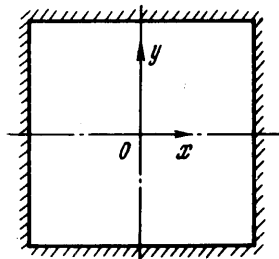


## РАСЧЕТ ВТОРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

М. Х. ИБРАГИМОВ, В. С. ПЕТРИЦЕВ, Г. И. САБЕЛЕВ

(Обнинск)

В турбулентных потоках жидкости в прямых каналах некруглого поперечного сечения существует движение жидкости в плоскости, перпендикулярной направлению течения основного потока, называемое вторичным течением. Существование вторичных течений в прямых каналах было обнаружено в опытах Никурадзе [1] и впоследствии подтверждено исследованиями других авторов [2-6].



Фиг. 1

Вторичное течение оказывает заметное влияние на процессы переноса в турбулентных потоках, чем и определяется все возрастающий интерес к рассматриваемому явлению. Изучение вторичного течения ограничено, однако, рамками экспериментальных исследований. Лишь в работах [3, 4] ставится вопрос об описании явления уравнениями, предполагающими возможность проведения расчетов и придающими экспериментальным исследованиям соответствующую направленность.

Данная работа посвящена рассмотрению вопросов, связанных с расчетом вторичного течения. Предложена схема численного решения задачи. В основу проводимых расчетов положены уравнения Рейнольдса [3] и обобщающие зависимости по распределению интенсивности турбулентности по сечению канала [7].

1. Рассмотрим задачу о течении вязкой жидкости в канале квадратного сечения. Пусть оси координат  $x, y$  расположены так, как это показано на фиг. 1, а ось  $z$  направлена вдоль оси канала. В случае, когда в направлении движения основного потока, т. е. оси  $z$ , характеристики течения не меняются, движение жидкости в плоскости  $x, y$  можно, согласно [3] описать, следующими уравнениями:

$$U \frac{\partial \Omega}{\partial x} + V \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (u^2 - v^2) + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) uv \quad (1.1)$$

$$\Omega = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь  $\sqrt{u^2}, \sqrt{v^2}$  — составляющие интенсивности турбулентности по осям координат  $x, y$ ;  $U, V$  — компоненты скорости вторичного течения. Вдоль границы потока  $U = V = 0$ .

Задача о расчете вторичного течения является замкнутой, если известно распределение по сечению канала корреляционных функций  $u^2 - v^2$  и  $uv$ .

2. По данным работ [3] и [4] представляется возможным оценить выражения

$$\alpha = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) uv, \quad \beta = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (u^2 - v^2)$$

Почти во всей области течения справедливо соотношение  $\alpha \ll \beta$ . Задача упрощается, если принять  $\alpha = 0$ . Если ввести далее безразмерные переменные

$$U^* = \frac{U}{W_0}, \quad V^* = \frac{V}{W_0}, \quad x^* = \frac{x}{m}, \quad y^* = \frac{y}{m}$$

где  $2m$  — сторона квадрата, а  $W_0$  — максимальное значение составляющей скорости потока вдоль оси  $z$ , то уравнение (1.1) сводится при этом к виду

$$U \frac{\partial \Omega}{\partial x} + V \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad F = u^2 - v^2 \quad (2.1)$$

(Здесь  $U, V, \Omega$  и т. д. — функции уже безразмерные)

В соответствии с известным подходом соотношения (1.2) преобразуются так:

$$-\Omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \quad U = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.2)$$

В работе [7] на основе обобщения опытных данных для каналов некруглого поперечного сечения получена зависимость интенсивности пульсаций скорости от режима движения и координат. Согласно этим результатам функция  $F(x, y)$  имеет вид

$$F = N [e^{(ax+by)} - e^{(cx+dy)}], \quad N = \kappa(1 - W_m)^2 W^2 \quad (2.3)$$

где  $W_m$  — безразмерная средняя скорость по сечению канала,

$$\kappa = 0.0342, \quad a = 2.34, \quad b = -0.8, \quad c = 1.54, \quad d = 0$$

Распределение скорости  $W(x, y)$ , входящее в определение функции  $F(x, y)$ , может быть определено по методике работы [8].

Соотношения (2.1), (2.2) и (2.3) были положены в основу расчетов вторичного течения в турбулентном потоке жидкости в канале квадратного сечения.

