

К ЗАДАЧЕ О ВЫБОРЕ ФОРМЫ КРЫЛА ДЛЯ ГИПЕРЗВУКОВЫХ СКОРОСТЕЙ

Е. И. ФИЛАТОВ

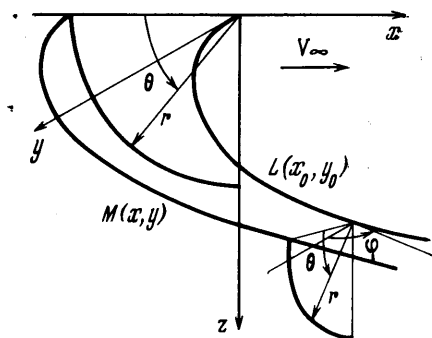
(Казань)

Рассмотрена задача о форме затупленной передней кромкой крыла минимального сопротивления. Поверхности затупления выбирались из класса поверхностей, для которых сечения плоскостью, перпендикулярной к передней кромке, являются полукругом, давление определялось по формуле Ньютона, на форму передней кромки накладывалось условие ограниченности температуры во всех ее точках. Задача решалась методом Ритца, результаты представлены на графиках. Сделано заключение, что крыло минимального сопротивления с затупленными передними кромками имеет крестообразную форму в сечении, перпендикулярном направлению скорости полета.

В работе [1] рассмотрена задача о форме передней кромки крыла минимального сопротивления при следующих допущениях: принята ньютоновская схема обтекания, передняя кромка — плоская кривая, поверхность затупления выбирается из класса поверхностей, для которых сечение плоскостью, нормальной к передней кромке, представляет собой полукруглость, принята эмпирическая зависимость между кривизной передней кромки и температурой. На форму передней кромки наложено условие постоянства температуры во всех ее точках. Выяснено, что для крыла оптимальной формы производная от радиуса затупления по длине дуги передней кромки r' и радиус кривизны передней кромки σ' могут быть величинами одного порядка, ввиду чего приближенные методы, основанные на разложении в ряд по величине отношения $r' : \sigma'$, не дают полного решения поставленной задачи. В данной работе указана выше задача решена численным методом. Показано, что в рассматриваемом классе поверхностей затупления нет такой, которая давала бы внутренний экстремум рассматриваемому функционалу. Найдены поверхности затупления, дающие краевой экстремум.

Следуя работе [1], будем искать поверхность затупления минимального сопротивления в классе поверхностей вида

$$\begin{aligned} x &= x_0(\varphi) - r(\varphi) \cos \theta \cos \varphi \\ y &= y_0(\varphi) + r(\varphi) \cos \theta \sin \varphi \\ z &= r(\varphi) \sin \theta \end{aligned} \quad (1)$$



Фиг. 1

Здесь x, y, z — декартова прямоугольная система координат, причем ось x направлена по вектору скорости невозмущенного потока и будет линией симметрии для правой и левой половины крыла, ось y направлена по размаху, ось z дополняет систему до правой, $x_0(\varphi)$ и $y_0(\varphi)$ — координаты образующей L поверхности затупления, φ — угол между касательной к L и осью y , r — радиус сечения поверхности затупления плоскостью, нормальной к L , θ — угол между нормалью к L в плоскости xy и r (x и y — координаты передней кромки M при $\theta = 0$). Сопротивление четверти поверхности затупления, отнесенное к удвоенному скоростному напору, в этом случае записывается следующим образом:

$$\frac{X}{2q} = \int_0^{\varphi_1} \int_0^{\pi} \frac{r [r' \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi (\sigma' + r \cos \theta)]^2 d\varphi d\theta}{r^2 + (\sigma' + r \cos \theta)^2} \quad (2)$$

Условие постоянства максимальной температуры на кромке [1]

$$\cos \varphi \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\sigma'} \right) \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{R}}, \quad r = \frac{R \sigma' \cos^2 \varphi}{2\sigma' - R \cos^2 \varphi} \quad (3)$$

Здесь σ — длина дуги образующей поверхности затупления, R — допустимый из условия прочности материала радиус средней кривизны поверхности.

Введем новые переменные: безразмерный радиус кривизны образующей передней кромки g и угол t , выбирая за масштаб длины величину R , а за масштаб угла — угол φ_1 наклона касательной в конечной точке образующей L

$$g = \frac{1}{R} \sigma', \quad t = \frac{1}{\varphi_1} \varphi$$

Тогда функционал (2) переписывается в виде

$$\frac{X}{2q} = \varphi_1 \int_0^1 p \int_0^{1/2\pi} \frac{[(g + p \cos \theta) \cos \theta \cos \varphi_1 t - h \sin \varphi_1 t]^2}{h^2 + (g + p \cos \theta)^2} d\theta dt \quad (4)$$

$$p = \frac{r}{R} r = \frac{g \cos^2 \varphi_1 t}{2g - \cos^2 \varphi_1 t} \quad (5)$$

$$h = -\frac{r}{R} r' = \frac{[(g' / \varphi_1) \cos^3 \varphi_1 t + 4g^2 \sin \varphi_1 t] \cos \varphi_1 t}{(2g - \cos^2 \varphi_1 t)^2}$$

