7. Бобков В. П., Ибрагимов М. Х., Сабелев Г. И. Обобщение экспериментальных данных по интенсивности пульсаций скорости при турбулентном течении жидкости в каналах различной формы. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3, стр. 162—165.
8. Ибрагимов М. Х., Исупов И. А., Кобзарь Л. Л., Субботин В. И. Метод расчета касательных напряжений на стенках и распределения скоростей при турбулентном течении жидкости в каналах различной формы. Атомная Энергия, 1966, т. 21, вып. 2.
9. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, Изд-во Новосиб. ун-та, 1966.
10. Laufer J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow. NACA, Rept., 1954, No. 1174.

ИЗЛУЧЕНИЕ ПУЛЬСИРУЮЩЕЙ СФЕРЫ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

П. И. ЦОЙ

(Тула)

Обсуждается задача об излучении сферы в вязкой среде. Получены асимптотические формулы для давления, скорости, интенсивности и полной излучаемой мощности вдали от сферы, а также для результирующей силы, действующей на сферу в случае малой вязкости. Если не учитывать вязкости, то из данной работы получим результаты, совпадающие с результатами работы [1].

1. Постановка задачи и ее решение. Предположим, что сферическая поверхность радиуса a пульсирует с произвольным распределением скоростей на ее поверхности

$$v_r = U_n P_n(\cos\theta) e^{-\sigma t i}, \qquad v_\theta = 0, \qquad v_\psi = 0 \tag{1.1}$$

и будет источником распространения звуковых волн в неограниченной вязкой среде, где r, θ, ψ — сферические координаты, σ — круговая частота, U_n — постоянная величина, $P_n(\cos\theta)$ — функция Лежандра первого рода n-го порядка, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

В случае установившегося режима (с временным множителем $e^{-\sigma t i}$), пренебрегая квадратными малыми членами в уравнениях и считая коэффициент вязкости постоянным, можно привести задачу об определении акустического поля пульсирующей сферы в вязкой среде к решению системы двух уравнений Гельмгольца: уравнений потенциала скоростей φ и векторного потенциала вихрей Φ [2]

$$\Delta\varphi + k_1^2\varphi = 0, \qquad \Delta\Phi + k_2^2\Phi = 0 \tag{1.2}$$

$$k_1^2 = \frac{\sigma^2}{c^2}\frac{1+\sigma c^{-2}(\nu' + {}^4/_3\nu)}{1+\sigma^2 c^{-4}(\nu' + {}^4/_3\nu)^2}, \qquad k_2^2 = \frac{\sigma}{\nu} i \tag{1.3}$$

удовлетворяющее граничным условиям (1.1), где c — скорость звука при отсутствии вязкости; ν' и ν — кинематические коэффициенты вязкости.

В силу симметрии граничных условий (1.1) и сферической поверхности функции φ и Φ не будут зависеть от ψ, т. е.

$$\varphi = \varphi(r, \theta), \qquad \Phi = \Phi(r, \theta)\mathbf{i}_3 \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — единичные векторы на осях сферической системы координат. Тогда граничные условия (1.1) на основании (1.4) принимают вид

$$\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\Phi)\right\}_{r=a} = U_n P_n(\cos\theta)$$
$$\left\{\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r\Phi)}{\partial r}\right\}_{r=a} = 0 \tag{1.5}$$

Применяя метод разделения переменных и учитывая временный множитель $e^{-\sigma t i}$, найдем решение уравнений (1.2), удовлетворяющее условиям (1.4) и (1.5), в виде

$$\varphi = A_n h_n(k_1 r) P_n(\cos\theta) e^{-\sigma t i}, \qquad \Phi = B_n h_n(k_2 r)\frac{d}{d\theta}P_n(\cos\theta)e^{-\sigma t i} \tag{1.6}$$

Здесь
$$A_n = U_n a \{h_n(k_2a) + k_2ah_n'(k_2a)\}\Omega_n^{-1},$$
$$B_n = U_n a h_n(k_1a)\Omega_n^{-1}$$
$$\Omega_n = k_1ah_n'(k_1a)\{h_n(k_2a) + k_2ah_n'(k_2a)_n - n(n+1)h_n(k_1a)h_n(k_2a)$$
$$h_n(u) = \left(\frac{\pi}{2u}\right)^{1/2} H_{n+1/2}(u), \qquad h_n'(u) = \frac{d}{du}h_n(u) \tag{1.8}$$

где $H_n(u)$ — первая функция Ханкеля n-го порядка.