3. Задача решалась разностным методом. Расчетная область  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  покрывалась сеткой из координатных прямых  $x_i$  и  $y_k$  ( $i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n$ ) с шагом  $h$ . Строился разностный аналог системы (2.1), (2.2) путем замены дифференциальных операторов разностными.

Разностный аналог уравнения (2.1)

$$-a_{ik}\Omega_{i-1k} - c_{ik}\Omega_{i+1k} - b_{ik}\Omega_{ik-1} - d_{ik}\Omega_{ik+1} + e_{ik}\Omega_{ik} = f_{ik}$$

$$a_{ik} = \frac{A}{h^2} + R \frac{U_{ik}}{h}, \quad c_{ik} = \frac{A}{h^2}, \quad A = \frac{1}{1 + 0.5RhU_{ik}} \quad (U_{ik} \geq 0)$$

$$a_{ik} = \frac{A}{h^2}, \quad c_{ik} = \frac{A}{h^2} - R \frac{U_{ik}}{h}, \quad A = \frac{1}{1 - 0.5RhU_{ik}} \quad (U_{ik} < 0)$$

Аналогичные выражения имеют место для  $b_{ik}$  и  $d_{ik}$

$$e_{ik} = a_{ik} + c_{ik} + b_{ik} + d_{ik}$$

Для уравнения (2.2) использовалась обычная в таких случаях аппроксимация на шаблоне из пяти точек.

В основу схемы решения была положена схема стабилизирующей поправки [9] с операторами

$$\Lambda' \Omega = e'_{ik} \Omega_{ik} - a_{ik} \Omega_{i-1k} - b_{ik} \Omega_{ik-1}$$

$$\Lambda'' \Omega = e''_{ik} \Omega_{ik} - c_{ik} \Omega_{i+1k} - d_{ik} \Omega_{ik+1}$$

Схема решения в рабочем ее виде

$$(\sigma_1 + e'_{1ik}) \Omega_{ik}^{l+1/2} - a_{1ik} \Omega_{i-1,k}^{l+1/2} - b_{1ik} \Omega_{i,k-1}^{l+1/2} = (\sigma_1 - e''_{1ik}) \Omega_{ik}^l + c_{1ik} \Omega_{i+1,k}^l + d_{1ik} \Omega_{i,k+1}^l - g_{ik} \psi_{ik}^l + f_{1ik}$$

$$(\sigma_1 + e''_{1ik}) \Omega_{ik}^{l+1} = \sigma_1 \Omega_{ik}^{l+1/2} + e''_{1ik} \Omega_{ik}^l + c_{1ik} (\Omega_{i+1,k}^{l+1} - \Omega_{i+1,k}^l) + d_{1ik} (\Omega_{i,k+1}^{l+1} - \Omega_{i,k+1}^l) - g_{ik} (\psi_{ik}^{l+1} + \psi_{ik}^l)$$

$$(\sigma_2 + e'_{2ik}) \psi_{ik}^{l+1/2} - a_{2ik} \psi_{i-1,k}^{l+1/2} - b_{2ik} \psi_{i,k-1}^{l+1/2} = (\sigma_2 - e''_{2ik}) \psi_{ik}^l + c_{2ik} \psi_{i+1,k}^l + d_{2ik} \psi_{i,k+1}^l + \Omega_{ik}^{l+1/2} \quad (3.1)$$

$$(\sigma_2 + e''_{2ik}) \psi_{ik}^{l+1} = \sigma_2 \psi_{ik}^{l+1/2} + e''_{2ik} \psi_{ik}^l + c_{2ik} (\psi_{i+1,k}^{l+1} - \psi_{i+1,k}^l) + d_{2ik} (\psi_{i,k+1}^{l+1} - \psi_{i,k+1}^l)$$

$$(i = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, n)$$

$$e_{ik}' \geq a_{ik} + b_{ik}, \quad e_{ik}'' \geq c_{ik} + d_{ik}, \quad e_{ik}' + e_{ik}'' = e_{ik}$$

$$g_{ik} = \frac{2}{h^2} (c_{1ik} \delta_i^n + d_{1ik} \delta_k^n), \quad \delta_m^n = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

В представлении для вектора

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Omega \\ \Psi \end{pmatrix}$$

