение для подъемной силы цилиндра в неограниченной жидкости; так что величина ε может быть рассмотрена как поправка, обусловленная влиянием экрана. С приближением цилиндра к экрану сила P неограниченно возрастает, меняя при этом свое направление. Примерно при значениях $\chi = 1.03$ P обращается в нуль. Это объясняется значительным увеличением разрежения между цилиндром и экраном, когда относительное расстояние χ мало.

Автор выражает признательность В. Е. Давидсону за постоянное внимание к работе.

Поступило 26 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Милл-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М., «Мир», 1964.
2. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. М., Гостехиздат, 1950.
3. Чаплыгин С. А. Вихревой поток, переливающийся через препятствие в форме круглого полуцилиндра. Собр. соч., М.—Л., 1948, т. 2.
4. Овчинников О. Н. Профиль Жуковского в равномерно-завихренном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Техническая гидромеханика. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, Машгиз, 1961, № 217.
5. Чаплыгин С. А. К теории метелей. Собр. соч., ОГИЗ, 1948, т. 2.