Далее для давления и скорости частицы в вязкой среде получим
$$p = p_0 + \rho_0\sigma i[1 + (\nu' + {}^4/_3\nu)k_1^2\sigma^{-1}i]A_nh_n(k_1r)P_n(\cos\theta)e^{-\sigma ti}$$
$$v_r = [A_nk_1h_n'(k_1r) - B_nn(n+1)r^{-1}h_n(k_2r)]P_n(\cos\theta)e^{-\sigma ti}$$
$$v_\theta = z^{-1}[A_nh_n(k_1r) - B_n\{h_n(k_2r) + k_2rh_n'(k_2r)\}]\frac{d}{d\theta}P_n(\cos\theta)e^{-\sigma ti}$$

Результирующая сила реакции (давления) на сферическую поверхность в направлении оси x равна [3, 4]
$$R_x = a^2\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\pi}\left\{p - (\mu' - {}^2/_3\mu)\operatorname{div}\mathbf{v} - 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}\right\}_{r=a}\cos\theta\sin\theta d\theta =$$
$$= \frac{4\pi a^2}{2n+1}\left[\rho_0\sigma i\left(1 + \frac{2\nu}{\sigma}k_1^2i\right)A_nh_n(k_1a) - 2\mu\{A_nk_1^2h_n''(k_1a) - 2k_2a^{-1}B_nh_n'(k_2a)\}\right]C_ne^{-\sigma ti},$$
$$h_n''(u) = \frac{d^2h_n(u)}{du^2} \tag{1.10}$$
$$C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}P_n(x)P_1(x)dx = \begin{cases}1 & \text{при } n=1\\ 0 & \text{при } n\neq 1\end{cases} \tag{1.11}$$

2. Равномерное излучение сферы. Пусть сферическая поверхность пульсирует, т. е. расширяется и сжимается равномерно так, что скорость на ее поверхности
$$v_r = U_0e^{-\sigma ti}, \qquad v_\theta = 0$$

В этом случае, положив $n = 0$ в (1.6) — (1.11), получим [3]
$$\varphi = -\frac{U_0h_0(k_1r)}{k_1h_1(k_1a)}e^{-\sigma ti}, \qquad \Phi = 0$$
$$p = p_0 - \frac{U_0\rho_0\sigma i[1 + (\nu' + {}^4/_3\nu)k_1^2\sigma^{-1}i]h_0(k_1r)}{k_1h_1(k_1a)}e^{-\sigma ti} \tag{2.1}$$
$$v_r = \frac{U_0h_1(k_1r)}{h_1(k_1a)}e^{-\sigma ti}, \qquad v_\theta = 0, \qquad R_x = 0$$

Из $\Phi = 0$ следует, что звуковое поле будет потенциальным, из $v_\theta = 0$ — что скорость частицы направлена по нормали к поверхности сферы, а из $R_x = 0$ — что на сферу не действует сила сопротивления среды.

В дальнейшем будем использовать асимптотические формулы
$$h_n(u) \sim \frac{1}{u}\exp\left\{i\left(u - \frac{n+1}{2}\pi\right)\right\} \quad \text{при } u \gg n$$
$$h_n(u) \sim -i\,\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{u^{n+1}} \quad \text{при } u\to 0 \tag{2.2}$$

На больших расстояниях r от сферы (в дальней зоне) давление и скорость частицы на основании (2.1) и (2.2) будут равны
$$p \approx p_0 - \frac{U_0\rho_0\sigma\{1 + (\nu' + {}^4/_3\nu)k_1^2\sigma^{-1}i\}}{k_1^2rh_1(k_1a)}e^{-k_1''r}\exp\{i(k_1'r - \sigma t)\}$$
$$v_r \approx \frac{U_0}{k_1rh_1(k_1a)}e^{-k_1''r}\exp\{i(k_1'r - \sigma t - \pi)\}, \qquad v_\theta \approx 0 \tag{2.3}$$

Здесь
$$k_1 = k_1' + ik_1''$$
$$k_1' = \frac{\sigma}{c\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon+1}{2}\right)^{1/2}, \quad k_1'' = \frac{\sigma}{c\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon-1}{2}\right)^{1/2}, \quad \varepsilon = \left[1 + \frac{\sigma^2}{c^4}(\nu' + {}^4/_3\nu)^2\right]^{1/2} \tag{2.4}$$

Рассмотрим случай малой вязкости, т. е. ν' и ν — очень малые по сравнению с величиной σa^2 и величины $\sigma\nu' / c^2$ и $\sigma\nu / c^2$ малы по сравнению с единицей. Тогда для (2.4) можно написать следующие приближения:

$$k_1' = \frac{\sigma}{c}, \qquad k_1'' = \frac{\sigma^2}{2c^3}(\nu^1 + {}^4/_3\nu)$$

