

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В НАЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ ПЛОСКОГО КАНАЛА С ПОРИСТЫМИ СТЕНКАМИ

В. Н. ВАРАПАЕВ

(Москва)

В некоторых технических задачах встречаются течения в каналах, которые образуются за счет подачи жидкости (или газа) через стенки канала (движение газа в канале с пористыми стенками, движение газа во внутренних каналах пороховых зарядов, движение жидкости в скважинах). Ламинарные течения такого типа изучались теоретически в [1] и экспериментально в [2]. При экспериментальном изучении перехода из ламинарного режима течения в турбулентное в трубах и кольцевых каналах с пористыми стенками в [3] было обнаружено, что на переход сильно влияют условия течения возле переднего закрытого конца (дна канала), где результаты работы [1] неприменимы.

Цель данной работы — определить характер течения в начальном участке плоского канала как для случая непроницаемого дна, так и для случая подачи или отсоса жидкости через дно. Исследование проводится путем численного решения уравнений Навье — Стокса конечно-разностным методом.

1. Рассмотрим стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в полубесконечном плоском канале с параллельными проницаемыми стенками, через которые подается жидкость с постоянной скоростью v_0 . Примем начальное сечение канала за ось y , а ось x направим по оси канала. Если за характерные скорость и длину взять скорость вдува v_0 и полуширину канала a , то в безразмерных переменных рассматриваемое течение описывается уравнением

$$\frac{1}{R_0} \Delta \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = 0 \quad \left(R_0 = \frac{av_0}{\nu} \right) \quad (1.1)$$

Здесь R_0 — число Рейнольдса вдува, ν — кинематический коэффициент вязкости, ψ — функция тока, x и y — координаты вдоль и поперек канала, Δ — оператор Лапласа.

Так как рассматривается течение в начальном участке канала, то, используя симметрию течения относительно оси канала, будем решать задачу в области $\Omega = \{0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq 1\}$. Граничными условиями для (1.1) будут условия симметрии на оси канала

$$\frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi(x, 0)}{\partial y^2} = 0 \quad (0 \leq x \leq L) \quad (1.2)$$

условия вдува и обращения в нуль продольной компоненты скорости на проницаемой стенке

$$\frac{\partial \psi(x, 1)}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \psi(x, 1)}{\partial y} = 0 \quad (0 \leq x \leq L) \quad (1.3)$$

условия прилипания в начальном сечении

$$\frac{\partial \psi(0, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi(0, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (0 \leq y \leq 1) \quad (1.4)$$

Вопрос о граничных условиях на правой границе ($x = L$) будет рассмотрен ниже. В случае вдува или отсоса через дно канала условие (1.4) заменяется на

$$\frac{\partial \psi(0, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi(0, y)}{\partial y} = b \quad \left(b = \frac{u_1}{v_0}, \quad 0 \leq y \leq 1 \right) \quad (1.5)$$

Здесь u_1 — скорость вдува (или отсоса) жидкости через дно ($b > 0$ соответствует вдуву, а $b < 0$ — отсосу жидкости).

2. В случае симметричного растекания жидкости относительно начального сечения канала, когда вместо условий прилипания ко дну канала (1.4) имеют место условия симметрии

$$\frac{\partial \psi(0, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi(0, y)}{\partial x^2} = 0 \quad (0 \leq y \leq 1) \quad (2.1)$$

существует решение задачи, полученное в [1] и имеющее вид

$$\psi = xF(y) \quad (2.2)$$

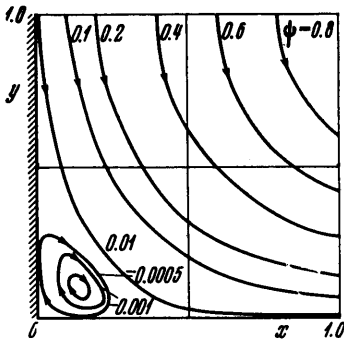
Для функции $F(y)$ получается уравнение

$$F'F'' - FF''' = \frac{1}{R_0} F'''' \quad (2.3)$$

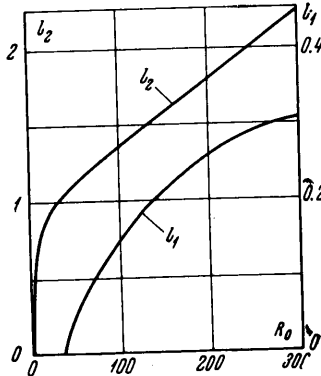
которое надо решать с граничными условиями

$$F(0) = F''(0) = F'(1) = 0, \quad F(1) = 1 \quad (2.4)$$

При больших и малых числах R_0 решение задачи (2.3), (2.4) может быть приближенно получено в аналитическом виде, а в общем случае требуется численное интегрирование этой краевой задачи. Если в качестве характерной скорости взять