Таким образом задача свелась к рассмотрению функционала простейшего вида

$$J = \int_0^1 F(g', g, t, \varphi_1) dt$$

$$F = p \int_0^{1/2\pi} \frac{[(g + p \cos \theta) \cos \theta \cos \varphi_1 t - h \sin \varphi_1 t]^2}{h^2 + (g + p \cos \theta)^2} dt \quad (6)$$

зависящего от функции $g(t)$ и одного параметра φ_1 . Функция $g(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) должна удовлетворять следующим условиям: 1) для того, чтобы поверхность затупления была непрерывной, нужно, чтобы $g(t)$ была непрерывной функцией и имела непрерывную первую производную; 2) ввиду симметрии передней кромки относительно оси x функция $g(t)$ также должна быть симметричной, т. е. $g(t) = g(-t)$; 3) в критической точке при $t = 0$ значение $g(0)$ неизвестно, а $g'(0) = 0$ в силу симметрии, естественное граничное условие в точке $t = 0$, $F_{g'} = 0$ удовлетворяется при $g'(0) = 0$ и произвольном значении $g(0)$; 4) на конце крыла при $t = 1$ значения φ_1 , g и g' должны удовлетворять условиям трансверсальности

$$F_{g'}|_{t=1} = 0, \quad (F - g'F_{g'})|_{t=1} = 0$$

Анализ этих уравнений показывает, что они удовлетворяются в двух случаях: либо при $\varphi_1 = 1/2\pi$ и произвольных g и g' , либо при $g = 0$ и произвольных значениях g' и φ_1 ; 5) если задан размах крыла $2l$, или длина передней кромки σ_1 , то функция $g(t)$ должна удовлетворять соответственно условиям

$$l = \varphi_1 \int_0^1 g \cos \varphi_1 t dt, \quad \sigma_1 = \varphi_1 \int_0^t g dt$$

Координаты передней кромки выражаются через $g(t)$ с помощью квадратур

$$x = \varphi_1 \int_0^t g \sin \varphi_1 t dt, \quad y = \varphi_1 \int_0^t g \cos \varphi_1 t dt$$

Вариационная задача формулировалась следующим образом: в классе функций $g(t)$ ($0 \leq t \leq 1$), удовлетворяющих условиям 1)–5), найти такую, которая обеспечивает функционалу (6) наименьшее значение.

Нетрудно показать, что если сделать предположение о малости безразмерной кривизны передней кромки $1/g$, то приближенное решение поставленной задачи с точностью до членов порядка $1/g^2$ включительно дается прямой линией $\varphi = \varphi_1$, при этом толщина затупления r — также величина постоянная и поверхность затупления представляет собой половину кругового цилиндра. Указанное решение не удовлетворяет условиям 1), 3) и 4) в критической и концевой точках передней кромки, что связано с его приближенным характером. Целью данной работы было получение полного решения поставленной выше задачи.

Задача решалась методом Рунге, в качестве минимизирующей использовалась поделительность полиномов вида

$$g(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^{2k} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (7)$$

Функции (7), очевидно, удовлетворяют условиям 1)–3).

Изопериметрические условия (5) использовались для установления связи между коэффициентами a_k . В частности, при заданном размахе $2l$

$$a_0 = l_0 - (a_1 l_1 + \dots + a_k l_k + \dots + a_n l_n)$$

где

$$l_0 = \frac{\varphi_1}{\sin \varphi_1} \frac{l}{R}, \quad l_k = \frac{\varphi_1}{\sin \varphi_1} \int_0^1 t^{2k} \cos \varphi_1 t dt$$

Выполнение условия 4) заранее не требовалось. Неизвестные коэффициенты a_k находились из условия минимума функционала (6) после подстановки в него g и g' численно, методом спуска. Число коэффициентов выбиралось из следующего условия: последующее приближение для $g(t)$ дает минимум функционалу, отличающийся от предыдущего менее чем на 2%. Наблюдалась хорошая сходимость минимизирующей последовательности, как правило, для удовлетворения принятой точности достаточно было трех коэффициентов. Решение дало следующие результаты.

Если на переднюю кромку не наложены никакие изопериметрические условия (при этом полагалось $\varphi_1 = \pi/2$), то для безразмерного радиуса кривизны получилось выражение

$$g = 0.61 + 9t^2 - 9t^4 \quad (8)$$

Соответствующая форма передней кромки M показана на фиг. 2.

Если на $g(t)$ наложены изопериметрические условия 5), то при t , меняющихся от $t = 0$ до значений t , не слишком близких к $t = 1$, передняя кромка практически не отличается от той, которая определяется из (8), а при $t = 1$ переходит в прямую ¹, т. е. решение в этом случае получается сопряжением кривой L , соответствующей выражению (8) с прямой $t = 1$.

