

О ГИДРОДИНАМИКЕ СУСПЕНЗИЙ

А. С. ПОПЕЛЬ

(Москва)

Известно большое число экспериментов, указывающих на существенное различие гидродинамических свойств суспензий и обычных вязких жидкостей. Измерения, проведенные на различных типах вискозиметров, показали, что вязкость суспензий во многих случаях обнаруживает аномальное поведение, несовместимое с описанием суспензии как обычной ньютоновской или неньютоновской жидкости [1-3]. Исследования показали, что при течении суспензий большую роль играет расслоение на твердую и жидкую фазу. В частности, в практически важном случае Пуазейлевского течения равноплотной суспензии в круглой трубке наблюдались пристеночный и приосевой эффекты. Пристеночный эффект, т. е. миграция взвешенных частиц к оси трубки и соответствующее понижение концентрации твердой фазы вблизи стенок, наблюдался в суспензиях различной природы (частицы различной природы и формы в вязкой жидкости [4]; кровь, т. е. суспензия кровяных телец в плазме крови [3, 5]) в очень широком интервале значений средней концентрации. В отличие от пристеночного, приосевого эффект, который состоит в повышении концентрации твердой фазы в кольцевой области, отстоящей на расстояние $0.5-0.7 R$ от оси трубки (R — радиус трубки), наблюдался лишь при малых значениях средней концентрации [6, 7]. Был поставлен эксперимент [8], который показал, что наличие приосевого эффекта связано с вращением твердых частиц. Путем смещения центра тяжести каждой из частиц их вращение в этом эксперименте было затруднено. Оказалось, что при отсутствии вращения частицы всегда мигрируют к оси трубки.

Объяснению пристеночного эффекта посвящено много работ. В работе [9] вычислена величина боковой силы, действующей на сферу, вращающуюся в поступательном потоке вязкой жидкости (пределы применимости полученной формулы не позволяют рассматривать те значения параметров, при которых на практике наблюдался приосевой эффект). Если подставить выражение для силы в уравнение движения частицы и проинтегрировать его, то оказывается, что траектория частицы независимо от начального положения асимптотически приближается к оси трубки [10].

Другой подход состоит в осредненном описании поведения суспензий. В качестве уравнения движения для задачи о стационарном течении суспензии в круглой трубке было написано уравнение Навье — Стокса с вязкостью, известным образом зависящей от локальной концентрации твердой фазы. Для отыскания распределения концентрации формулировался вариационный принцип (принцип минимума диссипации энергии). При таком подходе также получался пристеночный эффект [11, 12]. Аналогичное рассмотрение, но с применением модели Кэссона, не дало практически никаких результатов [13].

Недавно была построена полная система уравнений двухжидкостной гидродинамики, в которой жидкость и дисперсная фаза рассматриваются как два взаимодействующих континуума, причем учитываются вращение и деформации частиц дисперсной фазы¹. Однако практическое применение такой системы для решения, например, задачи Пуазейля кажется затруднительным, так как необходимо детально знать силы взаимодействия между фазами.

В данной работе принято одножидкостное приближение, т. е. введенные величины (скорость, плотность и т. д.) характеризуют движение суспензии в целом, а не какой-нибудь одной фазы. Лишь две величины характеризуют собственно твердую фазу: объемная концентрация и локальная угловая скорость вращения твердых частиц. Такой подход не требует знания сил взаимодействия между фазами, и конечные уравнения оказываются существенно проще, чем при двухжидкостном описании.

На основе термодинамики необратимых процессов построена замкнутая система уравнений, включающая в себя уравнения диффузии и обобщенное уравнение момента импульса, которые позволяют находить пространственное распределение концентрации и угловой скорости вращения твердых частиц. Получен обобщенный

¹ Нгуен Ван Дьен. Некоторые вопросы гидродинамики структурных жидкостей. Канд. дисс., Воронежский гос. ун-т, Воронеж, 1968.