В этом случае, отделяя действительные части, вместо (2.3) получим

$$\begin{gathered} p \approx p_0 + U_0\rho_0\sigma a^2 r^{-1} \exp(-k_1''r)\sin(k_1'r - \sigma t + 2\varepsilon_i), \qquad |k_1a| \ll 1 \\ v_r \approx \frac{U_0\sigma a^2}{cr} e^{-k_1''r} \sin(k_1'r - \sigma t + \varepsilon_1), \qquad v_\theta = 0 \\ p \approx p_0 + U_0\rho_0 ca^2 r^{-1} \exp(-k_1''r)\cos\{k_1'(r-a) - \sigma t + \varepsilon_1\}, \qquad |k_1a| \gg 1 \\ v_r \approx \frac{U_0 a}{r} e^{-k_1''r} \cos\{(k_1'(r-a) - \alpha t\}, \qquad v_\theta = 0 \\ \operatorname{tg}\varepsilon_1 \approx \sin\varepsilon_1 \approx {}^1/_2\sigma c^{-2}(\nu' + {}^4/_3\nu) \end{gathered} \tag{2.5}$$

Интенсивность I и полная излучаемая мощность Π в дальней зоне r будут

$$\begin{gathered} I \approx \begin{cases} {}^1/_2 U_0^2\rho_0\sigma^2 a^4 c^{-1} r^{-2} \cos\varepsilon_1 \exp(-2k_1''r), & |k_1a| \ll 1 \\ {}^1/_2 U_0^2\rho_0 c a^2 r^{-2} \cos\varepsilon_1 \exp\{-2k_1''(r-a)\}, & |k_1a| \gg 1 \end{cases} \\ \Pi \approx \begin{cases} 2\pi U_0^2\rho_0\sigma^2 a^4 c^{-1} \cos\varepsilon_1 \exp(-2k_1''r), & |k_1a| \ll 1 \\ 2\pi U_0^2\rho_0 c a^2 \cos\varepsilon_1 \exp\{-2k_1''(r-a)\}, & |k_1a| \gg 1 \end{cases} \end{gathered} \tag{2.6}$$

Если не учитывать вязкости ($\nu' = 0$, $\nu = 0$), то все формулы (2.3) — (2.6) совпадают с результатами работы [1]. Отсюда

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\Pi}{\Pi_0} \approx \begin{cases} e^{-2k_1''r}\cos\varepsilon_1, & |k_1a| \ll 1 \\ e^{-2k_1''(r-a)}\cos\varepsilon_1, & |k_1a| \gg 1 \end{cases} \tag{2.7}$$

Здесь I_0 и Π_0 — значения I и Π без учета вязкости, т. е. при $\nu' = 0$, $\nu = 0$.

Из этих формул видно, что на больших расстояниях r от пульсирующей сферы учет вязкости будет иметь более существенное значение для кототких волн и менее существенное для длинных волн.

3. Дипольный источник. Если в формуле (1.1) положить $n = 1$, то получим так называемый акустический диполь. В этом случае вместо (1.9) и (1.10) имеем

$$\begin{gathered} p = p_0 + \rho_0[\sigma + (\nu' + {}^4/_3\nu)k_1^2 i]A_1h_1(k_1r)\cos\theta\exp\{i({}^1/_2\pi - \sigma t)\} \\ v_r = [A_1k_1h_1'(k_1r) - 2r^{-1}B_1h_1(k_2r)]\cos\theta\exp(-\sigma t i) \\ v_\theta = -r^{-1}[A_1h_1(k_1r) - B_1\{h_1(k_2r) + k_2rh_1'(k_2r)\}\sin\theta\exp(-\sigma t i) \\ R_x = {}^4/_3\pi a^2[\rho_0\sigma i(1 + 2\nu\sigma^{-1}k_1^2 i)A_1h_1(k_1a) - 2\mu\{A_1k_1^2h_1''(k_1a) - \\ - 2k_2a^{-1}B_1h_1'(k_2a)\}]\exp(-\sigma t i) \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь A_1 и B_1 определяются из формул (1.7), положив $n = 1$ и $U_1 = U_0$.

Для дальнейшего обсуждения формул (3.1) рассмотрим только случай малой вязкости, т. е. $\nu' \ll \sigma a^2$, $\nu' \ll \sigma a^2$. Применяя (2.2) к (3.1), получим

$$\begin{gathered} p \approx p_0 + U_0\rho_0\sigma a^2 h_1(k_1r)[\xi_1(k_1, \nu^*)]^{-1}\cos\theta\exp\{i(2\varepsilon_1 + {}^1/_2\pi - \sigma t)\} \\ v_r \approx U_0^2a^2[\xi_1(k_1, \nu^*)]^{-1}\cos\theta[k_1h_1'(k_1r) + \\ + 2r^{-2}\nu^* h_1(k_1a)\exp\{-k_2''(r-a) + i[k_2'(r-a) - {}^1/_4\pi)\}]e^{-\sigma t i} \\ v_\theta \approx -r^{-1}U_0^2a^2[\xi_1(k_1, \nu^*)]^{-1}\sin\theta[h_1(k_1r) - \\ - h_1(k_1a)\exp\{-k_2''(r-a) + ik_2'(r-a)\}]e^{-\sigma t i} \\ R_x \approx {}^4/_3\pi a^4U_0\rho_0\sigma(1 + {}^1/_2\nu\sigma^{-1}a^{-2}i)(\xi_1(k_1, \nu^*)]^{-1}h_1(k_1a)\exp\{i({}^1/_2\pi - \sigma t)\} \end{gathered} \tag{3.2}$$

