ЛИТЕРАТУРА

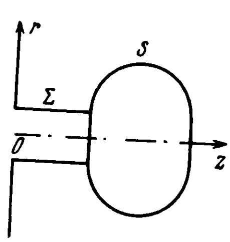
1. Громека И. С. Собрание сочинений. М., Изд-во АН СССР, 1952.
2. Васильев О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. М., Госэнергоиздат, 1958.
3. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
4. Mager A. Approximate solution of isentropic swirling flow through a nozzle. ARS Journal, 1961, vol. 31, No. 8.
5. Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д. Увеличение тяги сопла вращением потока. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
6. Гродзовский Г. Л., Кузнецов Ю. Е. К теории камеры для вихревого охлаждения газового потока. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 10.
7. Дубинский М. Г. О вращающихся потоках газа. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 8.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Г. А. КОНСТАНТИНОВ, Ю. Л. ЯКИМОВ

(Москва)

Описывается приближенный метод решения задачи о нестационарном осесимметричном потенциальном течении идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью. Метод основан на дискретном распределении кольцевых источников на граничных поверхностях, что позволяет свести рассматриваемую задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В основе этого численного метода лежит известный результат, согласно которому любую гармоническую функцию можно представить как потенциал источников, распределенных на границе течения [1, 2]. В работе получено численное решение задачи, в которой свободная поверхность будет поверхностью газового пузыря.



Фиг. 1

1. Рассматривается задача о нахождении поверхности газового пузыря, образующегося на конце круглой трубы, выступающей из бесконечной стенки. Поверхность пузыря существенно нестационарна вследствие разности давлений в трубе и в окружающей жидкости. Жидкость предполагается идеальной, несжимаемой и покоящейся на бесконечности. Предполагается, что ось z совпадает с осью симметрии течения и с направлением силы тяжести, а также, что бесконечная стенка лежит в плоскости $z = 0$. Наличие бесконечной стенки равносильно симметрии течения относительно этой плоскости (фиг. 1).

Потенциал u скорости движения жидкости будет функцией цилиндрических координат r, z и времени t, где r — расстояние до оси симметрии. Функция $u(r, z, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в цилиндрических координатах для осесимметричного случая

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{1.1}$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \tag{1.2}$$

на поверхности трубы Σ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{p(t) - p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2} v(t)^2 - gz = 0 \tag{1.3}$$

на свободной поверхности S. Здесь $p(t)$ — давление в пузыре; p_∞ — давление в бесконечно удаленной от оси симметрии точке, лежащей в плоскости $z = 0$; $v(t)$ — величина скорости перемещения поверхности S; g — величина ускорения силы тяжести; ρ — плотность жидкости.

Для получения дифференциальных уравнений движения свободной поверхности используется условие потенциальности течения

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} u$$

2. Граничные поверхности S и Σ плоскостями, параллельными плоскости $z = 0$, разбиваются на кольца S_j ($j = 0, 1, \ldots, N$), которые покрывают поверхности S и Σ. На каждой из поверхностей S_j берется окружность радиуса $R_j(Z_j)$, потенциал которой имеет линейную плотность Q_j. Потенциал $u(r, z, t)$ в точке (R_j, Z_j) меридиональной полуплоскости zr ищется в виде суммы потенциалов, взятых таким образом окружностей с радиусами R_i, лежащих на кольцах S_i

$$u(r, z, t) \mid R_j, Z_j = -\sum_{i=0}^{N} R_i(t) Q_i(t) s_i(r, z, t) \mid R_j, Z_j \tag{2.1}$$

что равносильно приближению поверхностного потенциала простого слоя, являющегося решением уравнения (1.1), конечной суммой по методу прямоугольников. Здесь