схема решения записывается так:

$$\begin{aligned} (\Sigma + E') \Phi_{ik}^{l+1/2} - A \Phi_{i-1, k}^{l+1/2} - B \Phi_{i, k-1}^{l+1/2} &= (\Sigma - E'') \Phi_{i, k}^l + C \Phi_{i+1, k}^l + D \Phi_{i, k+1}^l + F \\ (\Sigma + E'') \Phi_{i, k}^{l+1} &= \Sigma \Phi_{ik}^{l+1/2} + E'' \Phi_{ik}^l + C (\Phi_{i+1, k}^{l+1} - \Phi_{i+1, k}^l) + D (\Phi_{i, k+1}^{l+1} - \Phi_{i, k+1}^l) \end{aligned}$$

Для записи схемы решения введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{1ik} & 0 \\ 0 & a_{2ik} \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} b_{1ik} & 0 \\ 0 & b_{2ik} \end{pmatrix}, & C &= \begin{pmatrix} c_{1ik} & 0 \\ 0 & c_{2ik} \end{pmatrix}, & D &= \begin{pmatrix} d_{1ik} & 0 \\ 0 & d_{2ik} \end{pmatrix} \\ E' &= \begin{pmatrix} e'_{1ik} & 0 \\ -1 & e'_{2ik} \end{pmatrix}, & E'' &= \begin{pmatrix} e''_{1ik} & g \\ 0 & e''_{2ik} \end{pmatrix}, & \Sigma &= \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, & F &= \begin{pmatrix} f_{1ik} \\ f_{2ik} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Приведем здесь данные по скорости сходимости итерационного процесса (3.1). В расчетах матрица коэффициентов  $\Lambda$  была симметричной,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , интервал  $[0, 1]$  разбивался на  $n$  частей. Выход из итераций — при выполнении условия

$$\max_{i, k} \left| \frac{\psi_{ik}^l - \psi_{ik}^{l-1}}{\psi_{ik}^l} \right| < \varepsilon = 0.001, \quad l = l^*$$

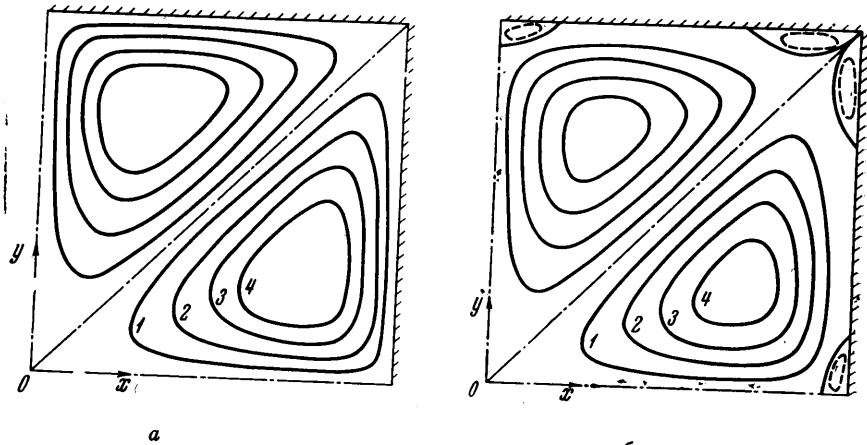
Было принято далее

$$\begin{aligned} \psi_{ik}^0 &= \Omega_{ik}^0 = 0, & f_{1ik} &= 1000, & f_{2ik} &= 0, & \sigma_1 &= \sigma_2 = \sigma \\ n &= 10, & l^* &= 32 \quad (\sigma = 50), & n &= 20, & l^* &= 46 \quad (\sigma = 110) \end{aligned}$$

В случае  $g = 0$  (функция  $\Omega$  равна нулю вдоль всей границы) имели место следующие оценки:

$$n = 10, \quad l^* = 38 \quad (\sigma = 70), \quad n = 20, \quad l^* = 52 \quad (\sigma = 140)$$

4. Из результатов решения задачи следует, что действительно в плоскости сечения квадратного канала имеет место вторичное течение, представляющее собой зам-



Фиг. 2

кнутое движение жидкости в каждом из октантов квадрата. Результаты расчета при числе Рейнольдса  $R = 50\,000$  представлены на фиг. 2, 3, 4.