закон Фика, содержащий три дополнительных коэффициента диффузии. Тензор вязких напряжений в отличие от классических моделей оказывается несимметричным, причем его антисимметричная часть пропорциональна разности угловых скоростей вращения твердых частиц и суспензии в целом.

Из полученных уравнений следуют при некоторых частных предположениях уравнения теории жидкости с внутренним вращением [14].

В качестве примера применения теории решена задача Пуазейля о течении в плоском канале. Распределения концентрации, полученные в результате решения задачи, хорошо согласуются с описанными выше экспериментальными данными.

1. Основные уравнения. Рассмотрим двухфазную среду, состоящую из вязкой жидкости (ньютоновской или неньютоновской) и взвешенных в ней твердых шарообразных частиц. Введем величины, которые описывают локальные гидродинамические свойства суспензии в целом (плотность, скорость, давление и т. д.), а также величины, характеризующие свойства твердой фазы: концентрацию c , равную отношению объема твердой фазы к массе суспензии, заключенной в объеме dV , и локальную угловую скорость вращения твердых частиц ω .

В классической гидродинамике предполагается, что взаимодействие между двумя малыми частицами жидкости, соприкасающимися по элементу поверхности dS , полностью характеризуется силовым вектором ρdS . При построении гидродинамики суспензий надо отказаться от этого предположения и считать, как это обычно делают при рассмотрении структурных сред, что кроме силового вектора на поверхности dS действует вектор момента $m dS$. Это предположение, как было показано в работе [14], приводит к обобщенному уравнению баланса момента импульса.

Запишем законы сохранения массы суспензии и массы твердой фазы, уравнения импульсов, моментов импульсов и энергии суспензии

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial \rho c}{\partial t} + \frac{\partial \rho g_k}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = \rho f_i \\ \frac{\partial \rho l_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho g_{ik}}{\partial x_k} = \rho \Phi_i + \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{f})_i, \quad \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial Q_k}{\partial x_k} = \rho v_k f_k + \rho \omega_k \Phi_k \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ρ — плотность суспензии, \mathbf{v} — скорость, $\mathbf{l} = \mathbf{x} \times \mathbf{v}$ — момент импульса единицы массы, \mathbf{f} и Φ — соответственно внешние массовые силы и моменты, e — полная энергия, нормированная на единицу массы. Величины, стоящие под знаком дивергенции в левых частях уравнений (1.1), пока неизвестны и будут определены в дальнейшем.

Запишем полную энергию суспензии в виде суммы кинетической и внутренней энергии, которая предполагается зависящей только от плотности ρ , энтропии s и объемной концентрации c

$$e = 1/2 v^2 + e_0(\rho, s, c) \quad (1.2)$$

Для внутренней энергии справедливо термодинамическое тождество [15]

$$de_0 = \rho^{-2} d\rho + T ds + Z dc \quad (1.3)$$

Здесь p — давление, T — абсолютная температура, Z — химический потенциал.

Далее вычисляем производную от полной энергии (1.2) по времени и выражаем с помощью уравнений (1.1) и тождества (1.3) все производные по времени через производные по координатам. В результате получим уравнение баланса энтропии вида

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \frac{\partial F_k}{\partial x_k} = \frac{R}{T}$$

где R есть диссипативная функция.

Введем обозначения

$$\begin{aligned}\Omega &= 1/2 \operatorname{rot} v, \quad \sigma_{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik} - \Pi_{ik} = \sigma_{ik}^s + \sigma_{ik}^a \\ \mu_{ik} &= -g_{ik} = \mu_{ik}^s + \mu_j e_{ikj}, \quad \varphi_k = \rho s v_k - F_k \\ q_k &= \rho c v_k - g_k, \quad e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \quad d_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} \right)\end{aligned}\quad (1.4)$$

Здесь e_{ikj} — единичный антисимметричный тензор.

