

РАСХОДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СОПЛА ПРИ ИСТЕЧЕНИИ ВИНТОВОГО ПОТОКА ГАЗА

Ю. А. ГОСТИНЦЕВ (Москва)

Рассмотрено влияние вращения газа на расходные характеристики сопла в двух предельных случаях адиабатического винтового истечения: изэнтропического и изотермического. Показано, что в первом случае расход вращающегося газа через сопло меньше, чем при одномерном истечении, а во втором случае больше. Приведены данные модельных экспериментов.

Общая система уравнений для баротропного вихревого движения идеального совершенного газа имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v} = - \text{grad} \left(\int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0, \quad p = \rho g R T \quad (1)$$

Будем рассматривать винтовое движение, т. е. движение, в котором вихревые линии совпадают с линиями тока и везде в потоке $\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$.

(Потенциальное, безвихревое течение с $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ является частным случаем винтового.) Известно [1, 2], что винтовой поток может быть только стационарным (в дальнейшем рассматривается именно такое движение) и для него существует интеграл Бернулли

$$E = \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 = \text{const}$$

Эти свойства имеют место как для жидкости, так и для газа. Помимо этого винтовой поток газа обладает некоторыми специфическими особенностями.

1. В общем случае движения, используя известное соотношение

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad } i - T \text{grad } s$$

уравнение (1) можно записать в виде [3]

$$\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v} = T \text{grad } s - \text{grad} (i + \frac{1}{2} v^2)$$

Тогда для винтового течения

$$T \text{grad } s = \text{grad} (i + \frac{1}{2} v^2), \quad \text{rot} (T \text{grad } s) = \text{grad } T \times \text{grad } s = 0$$

Другими словами, винтовое сечение может быть либо изэнтропическим, либо изотермическим, либо течением, где поверхности $T = \text{const}$ совпадают с поверхностями $s = \text{const}$.

2. Винтовое движение газа возможно только при выполнении условия совместности уравнений движения и неразрывности газа с кинематическими ограничениями, накладываемыми требованием винтообразности потока (при движении несжимаемой жидкости это условие удовлетворяется автоматически). В случае двуразмерного вихревого движения уравнения (1) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2}{\rho H_1 H_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1}{\rho H_2 H_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\rho H_1 H_2}{H_3} \Phi(\psi) \frac{d\Phi}{d\psi} - \rho H_1 H_2 H_3 \frac{dE}{d\psi} = 0$$

$$H_2 H_3 \rho v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial q_2}, \quad H_1 H_3 \rho v_2 = - \frac{\partial \psi}{\partial q_1}, \quad H_3 v_3 = \Phi(\psi) \quad (2)$$

Здесь ψ — функция тока, q_i — криволинейные ортогональные координаты, H_i — коэффициенты Ляме, Φ — циркуляция. С другой стороны, кинематическое условие $\text{rot } \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ дает [2]

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2}{\lambda H_1 H_3} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1}{\lambda H_2 H_3} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\lambda H_1 H_2}{H_3} \Phi = 0 \quad (3)$$

Из сопоставления (2) и (3) видно, что условие динамической возможности винтового движения газа заключается в выполнении соотношения

$$d\Phi = \frac{\lambda}{\rho} d\psi \quad (4)$$

Так как Φ однозначно определяется функцией тока ψ , то из (4), следует, что величина $\lambda/\rho = \text{const}$ для каждой линии тока. В соответствии с (2) и (4) выражения скоростей через циркуляцию будут иметь вид

$$H_2 H_3 v_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}, \quad H_1 H_3 v_2 = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \quad (5)$$

Общий случай винтового течения, когда $\lambda(q_1, q_2, q_3)$, чрезвычайно сложен для интегрирования. Ограничимся в первом приближении однопараметрическим течением, когда $\lambda = \text{const}$ и по аналогии с течением несжимаемой жидкости будем такой поток называть лотоком Громеки. Систему уравнений, определяющих адиабатический двумерный поток Громеки, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2}{H_1 H_3} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\lambda^2 H_1 H_2}{H_3} \Phi = 0 \\ H_2 H_3 v_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}, \quad H_1 H_3 v_2 = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \quad (6) \\ \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} = E_0, \quad p = \rho g R T \end{aligned}$$

Рассмотрим на основании (6) расходные и тяговые характеристики сопла для двух предельных случаев винтового течения: изэнтропического и изотермического. Будем считать, что при осесимметричном движении вращающегося газа по соплу радиальной составляющей скорости можно пренебречь. Тогда осевая и тангенциальная составляющие зависят только от радиуса, а уравнение неразрывности заменяется его интегральной формой

$$Q = \int_0^r \rho v_z d\sigma = \text{const} \quad (7)$$

В цилиндрических координатах уравнение (6) принимает простейший вид

$$\frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} + \lambda^2 \Phi = 0 \quad (8)$$

