Для оценки устойчивости течений в придонной области представляет интерес распределение скоростей в различных сечениях. На фиг. 4 приведены профили продольной составляющей скорости для $b = 0$, $R_0 = 50$ в различных сечениях канала. В начальных сечениях профили скоростей имеют точки перегиба, что с точки зрения теории устойчивости параллельных течений говорит об их сильной неустойчивости. На некотором расстоянии от дна канала профили скоростей принимают вид (2.5), полученный в [1] для симметричного растекания относительно начального сечения. Обозначим через l_2 длину участка, на котором профили скоростей имеют точки перегиба. Зависимость l_2 от числа R_0 приведена на фиг. 2. При больших R_0 величина l_2 пропорциональна R_0.

В экспериментах [3] было обнаружено сильное влияние условий течения в придонной области на переход ламинарного течения в турбулентное в пористых трубах. В частности, было получено, что вдув через дно приводит к уменьшению длины ламинарного участка в трубе, а отсос — к его увеличению. Проведенные расчеты показали, что для фиксированного числа R_0 при увеличении величины вдува величина l_2 увеличивается, а при отсосе уменьшается. Это является одним из возможных объяснений приведенных выше экспериментальных фактов.

На фиг. 5 приведены линии тока для $R_0 = 50$ в случае вдува ($b = 0.5$) и отсоса ($b = -0.5$) через дно. В обоих случаях застойные зоны, которые имеют место при $b = 0$, не возникают. Отметим, что в случае достаточно большого отсоса линии тока имеют такой же вид, как и при симметричном растекании жидкости. Это означает, что в экспериментах можно исключить влияние дна канала и исследовать устойчивость течения (2.2), отсасывая часть жидкости через дно и отсчитывая координату x не от дна канала, а от точки растекания.

Поступило 27 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Berman A. S. Laminar flow in channels with porous walls. J. Appl. Phys., 1953, vol. 24, No. 9, p. 1232.
2. Taylor G. Fluid flow in regions bounded by porous surfaces. Proc. Roy. Soc. London, 1956, A234, No. 1199.
3. Браиловская И. Ю. Расчет обтекания угла потоком вязкого сжимаемого газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 3.
4. Варапаев В. Н. Численное исследование периодического струйного течения вязкой несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
5. Варжанская Т. С. Об одном способе постановки граничных условий для задач течения вязкой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.
6. Кускова Т. В., Чудов Л. А. О приближенных граничных условиях для вихря при расчете течений вязкой несжимаемой жидкости. Сб. «Вычислительные методы и программирование», Изд-во МГУ, 1968, вып. 11.

О ХАРАКТЕРЕ ДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В. Д. ПОЛЯНИН
(Москва)

Одной из особенностей нестационарной фильтрации жидкости, следующей нелинеаризуемому в области малых скоростей закону фильтрации [1], является конечная скорость распространения возмущения. Ниже выводятся некоторые геометрические и кинематические соотношения, которые выполняются на подвижной границе, разделяющей возмущенную и невозмущенную зоны течения. Полученные результаты могут быть использованы при построении приближенных решений соответствующих задач.

1. Пусть закон фильтрации в области малых скоростей представлен в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\mathbf{w} = -\alpha \frac{\operatorname{grad} p}{|\operatorname{grad} p|}(|\operatorname{grad} p| - \beta)^{\gamma} \quad \text{для } |\operatorname{grad} p| \geqslant \beta \\ &\mathbf{w} = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{для } |\operatorname{grad} p| < \beta \end{aligned} \tag{1.1}$$

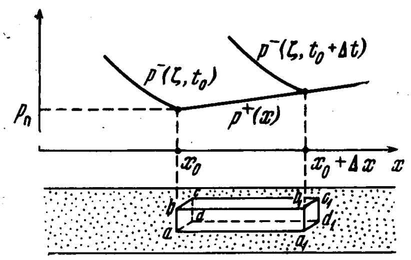
[1] Понятие нелиаризуемого закона фильтрации было введено впервые В. М. Ентовым в его диссертационной работе, МИНХиГП, 1964.

Здесь w — скорость фильтрации, p — давление в жидкости, α — положительная размерная величина, вообще говоря, функция давления, $\beta = \beta(p) \geqslant 0$ — начальный градиент давления [1], $\gamma = \mathrm{const}$ ($\gamma > 0$ при $\beta \neq 0$, $\gamma > 1$ при $\beta = 0$).