Здесь

$$\xi_1(k_1, \nu^*) = k_1a^2h_1'(k_1a) + (2\nu^*)^{1/2}(1 + i)h_1(k_1a), \qquad \nu^* = (\nu / \sigma)^{1/2}$$

В дальней зоне акустического поля давление и скорость точки на основании (2.2) определяются следующими формулами:

$$\begin{gathered} p \approx p_0 + \frac{U_0\rho_0\sigma a^2\cos\theta}{k_1r\xi_1(k_1, \nu^*)} e^{-k_1''r}\exp\left\{i\left(k_1'r - \sigma t + 2\varepsilon_1 - \frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ v_r \approx \frac{U_0a^2\cos\theta}{r\xi_1(k_1, \nu^*)} e^{-k_1''r}\exp\left\{i\left(k_1'r - \sigma t - \frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ v_\theta \approx \frac{U_0a^2\sin\theta}{r^2\xi_1(k_1, \nu^*)} e^{-k_1''r}\exp\{i(k_1'r - \sigma t)\} \end{gathered} \tag{3.3}$$

Интенсивность и полная излучаемая мощность в дальней зоне будут равны

$$I \approx \frac{U_0^2\rho_0 c a^4 \cos 2\varepsilon_1}{2r^2|\xi_1(k_1, \nu^*)|^2}\cos^2\theta \exp(-2k_1''r)$$

$$\Pi \approx \frac{2\pi U_0^2\rho_0 c a^4 \cos 2\varepsilon_1}{3|\xi_1(k_1, \nu^*)|^2}\exp(-2k_1''r) \qquad (3.4)$$

Далее рассмотрим следующие два случая:

а) $|k_1a| \ll 1$, б) $|k_1a| \gg 1$

После несложных элементарных вычислений в (2.3) и (2.4), отделяя действительные части, получим

при $|k_1a| \ll 1$ (для длинных волн)

$$p \approx p_0 + {}^1/_2 U_0\rho_0 a^3\sigma\omega r^{-1}|\zeta|^{-1}\cos\theta\exp(-k_1''r)\cos(k_1'r - \sigma t + \varepsilon^* + \varepsilon_1)$$

$$v_r \approx {}^1/_2 U_0\omega^2 a^3 r^{-1}|\zeta|^{-1}\cos\theta\exp(-k_1''r)\cos(k_1'r - \sigma t + \varepsilon^*) \qquad (3.5)$$

$$v_\theta \approx 0$$

$$I \approx {}^1/_8 U_0^2 a^6\omega^3\sigma|\zeta|^{-2}\cos^2\theta\cos\varepsilon_1\exp(-2k_1''r)$$

$$\Pi \approx {}^1/_6 U_0^2 a^6\omega^3\sigma|\zeta|^{-2}\cos\varepsilon_1\exp(-2k_1''r)$$

$$R_x \approx -{}^2/_3\pi U_0\rho_0\sigma a^3|1 + {}^1/_2(2\nu^*)^{1/2}a^{-1}(1+i)|\sin(\sigma t + \varepsilon_2 - \varepsilon_4)$$

Здесь

$$\zeta = 1 - {}^1/_2(2\nu^*)^{1/2}a^{-1}(1+i), \qquad \varepsilon^* = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \pi$$

$$\zeta = |\zeta|\exp(\varepsilon_2 i), \qquad 1 + 2\nu^* a^{-2} i = \exp(\varepsilon_4 i), \qquad k_1'a = \omega$$

При $|k_1a| \gg 1$ (для коротких волн)

$$p \approx p_0 + U_0\rho_0 acr^{-1}\cos\theta\,|\zeta_1|\exp\{-k_1'(r-a)\}\cos(k_1'r - \sigma t - \omega + 2\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$$

$$v_r \approx U_0 ar^{-1}\cos\theta\,|\zeta_1|\exp\{-k_1''(r-a)\}\cos(k_1'r - \sigma t - \omega - \varepsilon_3)$$

$$v_\theta \approx 0$$

$$I \approx {}^1/_2 U_0^2\rho_0 a^2 cr^{-2}|\zeta_1|^2\cos^2\theta\cos 2\varepsilon_1\exp\{-2k_1''(r-a)\}$$

$$\Pi \approx {}^2/_3\pi U_0^2 a^2 c\,|\zeta_1|^2\cos 2\varepsilon_1\exp\{-2k_1''(r-a)\} \qquad (3.6)$$

$$R_x \approx {}^4/_3\pi a^3 U_0\rho_0 c|\zeta_1|\cos(\sigma t + \varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$$

Здесь

$$\zeta_1 = 1 - 2(\nu^*)^{1/2}(\omega a)^{-1}\exp\{-i(\varepsilon_1 + {}^1/_4\pi)\}$$

$$\{1 + 2(\nu^*)^{1/2}(\omega a)^{-1}\exp\{-i(\varepsilon_1 + {}^1/_4\pi)\} = |\zeta_1|\exp(-\varepsilon_3 i)$$

Если не учитывать вязкости среды ($\nu' = 0$, $\nu = 0$), то все формулы этого пункта совпадают с результатами работы [1].