С помощью обозначений (1.4) запишем полученные выражения для диссипативной функции R и потока энергии Q

$$\begin{aligned}R &= \sigma_{ik}^s e_{ik} + \sigma_{ik}^a (\omega_j - \Omega_j) e_{ikj} + \mu_{ik}^s d_{ik} - \\ &\quad - \mu_k (\operatorname{rot} \omega)_k + \varphi_k \frac{\partial T}{\partial x_k} + q_k \frac{\partial Z}{\partial x_k} \\ Q_k &= \rho v_k (1/2 v^2 + p / \rho + e_0) - \sigma_{ik} v_i - \mu_{ik} \omega_i - \varphi_k T - q_k Z\end{aligned}\quad (1.5)$$

При написании реологических законов ограничимся линейной теорией, т. е. будем считать, что термодинамические потоки

$$\sigma_{ik}^s, \sigma_{ik}^a, \mu_{ik}^s, \mu_k, \varphi_k, q_k$$

линейно выражаются через термодинамические силы

$$e_{ik}, \omega - \Omega, d_{ik}, \operatorname{rot} \omega, \nabla T, \nabla Z$$

Для простоты дальнейшего вывода будем рассматривать только изотермические процессы ($T = \text{const}$).

Тогда реологические законы можно записать в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{ik} &= \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \delta_{ik} \right) + \zeta \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \delta_{ik} + \frac{\gamma}{2} w_j e_{ikj} \\ \mu_{ik}^s &= \mu \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_j} \delta_{ik} \right) + \lambda \frac{\partial \omega_j}{\partial x_j} \delta_{ik} \\ q_i &= a_{ik}(w) \frac{\partial Z}{\partial x_k} + b_{ik}(w) (\operatorname{rot} \omega)_k \\ \mu_i &= c_{ik}(w) \frac{\partial Z}{\partial x_k} + d_{ik}(w) (\operatorname{rot} \omega)_k\end{aligned}\quad (1.6)$$

Здесь $w = \omega - \Omega$ — относительная угловая скорость вращения твердых частиц.

Зависимость коэффициентов уравнений (1.6) от угловых скоростей ω и Ω ограничена принципом инвариантности реологических законов при произвольных движениях системы отсчета как твердого тела [16], из которого следует, что коэффициенты могут зависеть лишь от относительной скорости w .

В рассматриваемом случае применимы соотношения взаимности Онзагера [17]

$$a_{ik}(w) = a_{ki}(-w), \quad d_{ik}(w) = d_{ki}(-w), \quad b_{ik}(w) = c_{ki}(-w)$$

Разрешим уравнения (1.6) относительно $\partial Z / \partial x_k$

$$\partial Z / \partial x_i = a_{ik}' q_k + b_{ik}' (\operatorname{rot} \omega)_k, \quad \mu_i = c_{ik}' q_k + d_{ik}' (\operatorname{rot} \omega)_k \quad (1.7)$$

Тензоры в (1.7), обладают следующими свойствами симметрии:

$$a_{ik}'(\mathbf{w}) = a_{ki}'(-\mathbf{w}), \quad d_{ik}'(\mathbf{w}) = d_{ki}'(-\mathbf{w}), \quad b_{ik}'(\mathbf{w}) = -c_{ki}'(-\mathbf{w})$$

Эти соотношения удовлетворяются, если тензоры выбрать в виде

$$\begin{aligned} a_{ik}' &= \delta_{ik} / \alpha_1 + \alpha_2 w_j e_{ikj}, & b_{ik}' &= \alpha_3 \delta_{ik} + \alpha_4 w_j e_{ikj} \\ c_{ih}' &= -\alpha_3 \delta_{ih} - \alpha_4 w_j e_{ihj}, & d_{ik}' &= -\alpha_5 \delta_{ik} - \alpha_6 w_j e_{ikj} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Коэффициенты $\eta, \zeta, \gamma, \mu, \lambda, \alpha_i$, вообще говоря, могут быть функциями термодинамических переменных, а также всевозможных тензорных инвариантов термодинамических сил, входящих в выражение (1.5). В дальнейшем при решении задачи Пуазейля большинство коэффициентов будет считаться постоянным и лишь некоторые (типа коэффициента бародиффузии) будут функциями концентрации, обращающимися в нуль при значениях концентрации, равных нулю и единице.