Для простоты выкладок рассмотрим прямолинейно-параллельный поток, полагая для определенности, что давление в жидкости убывает внутрь пространства в сторону невозмущенной зоны, т. е. в области течения $\partial p / \partial x < 0$.

Пусть в рассматриваемый момент времени t_0 граница раздела Г находится в точке с координатой x_0 (см. фиг. 1) и движется вправо в сторону зоны покоя со скоростью V, т. е.

$$\Gamma = x_0 + V(t - t_0) \tag{1.2}$$



Фиг. 1

Тогда за время Δt граница продвинется вправо на расстояние Δx

$$\Delta x = V\Delta t \tag{1.3}$$

В пористой среде выделим объем, ограниченный прямоугольным параллелепипедом $abcda_1b_1c_1d_1e$ с единичной площадью боковой грани $abcd$ и ребром $aa_1 = \Delta x$ в направлении движения.

Пусть давление в невозмущенной зоне p^+ распределено по закону

$$p^+(x) = p_0 + h(x - x_0), \quad |h| < \beta \tag{1.4}$$

Введем подвижную систему отсчета — ζ, начало координат которой находится все время на границе раздела Г. Распределение давления в возмущенной зоне p^- будем искать в виде

$$\begin{gathered} p^-(\zeta, t) = p_0 + h(\Gamma - x_0) + (-\zeta)^\mu b_1 + (-\zeta)^\nu b_2 + (-\zeta)^\eta b_3, \\ \eta > \nu > \mu > 0 \end{gathered} \tag{1.5}$$

где b_1, b_2 и b_3 — гладкие функции времени t.

Подсчитывая изменение массы жидкости ΔM в выделенном объеме за время Δt, найдем с точностью до главных членов

$$\Delta M = \int_{-\Delta x}^{0} m\rho(p^-)\,d\zeta - \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} m\rho(p^+)\,dx = \left(\frac{d\,m\rho}{d\,p}\right)_0 \left[\frac{h}{2} V^2(\Delta t)^2 + \frac{b_1}{\mu+1} V^{\mu+1}(\Delta t)^{\mu+1}\right] \tag{1.6}$$

где m — пористость среды, ρ — плотность жидкости, индекс 0 указывает значение функции при $p = p_0$.

Количество жидкости, протекшее через сечение $abcd$ за время Δt, равно

$$\Delta M = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \rho w|_{\zeta = x_0 - \Gamma}\, d\,t =$$

$$= \alpha_0\rho_0 \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} [\mu b_1(\Gamma - x_0)^{\mu-1} + \nu b_2(\Gamma - x_0)^{\nu-1} + \eta b_3(\Gamma - x_0)^{\eta-1} - \beta]^\gamma\, dt \tag{1.7}$$

Очевидно, что правые части двух последних выражений должны быть равными. Рассмотрим два случая:

а) фильтрация с начальным градиентом давления. В этом случае для выполнения равенства необходимо

$$\mu = 1, \qquad b_1 \equiv \beta(p_\Gamma) \tag{1.8}$$

физически ясный результат, неоднократно отмечавшийся ранее, например в [1]. Подставляя далее (1.8) в (1.6) и (1.7), получим

$$\begin{gathered} \nu = 2, \quad b_2 = \frac{1}{2}\beta\frac{d\beta}{dp}, \quad \eta = 1 + \frac{1}{\gamma} \\ V = \frac{\alpha_0\rho_0}{(h+\beta)(dm\rho / dp)}\left[\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)b_3\right]^\gamma \quad \text{для } \gamma < 1 \end{gathered} \tag{1.9}$$

$$\nu = 2, \quad V = \frac{\alpha_0\rho_0(2b_2 - \beta\, d\,\beta / d\,p)}{(h+\beta)(d\,m\rho / d\,p)} \quad \text{для } \gamma = 1 \tag{1.10}$$

$$\nu = 1 + \frac{1}{\gamma}, \quad V = \frac{\alpha_0\rho_0[(1+\gamma^{-1})\,b_2]^\gamma}{(h+\beta)\,(\mathrm{d}\,m\rho\,/\,\mathrm{d}p)} \quad \text{для } \gamma > 1 \tag{1.11}$$

б) Фильтрация без начального градиента давления. В этом случае $h = 0$, и для равенства правых частей (1.6) и (1.7) необходимо

$$\mu = \frac{\gamma}{\gamma - 1}, \quad V = \frac{\alpha_0\rho_0}{b_1\,(\mathrm{d}\,m\rho\,/\,\mathrm{d}p)}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\,b_1\right)^\gamma \tag{1.12}$$