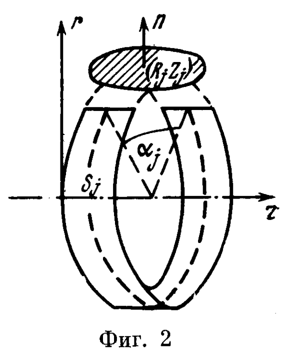
$$s_i(r, z, t) \mid R_j, Z_j = \int_0^{2\pi} \{[r^2 + R_i^2 - 2rR_i \cos\alpha + (z - Z_i)^2]^{-1/2} +$$

$$+ [r^2 + R_i^2 - 2rR_i \cos\alpha + (z + Z_i)^2]^{-1/2}\} \, d\alpha \mid R_j, Z_j \qquad (i \neq j) \tag{2.2}$$

$$s_j(r, z, t) \mid R_j, Z_j = 2\pi \left(\frac{2\alpha_j}{\sigma_j}\right)^{1/2} - \frac{2}{R_j} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\alpha_j}{8} \right| + \int_0^{2\pi} [2R_j^2(1 - \cos\alpha) + (2Z_j)^2]^{-1/2} d\alpha \tag{2.3}$$

причем выражение (2.3) будет приближенным значением потенциала кольца S_j с единичной плотностью. Это приближение строится следующим образом: кольцо S_j с помощью центрального угла $0 < \alpha_j < 2\pi$ (фиг. 2) разбивается на две части, и потенциал той части кольца, которая опирается на угол α_j, заменяется потенциалом круга радиуса ρ_j с центром в точке (R_j, Z_j), касающегося поверхности S_j в этой точке; потенциал же оставшейся части кольца заменяется потенциалом дуги окружности радиуса R_j с центральным углом $2\pi - \alpha_j$, лежащей на кольце. Радиус ρ_j круга определяется из требования, чтобы его площадь была в $2\pi / \alpha_j$ раз меньше площади σ_j кольца, откуда

$$\rho_j = (\alpha_j \sigma_j / 2\pi^2)^{1/2}$$



Фиг. 2

Выражение (2.3) получается предельным переходом из выражения для потенциала выбранной таким образом системы круга и дуги окружности при стремлении произвольной точки (r, z) к точке (R_j, Z_j), лежащей на поверхности S_j.

Имея в виду, что точное решение для потенциала кольца не зависит от угла α_j, который вводится только для получения приближенного решения, потребуем, чтобы производная по α_j от выражения (2.3) равнялась нулю. Это приводит к уравнению

$$\sqrt{\alpha_j} - 2\pi R_j \sqrt{\frac{2_j}{\sigma_j}} \sin\frac{\alpha_j}{4} = 0 \tag{2.4}$$

которое имеет единственный корень $0 < \alpha_j < 2\pi$, если выполнено соотношение

$$\sigma_j < 4\pi R_j^2 \tag{2.5}$$

Таким образом, из уравнения (2.4) при условии (2.3) угол α_j однозначно определяется как функция координат R_j и Z_j. Вводя следующие обозначения:

$$q_i = Q_i R_i, \qquad a_i^2 = r^2 + R_i^2 + (z - Z_i)^2, \qquad a_i^{*2} = r^2 + R_i^2 + (z + Z_i)^2$$

$$k_i = \frac{2rR_i}{a_i^2}, \qquad k_i^* = \frac{2rR_i}{a_i^{*2}}, \qquad f_1(k) = \int_0^{\pi} (1 - k\cos\alpha)^{-1/2} d\alpha$$

имеем

$$s_i(r,\ z,\ t)\mid R_j,\ Z_j = 2\left[\frac{f_1(k_i)}{a_i} + \frac{f_1(k_i^*)}{a_i^*}\right] \Big| R_j,\ Z_j \qquad (i \neq j)$$

$$s_j(r, z, t)\mid R_j, Z_j = 2\left[\pi\left(\frac{2\alpha_j}{\sigma_j}\right)^{1/2} - \frac{1}{R_j}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha_j}{8}\right| + \frac{f_1(k_j^*)}{a_j^*}\right]$$