Из второго закона термодинамики вытекает требование $R \geq 0$. Записывая диссипативную функцию в явном виде как квадратичную форму относительно термодинамических сил и применяя критерий положительной определенности квадратичных форм, получим

$$\eta, \zeta, \gamma, \mu, \lambda > 0, \quad \alpha_1 > 0, \quad \theta = \alpha_5 - \alpha_1 \alpha_3^2 > 0 \quad (1.9)$$

Запишем уравнения (1.7) в векторной форме с учетом (1.8)

$$\begin{aligned} \nabla Z &= \mathbf{q} / \alpha_1 + \alpha_2 \mathbf{q} \times \mathbf{w} + \alpha_3 \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} + \alpha_4 \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w} \\ -\mu &= \alpha_3 \mathbf{q} + \alpha_4 \mathbf{q} \times \mathbf{w} + \alpha_5 \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} + \alpha_6 \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Перейдем от переменной Z к переменным c и p ($T = \text{const}$) с помощью известного соотношения [15]

$$\alpha_1 \nabla Z = \rho D (\nabla c + k \nabla p)$$

Здесь D — коэффициент диффузии, kD — коэффициент бародиффузии.

Так как производная $\partial Z / \partial c$ всегда положительна [15], то должно выполняться неравенство $\rho D / \alpha_1 > 0$. Сравнивая с (1.9), получаем $D > 0$, т. е. обычное условие положительности коэффициента диффузии.

Первое уравнение (1.10) будет обобщением закона Фика для потока диффузии твердых частиц. Заметим, что член $\alpha_2 \mathbf{q} \times \mathbf{w}$ в законе Фика аналогичен силе, действующей на сферу, вращающуюся в поступательном потоке жидкости [9]. Последние два члена не интерпретируются столь простым образом.

Допустим, что $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_6 = 0$, а коэффициенты $\eta, \zeta, \gamma, \mu, \lambda$ не зависят от концентрации. В этом случае написанные уравнения переходят в известные уравнения теории жидкости с внутренним вращением [14].

2. Граничные условия. Для поступательной скорости суспензии можно сохранить граничные условия, обычные для гидродинамики вязкой жидкости. Условия для концентрации также можно задавать обычным образом. Для угловой скорости вращения твердых частиц граничные условия, следуя работе [14], возьмем в виде

$$\boldsymbol{\omega}_i - \boldsymbol{\omega}_i^0 = \alpha_{ij} \mu_{jk} n_k \quad (2.1)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}^0$ — вектор угловой скорости вращения граничной поверхности, \mathbf{n} — вектор внутренней нормали к поверхности, матрица α_{ij} составлена из коэффициентов скольжения. Если граница изотропна, то матрица α_{ij} диагональна, причем $\alpha_{xx} = \alpha_{zz} = \vartheta_0$, $\alpha_{yy} = \chi_0$ (ось y направлена по нормали к поверхности). Частные случаи условий (2.1): кинематическое условие прилипания $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^0$ и динамическое условие отсутствия моментных напряжений на граничной поверхности $\mu_{ik} n_k = 0$.

3. Случай несжимаемой жидкости. Задача Пуазейля. Приведем уравнения неразрывности, импульсов, моментов импульсов и диффузии для случая несжимаемой, нетеплопроводной суспензии

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho \frac{dv_i}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mu_{ik}}{\partial x_k} + \gamma(\Omega_i - \omega_i) + \rho \Phi_i = 0, \quad \rho \frac{dc}{dt} = \frac{\partial q_k}{\partial x_k}$$

Здесь величины σ_{ik} , μ_{ik} и q_k определены соотношениями (1.6).

Рассмотрим установившееся течение суспензии между двумя параллельными пластинами под действием постоянного градиента давления. Систему координат выберем так, чтобы ось y была перпендикулярна пластинам, а начало координат находилось на расстоянии h от каждой из пластин. Ось x направим параллельно поступательной скорости суспензии. Пусть стенки канала непроницаемы, и внешние массовые силы и моменты отсутствуют.