Можно написать следующие отношения:

$$\frac{I}{I_0} \approx \frac{\Pi}{\Pi_0} \approx \qquad (3.7)$$

$$\approx \begin{cases} |1 + {}^1/_2(2\nu^*)^{1/2}a^{-1}(1+i)|^2\cos 2\varepsilon_1\exp(-2k_1''r) & \text{при } |k_1a| \ll 1 \\ |1 - 2(\nu^*)^{1/2}(\omega a)^{-1}\exp\{-i(\varepsilon_1 + {}^1/_4\pi)\}|^2\cos 2\varepsilon_1\exp\{-2k_1''(r-a)\} & \text{при } |k_1a| \gg 1 \end{cases}$$

Из анализа пунктов 2 и 3 можно заметить, что диполь менее эффективен, чем пульсирующий шар, характеризуемый формулами (2.5) и (2.6), в отношении излучения при низких частотах (см. (2.6) и (3.5), (3.6)). Однако следует заметить, что излучение диполя носит направленный характер. В случае диполя интенсивность в дальней зоне пропорциональна $\cos^2\theta$ и максимальна по направлениям при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ и равна нулю при $\theta = {}^1/_2\pi$, т. е. в экваториальном направлении. Следует также отметить, что в случае пульсирующей сферы скорость точки в среде направлена по радиусу (радиальная) сферы, а в случае диполя в каждой точке среды ее скорость определяется двумя составляющими как радиальной, так и тангенциальной (см. (3.5) и (3.6)). Из (3.5) и (3.6) вытекает, что

$$\frac{R_x}{(R_x)_{\nu'=\nu=0}} \approx \begin{cases} |1 + 1/2(2\nu^*)^{1/2}a^{-1}(1+i)|\cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_4) & \text{при } |k_1a| \ll 1 \\ |1 - 2(\nu^*)^{1/2}(\omega a)^{-1}\exp(-i\varepsilon_1 - {}^1/_4\pi i)|\cos(\varepsilon_1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4) & \text{ри } |k_1a| \gg 1 \end{cases} \qquad (3.8)$$

4. Излучение сложного сферического источника. Теперь разберем общий случай излучения сферы радиуса a, поверхность которой пульсирует так, что

$$v_r = U(\theta)\exp(-\sigma ti), \qquad v_\theta = 0 \tag{4.1}$$

Здесь $U(\theta)$ — любая функция от θ. Прежде всего разлагаем амплитуду радиальной скорости $U(\theta)$ в ряд по функциям Лежандра

$$U(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n P_n(\cos\theta), \qquad U_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^\pi U(\theta) P_n(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta \tag{4.2}$$

В соответствии с этим и на основании п.1 находим решение системы (1.2), удовлетворяющее (4.1), в виде

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n(k_1 r) P_n(\cos\theta)\, e^{-\sigma ti}, \quad \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} B_n h_n(k_2 r)\frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta)\, e^{-\sigma ti} \tag{4.3}$$

где A_n и B_n определяются по формулам (1.7). Для давления, скорости частицы и результирующей силы реакции в направлении оси x получим формулы:

$$p = p_0 + \rho_0 i\{\sigma + (\nu' + {}^4/_3\nu)k_1^2 i\}\sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n(k_1 r) P_n(\cos\theta)\, e^{-\sigma ti}$$

$$v_r = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n k_1 h_n'(k_1 r) - \frac{n(n+1)}{r} B_n h_n(k_2 r)\right] P_n(\cos\theta)\, e^{-\sigma ti} \tag{4.4}$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}[A_n h_n(k_1 r) - B_n\{h_n(k_2 r) + k_2 r h_n'(k_2 r)\}]\frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta)\, e^{-\sigma ti}$$

$$R_x = {}^4/_3\pi a^2[\rho_0 i(\sigma + 2\nu k_1^2 i) A_1 h_1(k_1 a) - 2\mu\{A_1 k_1^2 h_1''(k_1 a) - 2k_2 a^{-1} B_1 h_1'(k_2 a)\}]\exp(-\sigma ti)$$

Ввиду сложности формул (4.4) рассмотрим случай малой вязкости. Так как

$$k_1 = k_1' + k_1'' \approx \frac{\sigma}{c} e^{\varepsilon_1 i}, \qquad k_2 = k_2' + ik_2'' = (\nu^*)^{-1/2} e^{1/4\pi i}$$