2. При предположениях, обычных в теории упругого режима [2], уравнение пьезопроводности для одномерных потоков жидкости, следующей закону фильтрации

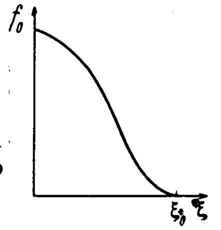
$$\mathbf{w} = -\alpha\,\mathrm{grad}\,p\,|\mathrm{grad}\,p\,|^{\gamma-1}, \quad \gamma > 1, \quad \alpha = \mathrm{const} \tag{2.1}$$

имеет вид

$$c\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{x^s}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^s\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left|\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right|^{\gamma-1}\right), \quad c = \frac{1}{\alpha\rho_0}\left(\frac{\mathrm{d}\,m\rho}{\mathrm{d}\,p}\right)_0 \tag{2.2}$$

Здесь $s = 0, 1, 2$ соответственно в случаях прямолинейно-параллельного, осесимметричного и центрально-симметричного потоков. При условиях

$$p\,(x,\,0) = p_0, \quad \lim_{x\to 0} x^s\left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)^\gamma = \tau t^q, \quad \tau > 0,\ q \geqslant 0 \tag{2.3}$$



Фиг. 2

решение задачи автомодельно [3] и при $s = 0$ имеет следующий вид:

$$p - p_0 = \tau^{(\gamma+1)/2\gamma}c^{-1/2}t^{[\gamma+q(\gamma+1)]/2\gamma}f_0(\xi) \tag{2.4}$$

$$\xi = x\tau^{(1-\gamma)/2\gamma}c^{1/2}t^{-[q(\gamma-1)+\gamma]/2\gamma} \tag{2.5}$$

Характер зависимости $f_0(\xi)$ качественно показан на фиг. 2. В окрестности точки $\xi = \xi_0$ кривая $f_0(\xi)$ удовлетворяет уравнению [3]

$$f_0^{-1/\gamma}\,\frac{\mathrm{d}\,f_0}{\mathrm{d}\,\xi} = -\,\delta_0^{1/\gamma}\xi^{1/\gamma}, \quad \delta_0 = \frac{q\,(\gamma-1)+\gamma}{2\gamma} \tag{2.6}$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае закон движения границы раздела

$$\Gamma = \xi_0\tau^{(\gamma-1)/2\gamma}c^{-1/2}t^{[q(\gamma-1)+\gamma]/2\gamma} \tag{2.7}$$

тогда скорость движения границы раздела будет равна

$$V = \delta_0\xi_0\tau^{(\gamma-1)/2\gamma}c^{-1/2}t^{[q(\gamma-1)-\gamma]/2\gamma} \tag{2.8}$$

При фиксированном времени t решение (2.4) в окрестности точки $x = \Gamma$

$$p - p_0 = \left[\frac{\gamma-1}{\gamma}\,\delta_0^{1/\gamma}\xi_0^{1/\gamma}\right]^{\gamma/(\gamma-1)}\tau^{1/2\gamma}c^{1/2(\gamma-1)}t^{[q(\gamma-1)-\gamma]/2\gamma(\gamma-1)}\,(-\,\zeta)^{\gamma/(\gamma-1)} \tag{2.9}$$

$$\zeta = x - \Gamma \tag{2.10}$$

Делая соответствующую подстановку в (1.12), учитывая (2.2), получим выражение, точно совпадающее с (2.8). При $s = 1,2$ имеет место аналогичный результат.

Справедливость соотношения (1.10) для $\beta = \mathrm{const}$ легко проверяется при помощи автомодельного решения соответствующей задачи, разобранной в работе [4].

Таким образом, выводы предыдущего пункта подтверждаются в частных случаях на примерах точных решений задач упругого режима.

Поступило 3 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирзаджанзаде А. Х., Касимов А. Ф., Гурбанов Р. С. Гидродинамика вязко-пластичных сред. Тр. Азерб. ин-та нефти и химии им. М. Азизбекова, Баку, 1967, вып. 26.
2. Щелкачев В. Н. Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 2.
3. Баренблатт Г. И. Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде. ПММ, 1952, т. 16, вып. 6.
4. Ентов В. М. Об одной задаче нелинейной нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 5.