Так как все искомые величины, кроме давления, зависят лишь от координаты y , то система (3.1) сводится к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left[\left(\eta + \frac{\gamma}{4} \right) \frac{dv_x}{dy} + \frac{\gamma}{2} \omega_z \right] + P &= 0 \\ \frac{d}{dy} \left[(\mu + \theta) \frac{d\omega_z}{dy} - \alpha_3 \rho k DP \right] - \gamma(\omega_z - \Omega_z) &= 0 \\ \rho D \frac{dc}{dy} &= \left[\alpha_1 \alpha_2 \rho k DP - \alpha_1 (\alpha_4 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) \frac{d\omega_z}{dy} \right] (\omega_m - \Omega_z) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь $P = -\partial p / \partial x$ — градиент давления, предполагается постоянным; $\Omega_z = -1/2 \partial v_x / \partial y$ — угловая скорость вращения жидкой частицы.

На границах канала зададим условия прилипания

$$v_x(\pm h) = 0, \quad \omega_z(\pm h) = 0 \quad (3.3)$$

Кроме того, будем считать заданной среднюю по сечению канала концентрацию

$$c_0 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \rho c \, dy \quad (0 \leq c_0 \leq 1) \quad (3.4)$$

В данной работе ограничимся случаем $\eta, \gamma, \mu, \theta = \text{const}, \alpha_3 = 0$. После введения безразмерных переменных

$$\begin{aligned} v &= \frac{2\eta}{Ph^2} v_x, \quad \Omega = \frac{2\eta}{Ph} \Omega_z, \quad \omega = \frac{2\eta}{Ph} \omega_z, \quad c^* = \rho c, \quad \xi = \frac{y}{h} \\ s^2 &= \frac{4\eta\gamma h^2}{(4\eta + \gamma)(\mu + \theta)}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma}{4\eta + \gamma} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Запишем решения первых двух уравнений (3.2), удовлетворяющие граничным условиям (3.3)

$$v = 1 - \xi^2 - \frac{2\varepsilon \operatorname{ch} s - \operatorname{ch} s \xi}{s^2 \operatorname{sh} s}, \quad \Omega = \xi - \varepsilon \frac{\operatorname{sh} s \xi}{\operatorname{sh} s}, \quad \omega = \xi - \frac{\operatorname{sh} s \xi}{\operatorname{sh} s}$$

Графики функций $\Omega(\xi)$ и $\omega(\xi)$ приведены на фиг. 1 (было принято $s = 5, \epsilon = 0$). Производная $d\omega/d\xi = 0$ в точке $\xi = \xi^*(s)$ ($\xi^*(5) \approx 0.68$).

Для отыскания концентрации имеем

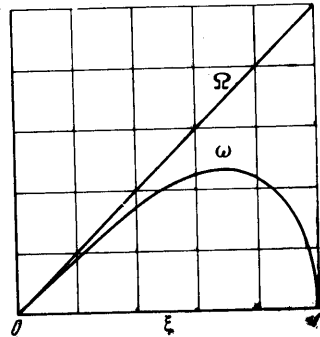
$$\frac{dc^*}{d\xi} = \left(b - a \frac{d\omega}{d\xi} \right) (\omega - \Omega) \quad (3.6)$$

$$a = 1/4 P^2 h^2 \alpha_1 \alpha_4 / \eta^2 D, \quad b = 1/2 P^2 h^2 \alpha_1 \alpha_2 \rho k / \eta.$$

В новых переменных (3.4) примет вид

$$\int_0^1 c^* d\xi = c_0$$

Таким образом, в рассматриваемом случае течения в плоском канале диффузионные процессы определяются двумя коэффициентами диффузии. Очевидно, что коэффициент b определяется бародиффузией и обращается в нуль при отсутствии градиента давления, например, в случае течения Куэтта. Сравнение с (1.10) показывает, что коэффициент a связан с двумя последними членами закона Фика.