то при малых значениях ν' и ν величина $|k_2|$ очень велика по сравнению с величиной $|k_1|$. Следовательно, $\exp(-k_1''r) \ll \exp(-k_2''r)$. Вследствие этого в дальнейшем будем пренебрегать членами, содержащими множитель $\exp(-k_2''r)$ по сравнению с другими членами. Кроме того, следуя Морзу, применим обозначения

$$h_n'(u) = iD_n' e^{\delta_n' i}, \qquad h_n(u) = E_n' e^{\mu_n' i} \tag{4.5}$$

Предельные значения амплитуд D_n' и E_n' и фазовых углов δ_n' и μ_n' определяются следующими приближенными формулами:

$$\text{при } \omega = k_1' a = \frac{\sigma}{c} a = \frac{2\pi a}{\lambda} \gg n + \frac{1}{2}$$

$$D_n' \approx \omega^{-1}\exp(-k_1''a) = D_n\exp(-k_1''a)$$

$$E_n' \approx \omega^{-1}\exp(-k_1''a) = D_n\exp(-k_1''a)$$

$$\delta_n' \approx \omega - \varepsilon_1 - {}^1/_2(n+1)\pi = \delta_n - \varepsilon_1, \qquad \mu_n' \approx \omega - \varepsilon_1 - {}^1/_2(n+1)\pi = \delta_n - \varepsilon_1$$

$$\text{при } \omega = k_1' a = \frac{\sigma a}{c} = \frac{2\pi a}{\lambda} \ll n + \frac{1}{2}$$

$$D_0' \approx \omega^{-2} = D_0, \qquad \delta_0' = {}^1/_3\omega^3\cos 3\varepsilon_1 - 2\varepsilon_1 = \delta_0\cos 3\varepsilon_1 - 2\varepsilon_1$$

$$D_n' \approx 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)(n+1)\omega^{-(n+2)} = D_n \tag{4.7}$$

$$\delta_n' \approx -\frac{n\omega^{2n+1}\cos[(2n+1)\varepsilon_1]}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)(n+1)} - (n+2)\varepsilon_1 = \delta_n\cos[2n+1)\varepsilon_1] -$$
$$-(n+1)\varepsilon_1\,(n \neq 0)$$

$$E_0' \approx D_0\omega, \qquad \mu_0' \approx 3\omega^{-1}\delta_0\cos\varepsilon_1 - \varepsilon_1 - {}^1/{}_2\pi$$

$$E_n' \approx D_n\frac{\omega}{n+1}, \qquad \mu_n' \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)\delta_n\omega^{-1}\cos[(2n+1)\varepsilon_1] - (n+1)\varepsilon_1 - \frac{\pi}{2} \qquad (n \neq 0)$$

где значения функций D_n (амплитуд) и δ_n (фазовых углов), зависящие от ω, определяются по таблицам [1]. Поэтому предельные значения D_n', E_n', δ_n', μ_n' легко будут определены при помощи таблиц функций D_n и δ_n в зависимости от ω и ε_1.

Теперь, учтя изложенные допущения и обозначения, получим следующие выражения для давления, скорости частицы и интенсивности в точке (r, θ, ψ), а также для полной излучаемой мощности в дальней зоне в виде

$$p \approx p_0 + \frac{\rho_0 c}{k_1' r}e^{-k_1'' r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n\cos(k_1' r - \sigma t - \delta_n' - {}^1/{}_2(n+1)\pi + \varepsilon_1 - \varepsilon_n')}{D_n'\,|\Delta_n|}P_n(\cos\theta)$$

$$v_r \approx \frac{1}{k_1' r}e^{-k_1'' r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n\cos(k_1' r - \sigma t - \delta_n' - {}^1/{}_2(n+1)\pi - \varepsilon_1 - \varepsilon_n')}{D_n'\,|\Delta_n|}P_n(\cos\theta)$$

$$v_\theta \approx \frac{1}{(k_1')^2 r}e^{-k_1'' r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n\cos(k_1' r - \sigma t - \delta_n' - {}^1/{}_2(n+1)\pi - 2\varepsilon_1 - \varepsilon_n')}{D_n'\,|\Delta_n|}\frac{d}{d\theta}P_n(\cos\theta)$$

$$I \approx \frac{\rho_0 U_0^2 c a^2}{2r^2}F_r(\theta)\,e^{-2k_1'' r} \qquad (4.8)$$

$$F_r(\theta) \approx \left(\frac{1}{\omega U_0}\right)^2\sum_{\substack{n=0\\m=0}}^{\infty}\frac{U_n U_m P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)}{D_n' D_m'\,|\Delta_n|\,|\Delta_m|}\cos\left(\delta_n' - \delta_m' + \frac{n+m}{2}\pi + 2\varepsilon_1\right)$$

$$\Pi \approx \frac{2\pi a^2\rho_0 c}{\omega^2}e^{-2k_1'' r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n^2\cos 2\varepsilon_1}{(2n+1)(D_n')^2\,|\Delta_n|^2}$$

Здесь

$$|\Delta_n| = |1 + n(n+1)(\nu^*)^{1/2}E_n'(D_n'\omega a)^{-1}\exp\{i(\mu_n' - \delta_n' - \varepsilon_1 - {}^1/{}_4\pi)\}|$$
$$\Delta_n = |\Delta_n|\exp(\varepsilon_n' i)$$

а $F_r(\theta)$ — функция углового распределения интенсивности для излучения сферы в вязкой среде.