общее решение которого

$$\Phi = c_0 r J_1(\lambda r) + c_1 r Y_1(\lambda r)$$

Отсюда

$$v_\varphi = c_0 J_1(\lambda r) + c_1 Y_1(\lambda r), \quad v_z = c_0 J_0(\lambda r) + c_1 Y_0(\lambda r)$$

В случае вихревого движения газа граничные условия (8) имеют вид:

$$\Phi = 0 \text{ при } r = 0, \quad \Phi = \Phi_0 \text{ при } r = R_0.$$

Тогда

$$v_\varphi = \frac{\Phi_0}{R_0} \frac{J_1(\lambda r)}{J_1(\lambda R_0)}, \quad v_z = \frac{\Phi_0}{R_0} \frac{J_0(\lambda r)}{J_1(\lambda R_0)} \quad (9)$$

Если течение имеет потенциальный характер ($\lambda = 0$ и $\text{rot } \mathbf{v} = 0$), то решением (8) будет

$$\Phi = \Phi_0 = \text{const}, \quad v_\varphi = \Phi_0 / r, \quad v_z = \text{const} \quad (10)$$

Задача об изэнтропическом потенциальном течении рассматривалась в [4, 5] и далее обсуждаться не будет. Ниже приведено решение для характеристик сопла в случае винтового течения вращающегося газа.

Изэнтропическое течение. В этом случае плотность газа в винтовом потоке определяется выражением

$$\rho = \rho_\infty \left\{ 1 - \frac{v_\varphi^2 + v_z^2}{2\kappa a_\infty^2} \right\}^\kappa \quad \left(\kappa = \frac{1}{\gamma - 1} \right) \quad (11)$$

Согласно (7), (9), (11) массовый расход вращающегося газа через сопло равен

$$Q = 2\pi R_*^2 \rho_\infty a_\infty \alpha_* \sqrt{2\kappa} \int_0^{1.0} \left[1 - \alpha_*^2 \frac{J_1^2(m\xi) + J_0^2(m\xi)}{J_1^2(m)} \right]^\kappa \frac{J_0(m\xi)}{J_1(m)} \xi d\xi \quad (12)$$

Здесь введены безразмерные переменные

$$\alpha_* = \frac{\Phi_0}{R_* a_\infty} (2\kappa)^{-1/2}, \quad \xi = \frac{r}{R_*}, \quad m = \lambda R_*$$

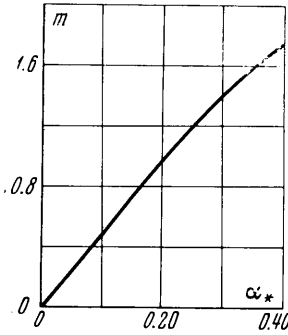
(R_* — радиус критического сечения сопла.) Для установления связи между параметрами α_* и m имеем условие максимума расхода через сопло

$$\left(\frac{dQ}{dm}\right)_{\alpha_*} = 0 \quad (13)$$

Результат совместного численного решения (12) и (13) при $\gamma = 1.40$ представлен в виде кривой на фиг. 1. При малых значениях параметров легко найти

$$\lim_{\alpha_* \rightarrow 0} (m / \alpha_*) = 2 (\kappa \kappa')^{1/2} \quad (\kappa' = \gamma + 1)$$

Отношение расхода вращающегося газа к расходу при одномерном истечении газа с одинаковыми параметрами заторможенного потока, или, что одно и то же, отношение коэффициентов расхода, равно



Фиг. 1

$$\frac{A_r}{A_0} = (8\kappa)^{1/2} \left(\frac{\kappa'}{2}\right)^{1/2 \kappa \kappa'} \alpha_* \int_0^{1.0} \left[1 - \alpha_*^2 \frac{J_0^2(m\xi) + J_1^2(m\xi)}{J_1^2(m)}\right]^\kappa \times \times \frac{J_0(m\xi)}{J_1(m)} \xi d\xi \quad (14)$$

Зависимость A_r / A_0 от α_* , подсчитанная по (14) с учетом данных фиг. 1, дана в виде кривой 1 на фиг. 2. Там же под индексом 2 для сравнения представлен результат расчета по модели потенциального течения [4]. Как известно, полная тяга сопла определяется

$$R = \int_{\sigma_*} (p + \rho v^2) d\sigma + \int_{\sigma_a} p d\sigma - p_h (\sigma_a - \sigma_*)$$