Фиг. 1

Выясним качественно влияние величины коэффициентов a и b на распределение концентрации $c^*(\xi)$. Пусть сначала $a = 0$. Будем считать коэффициент b положительным. Так как течение симметрично относительно оси канала, достаточно рассматривать лишь верхнюю его половину. Как видно из уравнения (3.6), $dc^*/d\xi \leq 0$ при $\xi \geq 0$, так как $\omega - \Omega \leq 0$ (фиг. 1). У оси канала $\omega \approx \Omega$, следовательно, $dc^*/d\xi \approx 0$. Наоборот, при приближении к стенке разность $\omega - \Omega$ увеличивается по абсолютной величине, оставаясь отрицательной, значит и концентрация падает при приближении к стенке. Очевидно, что существенным для описанного распределения концентрации будет лишь знак коэффициента b , но не конкретный характер его зависимости от концентрации. Эта зависимость существенна по следующей причине. Введенная соотношением (3.5) концентрация по своему физическому смыслу удовлетворяет неравенствам: $0 \leq c^* \leq 1$. Для того чтобы решения уравнения (3.6) имели физический смысл, необходимо, чтобы коэффициент b (и a) обращался в нуль при $c^* = 0$ и 1 (в противном случае можно получить, например, отрицательные значения концентрации). Зависимость коэффициентов b и a от концентрации должна определяться либо из экспериментов, либо путем решения кинетических уравнений, что, конечно, представляет собой большие трудности. Однако приведенные выше рассуждения, подтвержденные численными расчетами, показывают, что наличие пристеночного эффекта слабо зависит от вида функции $b(c^*)$. В качестве простейшей зависимости можно выбрать, например, следующую:

$$b = \beta c^*(1 - c^*)$$

На фиг. 2 показаны кривые распределения концентрации при различных значениях параметра β ($c_0 = 0.5$ кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям $\beta = 0, 20, 50$). В этом случае теория дает значительное понижение концентрации твердой фазы вблизи стенок, что согласуется с экспериментом.

Положим $b = 0, a > 0$. Производная $dc^*/d\xi$ равна в этом случае произведению $\pi = -a(\omega - \Omega)d\omega/d\xi$. Очевидно,

$$\begin{aligned} \pi > 0 & \quad \text{при } 0 < \xi < \xi^* & (d\omega/d\xi > 0, \omega - \Omega < 0) \\ \pi < 0 & \quad \text{при } 1 > \xi > \xi^* & (d\omega/d\xi < 0, \omega - \Omega < 0) \\ \pi = 0 & \quad \text{при } \xi = 0 & (\omega = \Omega = 0), \quad \xi = \xi^* & (d\omega/d\xi = 0) \end{aligned}$$

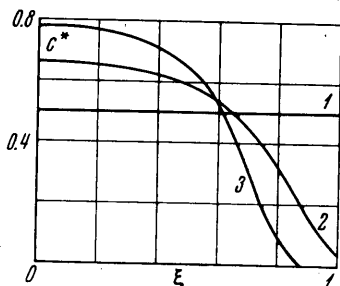
Таким образом, в этом случае помимо пристеночного эффекта имеет место приосевой эффект, т. е. повышение концентрации в некоторой внутренней точке канала. Здесь опять наличие эффекта определяется лишь знаком коэффициента a . Из экспериментов, однако, известно, что приосевой эффект наблюдается лишь при малых уровнях средней концентрации. Для того чтобы решения удовлетворяли этому условию, коэффициент a должен быть отличен от нуля только при малых значениях концентрации (например, $a(c^*) = \alpha c^*(1 - c^*)^n, n = 10$).

На фиг. 3 показано, как влияет величина α на развитие приосевого эффекта ($c_0 = 0.05$ кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям $\alpha = 0, 30, 140$).