Если не учитывать вязкости, то из (4.8) получим выражения, совпадающие с результатами Морза [1].

Отсюда

$$\frac{I}{I_0} = \frac{F_r(\theta)}{[F_r(\theta)]_0}e^{-2k_1'' r} \qquad (4.9)$$

$$[F_r(\theta)]_0 = (\omega U_0)^{-2}\sum_{\substack{n=0\\m=0}}^{\infty}\frac{U_n U_m P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)}{D_n D_m}\cos\left(\delta_n - \delta_m + \frac{n-m}{2}\pi\right)$$

$$\frac{\Pi}{\Pi_0} = e^{-2k_1'' r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n^2\cos 2\varepsilon_1}{(2n+1)(D_n')^2\,|\Delta_n|^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n^2}{(2n+1)D_n^2}\right]^{-1}$$

Из (4.9) нетрудно видеть, что, зная отношение функций углового распределения интенсивности в вязкой и идеальной средах, можно выяснить влияние вязкости на интенсивность звуковых волн в дальней зоне среды.

Если $\omega = 2\pi a / \lambda$ достаточно мало, все члены, кроме первого, в полученных рядах могут считаться малыми, то, используя (4.7), получим для длинных волн

$$p \approx p_0 + U_0\rho_0\sigma a^2 r^{-1} \exp(-k_1''r) \cos (k_1'r - \sigma t - \delta_0' + \varepsilon_1 - {}^1/_2\pi)$$

$$v_r \approx U_0\omega a r^{-1} \exp (-k_1''r) \cos (k_1'r - \sigma t - \delta_0' - \varepsilon_1 - {}^1/_2\pi) \tag{4.10}$$

$$v_\theta \approx 0$$

$$I \approx {}^1/_2 U_0{}^2\omega\sigma a^3 r^{-2} \cos 2\varepsilon_1 \exp (-2k_1''r)$$

$$\Pi \approx 2\pi a^3 U_0{}^2\omega\sigma \cos 2\varepsilon_1 \exp (-2k_1''r)$$

Из (4.8) видно, что формулы для интенсивности и полной излучаемой мощности точно совпадают с формулами (2.6).

На этих низких частотах звук излучается с одинаковой интенсивностью во всех направлениях, но величина интенсивности и количество излучаемой энергии уменьшаются по закону показателей функции в зависимости от расстояния r и стремятся к нулю при $r \to \infty$ (как и в случае излучения цилиндра в вязкой среде [6]).

Когда длина волны почти одинакова с радиусом сферы, возникают сложные интерференции, однако все величины в (4.10) быстро уменьшаются с увеличением r, и влияние вязкости становится существенным.

5. Излучение точечного источника, расположенного на поверхности сферы. Рассмотрим случай точечного источника, расположенного на поверхности сферы в полюсе ($\theta = 0$); будем считать, что скорость на поверхности равна нулю везде, кроме малой круговой площади Δ, где скорость направлена по нормали к поверхности Δ. Определение функции $U(\theta)$ запишется так:

$$U(\theta) = \begin{cases} V_0, & 0 \leqslant \theta \leqslant \Delta / a \\ 0, & \Delta / a \leqslant \theta < \pi \end{cases}$$

Коэффициент U_n определяется выражением [7]

$$U_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) U_0 \int\limits_0^{\Delta/a} P_n (\cos\theta) \sin\theta \, d\theta \underset{\Delta \to 0}{\to} \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 U_0$$

поскольку $P_n(1) = 1$. В этом случае интенсивность и полная излучаемая мощность в дальной зоне среды определяются из формул (3.8) в виде

$$I \approx \rho_0 c U_0{}^2 \left(\frac{\Delta^4}{32a^2r^2}\right) F_r(\theta)\, e^{-2k_1''r} \tag{5.1}$$

$$F_r(\theta) = \frac{1}{\omega^2} \sum_{\substack{n=0 \\ m=0}}^{\infty} \frac{(2n+1)(2m+1) P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta)}{D_n'D_m' \,|\Delta_n|\, |\Delta_m|} \cos\left(\delta_n' - \delta_m' + \frac{n+m}{2}\pi + 2\varepsilon\right)$$

$$\Pi = \rho_0 c U_0{}^2 \left(\frac{\Delta^4}{32a^2}\right) \frac{4\pi}{\omega^2} e^{-2k_1''r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\cos 2\varepsilon_1}{(D_n')^2\, |\Delta_n|^2}$$

При очень низких частотах важны только первые члены этих рядов и формулы (5.1) подобны (4.10) с другой производительностью источника.