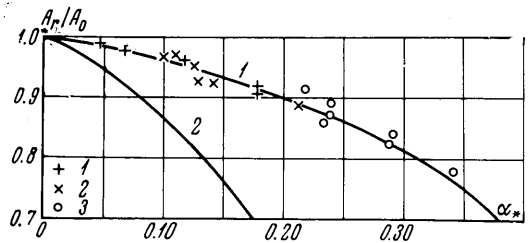
В простейшем случае сопла без расширяющейся части ($\sigma_a = 0$), пренебрегая влиянием атмосферного давления ($p_h = 0$), получим отношение коэффициентов тяги при вихревом и одномерном истечении

$$\frac{R_r}{R_0} = \left(\frac{\kappa'}{2}\right)^\kappa \int_0^{1.0} \left[1 - \alpha_*^2 \frac{J_0^2(m\xi) + J_1^2(m\xi)}{J_1^2(m)}\right]^\kappa \left[1 - \alpha_*^2 \frac{J_1^2(m\xi) + \kappa \kappa' \alpha_*^2 J_0^2(m\xi)}{J_1^2(m)}\right] \xi d\xi \quad (15)$$

Кривые R_r / R_0 для $\gamma = 1.40$ в случаях винтового и потенциального течения представлены на фиг. 3.

Для опытной проверки полученных зависимостей была проведена серия экспериментов на воздухе с соплом без расширяющейся части. Диаметр критического сечения сопла варьировался в пределах от 4 до 15 мм. Вращение потока создавалось непосредственно у входа в конфузорную часть сопла либо с помощью завихрителя, подобного центробежной форсунке с тангенциальными отверстиями, либо за счет тангенциального вдува дополнительной массы газа. На фиг. 2 и 3 представлены результаты этих экспериментов (величина α_* рассчитывалась с использованием законов сохранения массы и момента количества движения; точки 1 получены при тангенциальном вдуве воздуха в сопло с критическим диаметром $d_* = 15$ мм и отношением суммарной площади отверстий для вдува к площади критического сечения $\sigma_i / \sigma_* = 0.043$; точки 2 — то же, но $\sigma_i / \sigma_* = 0.078$; точки 3 — $d_* = 10$ мм, $\sigma_i / \sigma_* = 0.135$; точки 4 получены на завихрителе с четырьмя тангенциальными отверстиями $d_i = 7.5$ мм и отношением его длины к диаметру $L / D = 0.70$).

Видно, что модель винтового движения довольно хорошо описывает экспериментальные данные для использованных источников крутки, если последние находятся достаточно близко от сопла. Это связано, вероятно, с тем, что, во-первых, из модели винтового течения получается более правдоподобный профиль скорости вращения, чем из рассмотренной в [4] модели потенциального течения (напомним, что согласно теории безвихревого течения вблизи оси $v_\phi \rightarrow \infty$; в то же время ясно, что в реальной жидкости вблизи оси $v_\phi \sim r$, а это выполняется в модели винтового движения), во-вторых, использованные в экспериментах потоки характеризовались интенсивным



Фиг. 2

радиальным перемешиванием и поле скоростей и давлений в них устанавливается быстрее, чем поле температур [6]. В связи с этим течение на небольших расстояниях от источника крутки можно считать изэнтропическим.

В случае удаленного источника полученный выше эффект уменьшения расхода газа через сопло нивелируется из-за действия двух факторов: затухания крутки и перераспределения энергии по радиусу.

Изотермическое течение. Представляет интерес рассмотрение второго предельного случая винтового адиабатического (но не изэнтропического) движения газа, когда имеет место перераспределение энергии в сечении потока и $T = \text{const}$.

Будем обозначать индексом 0 параметры газа у оси течения. Из уравнения состояния и уравнения движения при $T = T_0 = \text{const}$ легко получить выражение для плотности газа

$$\rho = \rho_\infty (1 - \beta_0^2)^{\frac{1}{\gamma-1}} \exp \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma-1} \int \frac{\alpha^2 d\xi}{\xi (1 - \beta_0^2)} \right\} \quad (16)$$

где

$$\beta_0^2 = v_{z0}^2 \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2}$$

Вычисление расходных и тяговых характеристик сопла для винтового изотермического течения на основании уравнений (7), (9), (16) с добавлением условия максимума расхода не составляет принципиальных затруднений, однако требует больших численных выкладок. В связи с этим, а также потому, что для подобного течения нет экспериментальных данных, получим характеристики сопла для более простой модели изотермического течения.

Пусть вращение газа происходит по закону твердого тела ($v_\phi = \omega r$), осевая скорость постоянна по сечению ($v_z = \text{const}$) и радиальная скорость отсутствует ($v_r = 0$). Такому изотермическому течению соответствует максимальное значение функционала переменной по радиусу энтропии [7]. Легко видеть, что при небольшой величине закрутки потока «кваситвердое» течение будет хорошим приближением к винтовому (9).