Фиг. 1



Фиг. 2

не v_0 , а скорость на оси канала в данном сечении $u(x, 0)$, то из (2.2) следует, что во всех сечениях канала скорости будут подобны

$$\frac{u(x, y)}{u(x, 0)} = \frac{F'(y)}{F'(0)} \quad (2.5)$$

Экспериментальные результаты работ [2] и [3] показывают, что, хотя в экспериментах реализуются условия (1.4) или (1.5), а не (2.1), на достаточном расстоянии от дна канала устанавливаются профили скоростей (2.5). Поэтому будем предполагать, что в случае прилипания жидкости ко дну канала на достаточном удалении от него течение будет описываться соотношениями (2.2) и (2.3), которые используем для получения граничных условий при $x = L$. Для этого умножим (2.3) на x и, используя (2.2), получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{R_0} \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \quad (2.6)$$

Подобные граничные условия использовались в [4-6].

3. Уравнение (1.1) с граничными условиями (1.2) — (1.4) и (2.6) решалось методом сеток. Для этого (1.1) записывалось в виде системы относительно функции тока ψ и вихря скорости ω , которая затем решалась методом установления [5]

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{R_0} \Delta \omega - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (3.1)$$

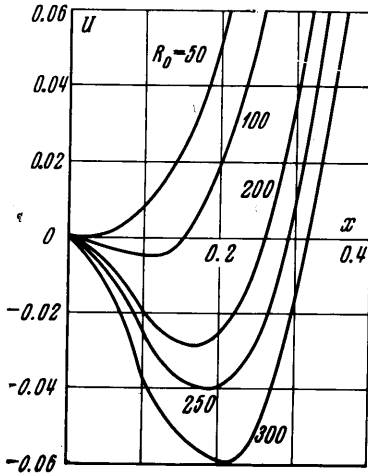
$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \psi + \omega \quad (3.2)$$

Разностная схема для системы (3.1), (3.2) записывалась так же, как в [5]. Основные расчеты проводились на равномерной сетке $h = l = 0.05$ (h и l — шаги сетки по координатам x и y). Шаг по времени τ выбирался из условия устойчивости схемы в зависимости от числа R_0 . Время счета одного варианта по программе, составленной на языке «Алгол», при $L = 2$ (800 узловых точек) составляло на ЭЦВМ М-20 20—50 мин. в зависимости от числа R_0 .

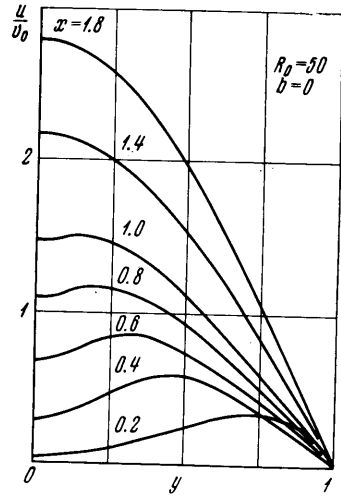
4. Рассмотрим граничные условия для функций ψ и ω при решении системы (3.1), (3.2). Положим $\psi(0,1) = 0$. Тогда из (1.2) — (1.4) легко получить условия

$$\begin{aligned} \psi(0, y) &= 0 & (0 \leq y \leq 1) \\ \psi(x, 0) = \omega(x, 0) &= 0, & \psi(x, 1) = x & (0 \leq x \leq L) \end{aligned} \quad (4.1)$$

На стенках граничные условия для ω задавались в виде зависимости от значений ψ и ω в приграничных точках с помощью различных аппроксимаций, приведенных в работе [7]. Результаты расчетов показали, что для использованной разностной



Фиг. 3

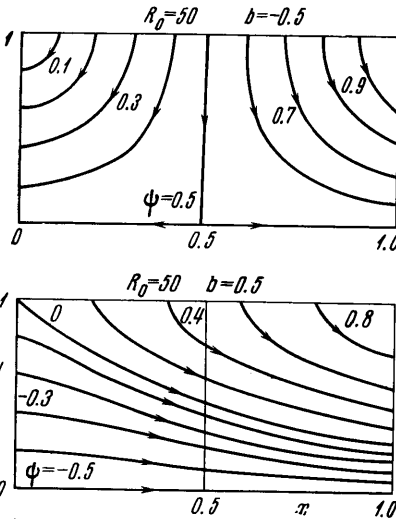


Фиг. 4

схемы скорость сходимости почти не зависит от вида применяемых граничных условий. На границе $x = L$ условие (2.6) записывалось в виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{R_0} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \omega \quad (4.2)$$

Уравнения (4.2) интегрировались одновременно с основной системой (3.1), (3.2). Использовались две различные численные реализации (4.2). В первой из них выражения $\partial \omega / \partial x$ и $\partial \psi / \partial x$ по (2.2) заменялись на F'' и F . В этом случае значения для ψ и ω на границе $x = L$ определяются независимо от характера течения при $x < L$ соотношениями (2.2) и (2.3) («жесткие» граничные условия). При второй реализации выражения $\partial \omega / \partial x$ и $\partial \psi / \partial x$ аппроксимировались на $x = L$ с помощью левых односторонних трехточечных разностных формул, имеющих погрешность $O(h^2)$. Здесь значения ψ и ω на границе зависят от поведения ψ и ω в приграничных точках («мягкие» условия). Численные эксперименты показали, что применение жестких условий приводит к граничным эффектам, которые сильно искажают решение в приграничных точках. В случае мягких условий такие эффекты не возникают.