Так как величины ν' и ν, а также $\nu'\sigma / c^2$ и $\nu\sigma / c^2$ есть величины малые по сравнению с единицей, то для заданного радиуса a величины k_1'' и ε_1 будут малыми по сравнению с единицей. Тогда в (4.6) можно написать следующие приближения:

при $\omega = k_1'a = 2\pi a / \lambda \gg n + {}^1/_2$

$$D_n' \approx E_n' \approx D_n, \qquad \delta_n' \approx \mu_n' \approx \delta_n$$

$$|\Delta_n| \approx 1 + \frac{\sqrt{2}n(n+1)}{\omega a} \sqrt{\nu^*} + \frac{n^2(n+1)^2\nu^*}{\omega^2 a^2}$$

при $\omega = k_1'a = 2\pi a / \lambda \leqslant n + {}^1/_2$

$$D_n' \approx D_n, \quad E_n' \approx \frac{\omega}{n+1} D_n, \quad \delta_n' \approx \delta_n \; [\text{для } (2n+1)\,\varepsilon_1 \ll 1] \tag{5.2}$$

$$\mu_n' - \delta_n' \approx \begin{cases} \delta_0(3\omega^{-1} - 1) - {}^3/_4\pi, & n = 0 \\ \delta_n / n - {}^3/_4\pi, & n > 0 \end{cases}$$

$$|\Delta_n| = 1 + 2n(\nu^*)^{1/2} a^{-1} \cos(\delta_n / n - {}^3/_4\pi) + n^2\nu^* a^{-2} \cos^2(\delta_n / n - {}^3/_4\pi)$$

Функции $F_r(\theta)$ с увеличением r уменьшаются по закону показательной функции и стремятся к нулю при $r \to \infty$. Поэтому вдали от источника звука кривые распределения интенсивности в вязкой среде существенно отличаются от тех же кривых в идеальной среде. С увеличением частот (от низких до высоких) расхождение этих кривых по углу θ будет увеличиваться, что будет означать существенное влияние вязкости для коротких волн.

6. Излучение поршня, расположенного на сфере. Теперь перейдем к исследованию акустического поля поршня радиуса $a \sin \theta_0$, вставленного заподлицо с поверхностью сферы, способного колебаться без трения. Если угол θ_0 невелик, то распределение скоростей по сфере можно представить следующим образом:

$$U(\theta) = \begin{cases} U_0, & 0 \leqslant \theta < \theta_0 \\ 0, & \theta_0 < \theta < \pi \end{cases}$$

В этом случае

$$U_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) U_0 \int\limits_{\cos\theta_0}^{1} P_n(x)\,dx = \frac{U_0}{2} [P_{n-1}(\cos\theta_0) - P_{n+1}(\cos\theta_0)] \tag{6.1}$$

В этом выражении следует положить в случае $n = 0$ $P_{-1}(x) = 1$. Поставив (6.1) в (4.8), получим ряды для вычисления I и П в виде

$$I \approx {}^1/_2 \rho_0 c U_0^2 (a / r)^2 F_r(\theta) \exp(-2k_1'' r)$$

$$F_r(\theta) = \frac{1}{4\omega^2} \sum_{\substack{n=0 \\ m=0}}^{\infty} \frac{[P_{n-1}(\cos\theta_0) - P_{n+1}(\cos\theta_0)]\,[P_{m-1}(\cos\theta_0) - P_{m+1}(\cos\theta_0)]}{D_n' D_m' \,|\Delta_n|\,|\Delta_m|} \times$$

$$\times P_n(\cos\theta)\, P_m(\cos\theta) \cos\{\delta_n' - \delta_m' + {}^1/_2(n-m)\pi + 2\varepsilon_1\} \tag{6.2}$$

$$\Pi = \frac{\pi a^2 c \rho_0 U_0^2 \cos 2\varepsilon_1}{2\omega^2} e^{-2k_1'' r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[P_{n-1}(\cos\theta_0) - P_{n+1}(\cos\theta_0)]^2}{(2n+1)(D_n')^2 |\Delta_n|^2}$$

Если длина волны велика в сравнении с $2\pi a$, то давление и интенсивность выражаются такими же формулами, как и в случае точечного источника с другой производительностью.

Поступило 10 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Морз Ф. Колебания и звук. М., Гостехиздат, 1949.
2. Коненков Ю. К. О волнах в вязкой жидкости. Акуст. ж., 1962, т. 8, вып. 9.
3. Ламб Г. Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, Изд. 3, ч. 2. М.— Л., Гостехиздат, 1948.
5. Ватсон Д. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1940.
6. Цой П. И. Излучение цилиндра в вязкой среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, вып. 5, стр. 82—92.
7. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения, Изд. 2. М.— Л., Физматгиз, 1963.