Для относительного массового расхода через сопло с учетом $v_\phi = \omega r$ и $v_z = \text{const}$ имеем

$$\frac{A_r}{A_0} = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{2}{\gamma} \frac{\beta_0}{\alpha_*^2} (1 - \beta_0^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \times (e^x - 1) \quad (17)$$

где

$$x = \alpha_*^2 \frac{\gamma}{(\gamma-1)(1-\beta_0^2)}$$

Применив принцип максимального расхода ($dQ/d\beta_0|_{\alpha_*} = 0$), будем иметь соотношение между параметрами α_* и β_0

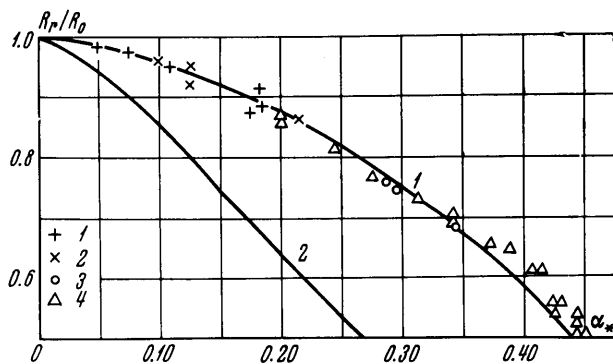
$$\beta_0^2 = (1 - e^x) \left[2xe^x + \frac{3\gamma-1}{\gamma-1} (1 - e^x) \right]^{-1.0} \quad (18)$$

Зависимость A_r/A_0 от α_* для $\gamma = 1.40$ при рассмотренном характере течения представлена на фиг. 4.

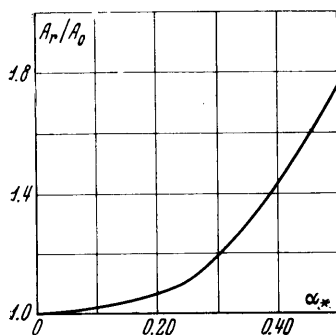
Видно, что в отличие от винтового изэнтропического потока такое течение приводит к увеличению относительного массового расхода при неизменных параметрах заторможенного газа.

В заключение благодарю Ю. Д. Шмыглевского за обсуждение работы и ценные замечания.

Поступило 23 X 1968



Фиг. 3



Фиг. 4

ЛИТЕРАТУРА

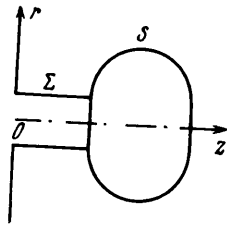
1. Громека И. С. Собрание сочинений. М., Изд-во АН СССР, 1952.
2. Васильев О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. М., Госэнергоиздат, 1958.
3. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
4. Mager A. Approximate solution of isentropic swirling flow through a nozzle. ARS Journal, 1961, vol. 31, No. 8.
5. Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д. Увеличение тяги сопла вращением потока. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
6. Гродзовский Г. Л., Кузнецов Ю. Е. К теории камеры для вихревого охлаждения газового потока. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 10.
7. Дубинский М. Г. О вращающихся потоках газа. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 8.

**ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ
ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНЫМИ
ПОВЕРХНОСТЯМИ**

Г. А. КОНСТАНТИНОВ, Ю. Л. ЯКИМОВ

(Москва)

Описывается приближенный метод решения задачи о нестационарном осесимметричном потенциальном течении идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью. Метод основан на дискретном распределении кольцевых источников на граничных поверхностях, что позволяет свести рассматриваемую задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В основе этого численного метода лежит известный результат, согласно которому любую гармоническую функцию можно представить как потенциал источников, распределенных на границе течения [1, 2]. В работе получено численное решение задачи, в которой свободная поверхность будет поверхностью газового пузыря.



Фиг. 1

1. Рассматривается задача о нахождении поверхности газового пузыря, образующегося на конце круглой трубы, выступающей из бесконечной стенки. Поверхность пузыря существенно нестационарна вследствие разности давлений в трубе и в окружающей жидкости. Жидкость предполагается идеальной, несжимаемой и покоящейся на бесконечности. Предполагается, что ось z совпадает с осью симметрии течения и с направлением силы тяжести, а также, что бесконечная стенка лежит в плоскости $z = 0$. Наличие бесконечной стенки равносильно симметрии течения относительно этой плоскости (Фиг. 1).

Потенциал u скорости движения жидкости будет функцией цилиндрических координат r, z и времени t , где r — расстояние до оси симметрии. Функция $u(r, z, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в цилиндрических координатах для осесимметричного случая

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1)$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (1.2)$$

на поверхности трубы Σ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{p(t) - p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2} v(t)^2 - gz = 0 \quad (1.3)$$

на свободной поверхности S . Здесь $p(t)$ — давление в пузыре; p_∞ — давление в бесконечно удаленной от оси симметрии точке, лежащей в плоскости $z = 0$; $v(t)$ — величина скорости перемещения поверхности S ; g — величина ускорения силы тяжести; ρ — плотность жидкости.