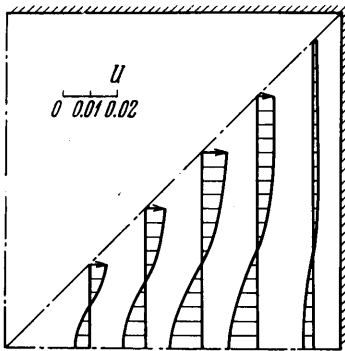
Для функции  $W(x, y)$ , входящей в уравнения (2.3) и (2.4), использовалось в предварительных расчетах значение  $W = 1$ . Сравнение результатов расчета, полученных при таком определении  $W(x, y)$  (при этом функции  $u^2$  и  $v^2$  монотонно возрастают в направлении к стенке канала) и по полю  $W(x, y)$ , рассчитанному по методике работы [8] (при этом для функций  $u^2$  и  $v^2$  имеет место максимум вблизи стенки), показывает, что отличие соответствующих результатов имеется лишь в области, непосредственно прилегающей к стенке.

Чтобы исследовать влияние характера поведения функций  $u^2$  и  $v^2$  в непосредственной близости от стенки на характеристики вторичного течения, было использовано в расчетах следующее определение функции  $N$  в (2.3):

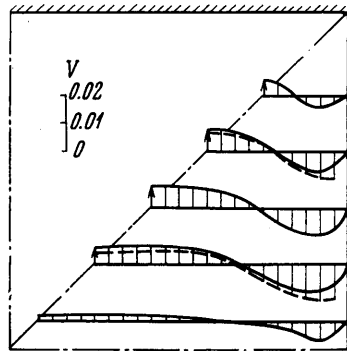
$$N = \gamma \left( \frac{s+1}{s} \right)^3 (1-x^s)(1-y^s) \quad \left( \gamma = 0.0036 + \frac{60}{R} \right) \quad (4.1)$$

На фиг. 2 изображена картина течения в плоскости  $x, y$  в виде линий тока  $\Psi = \text{const}$  ( $\psi_1 = 0.44 \cdot 10^{-3}$ ,  $\psi_2 = 0.88 \cdot 10^{-3}$ ,  $\psi_3 = 1.32 \cdot 10^{-3}$ ,  $\psi_4 = 1.76 \cdot 10^{-3}$ ) и двух значений параметра  $s$  в (4.1):  $s = 30$  (соответствует монотонному возрастанию функций  $u^2$  и  $v^2$  от центра канала вплоть до последнего счетного узла у стенки) и  $s = 10$  (характер поведения функций  $u^2$  и  $v^2$  в пристенной зоне соответствует результатам работы [40]).

Расчеты показали, что в первом случае имеет место образование одного вторичного вихря в элементарной ячейке канала (фиг. 2, а). Во втором случае (фиг. 2, б) в области, прилегающей к стенке, возникают дополнительно два слабых вихря. В известных на сегодня исследованиях не имеется экспериментальных данных о су-



Фиг. 3



Фиг. 4

ществованию такой структуры потока в пристенной зоне. В опубликованных работах [2-5] данные по вторичным течениям в пристенной зоне не приводятся и соответствующие вопросы не обсуждаются. Окончательное решение этого вопроса расчетным путем может быть получено при экспериментальном уточнении характера поведения функций  $u^2$  и  $v^2$  в пристенной зоне.

Расчетные эпоры составляющих скорости вторичного течения  $U$  и  $V$  в октанте квадратного канала представлены на фиг. 3 и 4; на фиг. 4 приведены также экспериментальные эпоры (пунктирные кривые) компоненты  $V$  по данным работы [4].

Близкое согласие результатов расчета и измерений позволяет сделать вывод о том, что в рассматриваемой постановке задачи учитываются основные факторы, приводящие к возникновению и существованию вторичных течений.

Поступило 10 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Nikuradze J. Untersuchungen über turbulente Strömungen in nicht-kreisförmigen Rohren. *Ingr-Arch.*, 1930, Bd. 1, Hft. 3, p. 306.
2. Eckert E. R. G., Irvine T. F. Flow in corners of passages with noncircular cross sections. *Trans. ASME*, 1956, vol. 78, No. 4, p. 709.
3. Brundrett E., Baines W. D. The production and diffusion of vorticity in duct flow. *J. Fluid Mech.*, 1964, vol. 19, No. 3, pp. 375-394.
4. Gessner F. B., Jones J. B. On some aspects of fully-developed turbulent flow in rectangular channels. *Fluid Mech.*, 1965, vol. 23, No. 4, pp. 689-713.
5. Rodet E. Etude de l'écoulement d'un fluid dans un tunnel prismatique de section trapezoidale. Thèse pour obtenir le grade de docteur ès sciences physiques, Grenoble, 1958.
6. Ибрагимов М. Х., Работяшкин Ю. М., Сабелев Г. И., Сидоров В. И., Субботин В. И. Перенос тепла при турбулентном течении жидкости в квадратном канале. Сб. «Жидкие металлы», М., Атомиздат, 1967, стр. 82.