Фиг. 5

При $b = 0$ и достаточно больших R_0 у центра дна образуется застойная зона в виде пары симметричных вихрей, медленно вращающихся в противоположные стороны. На фиг. 1 приведены линии тока для $b = 0$ и $R_0 = 200$. Длина вихревой застойной зоны l_1 увеличивается при увеличении R_0 , причем при больших R_0 это увеличение становится незначительным (фиг. 2). Скорость жидкости в застойной зоне очень мала, и в рассматриваемом диапазоне чисел R_0 не превышает $0.06 v_0$. На фиг. 3 дано распределение скорости $u(x, 0) / v_0$ вдоль оси вблизи дна канала.

5. Численные расчеты проводились для определения влияния величины R_0 на характер течения в начальном участке канала при $10 \leq R_0 \leq 300$. Наряду со случаем непроницаемого дна канала ($b = 0$) рассматривались случаи подачи ($b > 0$) или отсоса ($b < 0$) жидкости через дно.

Для оценки устойчивости течений в придонной области представляет интерес распределение скоростей в различных сечениях. На фиг. 4 приведены профили продольной составляющей скорости для $b = 0$, $R_0 = 50$ в различных сечениях канала. В начальных сечениях профили скоростей имеют точки перегиба, что с точки зрения теории устойчивости параллельных течений говорит об их сильной неустойчивости. На некотором расстоянии от дна канала профили скоростей принимают вид (2.5), полученный в [1] для симметричного растекания относительно начального сечения. Обозначим через l_2 длину участка, на котором профили скоростей имеют точки перегиба. Зависимость l_2 от числа R_0 приведена на фиг. 2. При больших R_0 величина l_2 пропорциональна R_0 .

В экспериментах [3] было обнаружено сильное влияние условий течения в придонной области на переход ламинарного течения в турбулентное в пористых трубах. В частности, было получено, что вдув через дно приводит к уменьшению длины ламинарного участка в трубе, а отсос — к его увеличению. Проведенные расчеты показали, что для фиксированного числа R_0 при увеличении величины вдува величина l_2 увеличивается, а при отсосе уменьшается. Это является одним из возможных объяснений приведенных выше экспериментальных фактов.

На фиг. 5 приведены линии тока для $R_0 = 50$ в случае вдува ($b = 0.5$) и отсоса ($b = -0.5$) через дно. В обоих случаях застойные зоны, которые имеют место при $b = 0$, не возникают. Отметим, что в случае достаточно большого отсоса линии тока имеют такой же вид, как и при симметричном растекании жидкости. Это означает, что в экспериментах можно исключить влияние дна канала и исследовать устойчивость течения (2.2), считывая часть жидкости через дно и отсчитывая координату x не от дна канала, а от точки растекания.

Поступило 27 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Bergman A. S. Laminar flow in channels with porous walls. J. Appl. Phys., 1953, vol. 24, No. 9, p. 1232.
2. Taylor G. Fluid flow in regions bounded by porous surfaces. Proc. Roy. Soc. London, 1956, A234, No. 1199.
3. Браиловская И. Ю. Расчет обтекания угла потоком вязкого сжимаемого газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 3.
4. Варапаев В. Н. Численное исследование периодического струйного течения вязкой несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
5. Варжанская Т. С. Об одном способе постановки граничных условий для задач течения вязкой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.
6. Кускова Т. В., Чудов Л. А. О приближенных граничных условиях для вихря при расчете течений вязкой несжимаемой жидкости. Сб. «Вычислительные методы и программирование», Изд-во МГУ, 1968, вып. 11.

О ХАРАКТЕРЕ ДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В. Д. ПОЛЯНИН
(Москва)

Одной из особенностей нестационарной фильтрации жидкости, следующей нелинеаризуемому в области малых скоростей закону фильтрации¹, является конечная скорость распространения возмущения. Ниже выводятся некоторые геометрические и кинематические соотношения, которые выполняются на подвижной границе, разделяющей возмущенную и невозмущенную зоны течения. Полученные результаты могут быть использованы при построении приближенных решений соответствующих задач.

1. Пусть закон фильтрации в области малых скоростей представлен в следующем виде:

$$w = -\alpha \frac{\text{grad } p}{|\text{grad } p|} (|\text{grad } p| - \beta)^\gamma \quad \text{для } |\text{grad } p| \geq \beta$$

$$w = 0 \quad \text{для } |\text{grad } p| < \beta$$

(1.1)

¹ Понятие нелинеаризуемого закона фильтрации было введено впервые В. М. Ентовым в его диссертационной работе, МИНХИП, 1964.