и

$$u(r,\ z,\ t)\mid R_j,\ Z_j = -\sum_{i=0}^{N} q_i(t)\, s_i(r,\ z,\ t)\mid R_j,\ Z_j \tag{2.6}$$

$$(j = 0,\ 1,\ \ldots,\ N)$$

Аналогично для производных потенциала $u(r,\ z,\ t)$ по пространственным переменным r и z получаем следующие выражения:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{R_j, Z_j} = -\sum_{i=0}^{N} q_i \left.\frac{\partial s_i}{\partial r}\right|_{R_j,\ Z_j} \tag{2.7}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{R_j,\ Z_j} = -\sum_{i=0}^{N} q_i \left.\frac{\partial s_i}{\partial z}\right|_{R_j,\ Z_j} \tag{2.8}$$

$$(j = 0,\ 1,\ \ldots,\ N)$$

где

$$\left.\frac{\partial s_i}{\partial r}\right|_{R_j,\ Z_j} = -2\left[\frac{rf_2(k_i) - R_i f_3(k_i)}{a_i^3} + \frac{rf_2(k_i^*) - R_i f_3(k_i^*)}{a_i^{*3}}\right]\Bigg|_{R_j,\ Z_j\ (i\neq j)}$$

$$\left.\frac{\partial s_j}{\partial r}\right|_{R_j,\ Z_j} = -4\pi^2\frac{1}{\sigma_j}\cos\theta_j + \frac{1}{R_j^2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha_j}{8}\right| - 2\frac{R_i\,[f_2(k_i^*) - f_3(k_i^*)]}{a_i^{*3}}$$

$$\left.\frac{\partial s_i}{\partial z}\right|_{R_j,\ Z_j} = -2\left[\frac{(z - Z_i)\, f_2(k_i)}{a_i^3} + \frac{(z + Z_i)\, f_2(k_i^*)}{a_i^{*3}}\right]\Bigg|_{R_j,\ Z_j\ (i\neq j)}$$

$$\left.\frac{\partial s_j}{\partial z}\right|_{R_j,\ Z_j} = 4\pi^2\frac{1}{\sigma_j}\sin\theta_j - \frac{4z_j f_2(k_j^*)}{a_j^{*3}}$$

$$f_2(k) = \int_0^{\pi}(1 - k\cos\alpha)^{-3/2}\, d\alpha, \qquad f_3(k) = \int_0^{\pi}\cos\alpha\,(1 - k\cos\alpha)^{-3/2}\, d\alpha$$

Здесь θ_j — угол между осью z и касательной в точке $(R_j,\ Z_j)$ к меридиональному сечению поверхности S и Σ, лежащей в плоскости сечения.

Выполнение граничного условия (1.2) на поверхности Σ равносильно выполнению условия

$$\sum_{i=0}^{N} q_i\,(s_{rij}c_{rj} + s_{zij}c_{zj}) = 0 \qquad (j = M + 1, \ldots, N) \tag{2.9}$$

в точках $(R_j,\ Z_j)$, где $c_{rj} = \cos(n,\ r)$, $c_{zj} = \cos(n,\ z)$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности Σ в точке $(R_j,\ Z_j)$; s_{rij}, s_{zij} — значения функций $\partial s_i / \partial r$, $\partial s_i / \partial z$ в этой же точке. Обозначая функцию $u(r,\ z,\ t)$ в точке $(R_j,\ Z_j)$ через $u_j(t)$, имеем

$$u_j(t) = -\sum_{i=0}^{N} q_i(t)\, s_{ij}(t) \qquad (j = 0,\ 1, \ldots, M) \tag{2.10}$$

Значения $q_i(t)$ $(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N)$ определяются из условий (2.9), (2.10).

Учитывая условие потенциальности течения (1.4), граничное условие (1.3), а также (2.10), и переходя к безразмерным величинам

$$\varphi = \frac{u}{v_0 L}, \quad \eta = \frac{r}{L}, \quad \zeta = \frac{z}{L}, \quad \tau = \frac{tv_0}{L}, \quad \mu = \frac{q}{v_0 L^2}$$

имеем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\eta_i(\tau)}{d\tau} = -a_j(\tau)\sum_{i=0}^{N}\mu_i(\tau)\,s_{\eta ij}(\tau) \qquad (j=0,\ 1,\ldots,\ M+1)$$

$$\frac{d\zeta_j(\tau)}{d\tau} = -b_j(\tau)\sum_{i=0}^{N}\mu_i(\tau)\,s_{\zeta ij}(\tau) \qquad (j=0,1,\ldots,M+1) \tag{2.11}$$

$$\frac{d\varphi_j(\tau)}{d\tau} = -\frac{\Delta p(\tau)}{\Delta p(0)} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\eta_j}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_j}{d\tau}\right)^2\right] + \lambda\zeta_j \qquad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ M)$$