7. Бобков В. П., Ибрагимов М. Х., Сабелев Г. И. Обобщение экспериментальных данных по интенсивности пульсаций скорости при турбулентном течении жидкости в каналах различной формы. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3, стр. 162—165.
8. Ибрагимов М. Х., Исупов И. А., Кобзарь Л. Л., Субботин В. И. Метод расчета касательных напряжений на стенках и распределения скоростей при турбулентном течении жидкости в каналах различной формы. Атомная Энергия, 1966, т. 21, вып. 2.
9. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, Изд-во Новосиб. ун-та, 1966.
10. Laufer J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow. NASA, Rept., 1954, No. 1174.

## ИЗЛУЧЕНИЕ ПУЛЬСИРУЮЩЕЙ СФЕРЫ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

П. И. ЦОЙ

(Тула)

Обсуждается задача об излучении сферы в вязкой среде. Получены асимптотические формулы для давления, скорости, интенсивности и полной излучаемой мощности вдали от сферы, а также для результирующей силы, действующей на сферу в случае малой вязкости. Если не учитывать вязкости, то из данной работы получены результаты, совпадающие с результатами работы [1].

**1. Постановка задачи и ее решение.** Предположим, что сферическая поверхность радиуса  $a$  пульсирует с произвольным распределением скоростей на ее поверхности

$$v_r = U_n P_n(\cos \theta) e^{-\sigma t i}, \quad v_\theta = 0, \quad v_\psi = 0 \quad (1.1)$$

и будет источником распространения звуковых волн в неограниченной вязкой среде, где  $r, \theta, \psi$  — сферические координаты,  $\sigma$  — круговая частота,  $U_n$  — постоянная величина,  $P_n(\cos \theta)$  — функция Лежандра первого рода  $n$ -го порядка,  $n = 0, 1, 2, \dots$

В случае установившегося режима (с временным множителем  $e^{-\sigma t i}$ ), пренебрегая квадратными малыми членами в уравнениях и считая коэффициент вязкости постоянным, можно привести задачу об определении акустического поля пульсирующей сферы в вязкой среде к решению системы двух уравнений Гельмгольца: уравнений потенциала скоростей  $\varphi$  и векторного потенциала вихрей  $\Phi$  [2]

$$\Delta \varphi + k_1^2 \varphi = 0, \quad \Delta \Phi + k_2^2 \Phi = 0 \quad (1.2)$$

$$k_1^2 = \frac{\sigma^2}{c^2} \frac{1 + \sigma c^{-2} (v' + \frac{4}{3} v)}{1 + \sigma^2 c^{-4} (v' + \frac{4}{3} v)^2}, \quad k_2^2 = \frac{\sigma}{v} i \quad (1.3)$$

удовлетворяющее граничным условиям (1.1), где  $c$  — скорость звука при отсутствии вязкости;  $v'$  и  $v$  — кинематические коэффициенты вязкости.

В силу симметрии граничных условий (1.1) и сферической поверхности функции  $\varphi$  и  $\Phi$  не будут зависеть от  $\psi$ , т. е.

$$\varphi = \varphi(r, \theta), \quad \Phi = \Phi(r, \theta) \mathbf{i}_3 \quad (1.4)$$

Здесь  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  — единичные векторы на осях сферической системы координат. Тогда граничные условия (1.1) на основании (1.4) принимают вид

$$\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \Phi) \right\}_{r=a} = U_n P_n(\cos \theta) \quad (1.5)$$

$$\left\{ r \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \Phi)}{\partial r} \right\}_{r=a} = 0$$

Применяя метод разделения переменных и учитывая временный множитель  $e^{-\sigma t i}$ , найдем решение уравнений (1.2), удовлетворяющее условиям (1.4) и (1.5), в виде

$$\varphi = A_n h_n(k_1 r) P_n(\cos \theta) e^{-\sigma t i}, \quad \Phi = B_n h_n(k_2 r) \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) e^{-\sigma t i} \quad (1.6)$$