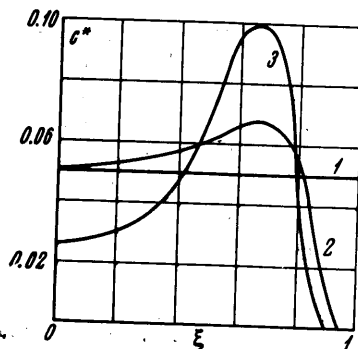
В реальных условиях, по-видимому, отличны от нуля оба коэффициента a и b . Пусть параметры задачи такие, что образуются приосевая и пристеночная зоны.

Путем приложения распределенных массовых моментов можно затормозить вращение частиц ($\omega \equiv 0$). Тогда, как видно из уравнения (3.6), понижение концентрации будет наблюдаться лишь у стенок канала (исчезновение приосевой зоны), что согласуется с результатом работы [8].

Таким образом, изложенная теория позволяет получить распределения кон-



Фиг. 2



Фиг. 3

центрации твердых частиц, соответствующие наблюдаемым в экспериментах. Сравнение с данными, полученными в экспериментах по измерению вязкости суспензий, будет приведено в другой работе.

Автор благодарит С. А. Регирера за большую помощь в работе и многочисленные обсуждения результатов, а также Г. А. Любимова, А. Г. Куликовского, В. М. Ентова и А. И. Леонова за критические замечания.

Поступило 24 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Haynes R. H. Physical basis of the dependence of blood viscosity on tube radius. Amer. J. Physiol., 1960, vol. 198, No. 6.
2. Higginbotham G. H., Oliver D. R., Ward S. G. Studies of the viscosity and sedimentation of suspensions, pt 4. Capillarytube viscometry and applied to stable suspensions of spherical particles. Brit. J. Appl. Phys., 1958, vol. 9, No. 8, p. 372—377.
3. Bugliarello G., Kapur G., Hsiao G. The profile viscosity and other characteristics of blood flow in a non — uniform shear field. Proc. 4th. Internat. Congr. Rheol. Providence, 1963. Pt. 4. Intersci. Publ. N. Y.—London — Sydney, 1965, p. 351.
4. Goldsmith H. L., Mason S. G. Physical aspects of the flow of biological suspensions through tubes. Proc. 4th Intern. Congr. Rheol. Providence, Intersci. Publ. N. Y. — London — Sydney, 1965, p. 85.
5. Bayliss L. E. The flow of suspensions of red blood cells in capillary tubes. Changes in the «cell free» marginal sheath with changes in the shearing stress. J. Physiol. (Engl.), 1965, vol. 179, No. 1.
6. Segré G., Silberberg A. Radial particle displacements in Poiseuille flow. Nature, 1961, vol. 189, No. 4760.
7. Segré G., Silberberg A. Behaviour of microscopic rigid spheres in Poiseuille flow. Part I. Determination of local concentration by statistical analysis of particle passages through crossed light beams. Part 2. Experimental results and interpretation. J. Fluid Mech., 1962, vol. 14, pt. 1.
8. Oliver D. R. Influence of particle rotation on radial migration in Poiseuille flow of suspensions. Nature, 1962, vol. 194, No. 4835.
9. Rubinow S. I., Keller J. B. The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid. J. Fluid Mech., 1961, 11, pt 3.
10. Denson C. D., Christiansen E. B., Salt D. L. Particle migration in shear fields. A.I.Ch.E. Jouranal. 1966, vol. 12, No. 3.
11. Павловский Ю. Н. О пристеночном эффекте. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2.
12. Буевич Ю. А., Леонов А. И. Об одной модели стационарных движений суспензий. ПМТФ, 1968, № 2.
13. Deakin M. A. B. Erythrocyte distribution in arterial blood flow, pt. 2 The hypothesis of minimal energy dissipation. Bull. Math. Biophys., 1967, 29, No. 3, p. 565—574.
14. Аэрро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В. Асимметричная гидромеханика. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
16. Eringen A. C. Nonlinear theory of continuous media. N. Y., Mc Graw — Hill, 1965.
17. De Groot S. R., Mazur P. Non — equilibrium thermodynamics. Amsterdam, North — Holland Publ. Comp., 1962. (Рус. перев.: Гроот С. Р., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964).