Здесь

$$a_j(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } j=0,\ 1,\ldots,\ M \\ -c_{\zeta j} & \text{при } j=M+1 \end{cases} \qquad b_j(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } j=0,\ 1,\ldots,\ M \\ c_{\eta j} & \text{при } j=M+1 \end{cases}$$

$$s_{\eta ij} = \left.\frac{\partial s_i}{\partial \eta}\right|_{\eta_j,\ \zeta_j}, \qquad s_{\zeta ij} = \left.\frac{\partial s_i}{\partial \zeta}\right|_{\eta_j,\ \zeta_j}$$

$$\Delta p(\tau) = p(\tau) - p_\infty, \qquad \lambda = \frac{2gL}{v_0^2}, \qquad v_0 = \left(\frac{\Delta p(0)}{\rho}\right)^{1/2}$$

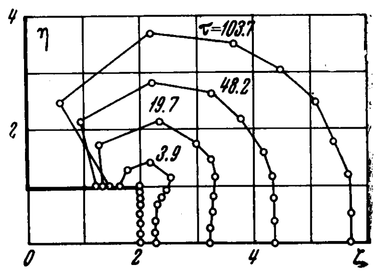
L — характерный линейный размер.

Предполагается, что для $j = M+2,\ \ldots,\ N$ кольцевые источники на поверхности Σ расположены произвольно, лишь бы выполнялось условие (2.9). В данной работе значения величин $\eta_j(\tau)$, $\zeta_j(\tau)$ для случая, когда поверхность Σ будет трубой длиной $l \neq 0$, вычисляются из соотношений

$$\eta_j = \eta_{M+1} + 2^{j-(M+2)}h_1$$

$$\zeta_j = \zeta_{M+1} + 2^{j-(M+2)}h_2 \qquad (j = M+1,\ \ldots,\ N)$$

$$h_1 = \frac{\eta_N - \eta_{M+1}}{20l}, \qquad h_2 = \frac{\zeta_N - \zeta_{M+1}}{20l}$$



Фиг. 3

Интегрирование системы (2.11) позволяет приближенно определить поверхность $S(\tau)$, а следовательно, и потенциал $\varphi(\eta,\ \zeta,\ \tau)$.

3. Система (2.11) обыкновенных дифференциальных уравнений интегрировалась численным методом Рунге — Кутта на ЭВМ М-20 с постоянным шагом h по безразмерному времени τ, причем предполагалось, что $\varphi_j(0) = 0$ $(j = 0,\ 1,\ \ldots,\ M)$ и $g = 0$. Начальные значения координат свободной поверхности задавались на плоскости среза трубы $z = l$. Рассматривался случай инерционного расширения пузыря под действием начального импульса избыточного давления, когда

$$\Delta p(\tau) = \begin{cases} \Delta p(0) & \text{при } \tau \leqslant h \\ 0 & \text{при } \tau > h \end{cases}$$

Здесь $h = 0.1$, $\Delta p(0) = 1.02\cdot 10^4$, $M = 8$, $N = 17$, $c_{\zeta j} = 0$, $c_{\eta j} = 1$ $(j = M+1,\ \ldots,\ N)$, $l = 2R$ (l, R — длина и радиус трубы соответственно). На фиг. 3 приведена полученная в результате численных расчетов картина изменения поверхности пузыря в процессе инерционного расширения.

Для сравнения получаемого численного решения с известными точными решениями была рассмотрена задача о расширении сферического газового пузыря в безграничной жидкости. Рассматривались случаи расширения пузыря при постоянном избыточном давлении, инерционного расширения, а также гармонических колебаний пузыря при адиабатическом законе изменения давления. Во всех этих случаях максимальная относительная погрешность вычисления координат свободной поверхности при $M = N = 6$, $h \geqslant 0.02$ не превысила 3%.

Авторы благодарны Р. Л. Крепс за постоянное внимание к работе.

Поступило 7 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., Гостехиздат, 1953.
2. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.