Например, при $l = 5$ и заданном угле стреловидности $\varphi_1 = \pi/3$ для функции $g(t)$ получается выражение

$$g = 0.61 + 4t^2 - 1.78t^4 + 67t^{10}$$

Форма соответствующей передней кромки показана на фиг. 2. Из фиг. 2 видно, что радиус оптимальной поверхности затупления имеет большую величину в районе критической точки, а затем резко убывает, т. е. крыло с минимальным сопротивлением получается крестообразной формы в сечении, перпендикулярном направлению движения. Из фиг. 2 видно также, что кривизна $1/g$ и угол φ наклона к оси y передней кромки M в районе критической точки могут значительно отличаться от соответствующих величин для образующей предельной кромки L , что, по-видимому, ставит под сомнение возможность использования температурного условия (3) в этом районе.

Вследствие этого задача решалась также в следующей несколько измененной постановке: вместо поверхностей затупления (1) рассматривались поверхности вида

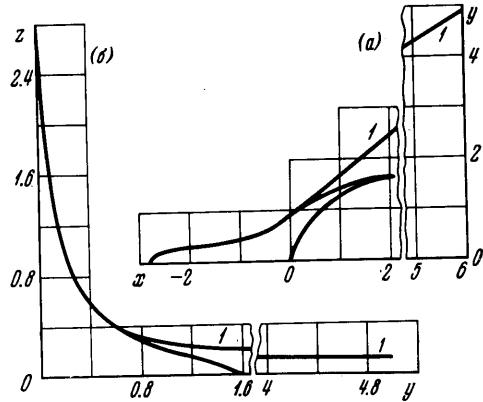
$$\begin{aligned} x &= x_0 + r(\varphi)(1 - \cos \theta) \cos \varphi \\ y &= y_0 - r(\varphi)(1 - \cos \theta) \sin \varphi \\ z &= r(\varphi) \sin \theta \end{aligned} \quad (9)$$

для которых образующая L будет одновременно и передней кромкой. Температурное условие сохранялось в прежнем виде, однако величина $1/2(1/r + 1/\sigma')$ представляла собой теперь точное выражение для средней кривизны поверхности затупления в точках передней кромки. Основной функционал (4) переписался в виде

$$\frac{X}{2q} = \int_0^1 p \int_0^{1/2\pi} \frac{\{v(\theta, t) \cos \theta \cos \varphi_1 t - h \sin \varphi_1 t (1 - \cos \theta)\}^2}{h^2 (1 - \cos \theta)^2 + v^2(\theta, t)} d\theta dt \quad (10)$$

где p и h определяются выражениями (5).

¹ При этом в силу сделанного выбора независимой переменной не удастся выполнить условие 4), что приводит к незамкнутости поверхности на конце, но практически не влияет на величину функционала (6).



Фиг. 2

В такой постановке температурное условие (3) существенно ограничивает класс рассматриваемых кривых $L(x_0, y_0)$, а именно для однозначной определенности поверхности затупления вида (9) нужно, чтобы радиус кривизны передней кромки был не меньше радиуса затупления, т. е. выполнялось неравенство $g \geq r$, которое в силу (3) дает

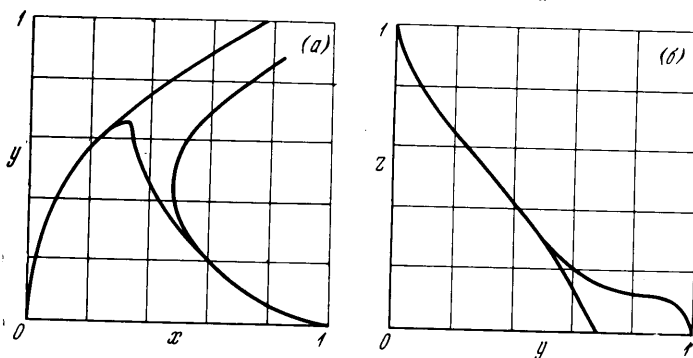
$$g \geq \cos^2 \varphi_1 t$$

В измененной постановке задача решалась также описанным выше методом и были получены следующие результаты.

В случае, когда на форму передней кромки не наложено никаких изопериметрических условий ($\varphi_1 = \pi/2$), рассматриваемый функционал имеет только краевой минимум при

$$g = 1 - 2.47t^2 + 2.02t^4 - 0.66t^6 = 1 - \varphi^2 + 0.33\varphi^4 - 0.045\varphi^6 \approx \cos^2 \varphi \quad (11)$$

Форма передней кромки для этого случая показана на фиг. 3.



Фиг. 3

В случае, когда задан размах $2l$ и длина σ_1 передней кромки или $2l$ и угол стреловидности на конце крыла φ_1 , минимум рассматриваемому функционалу дает кривая $g(t)$, получающаяся сопряжением кривой (11) и прямой $g(1) = \infty$. Например, для $l = 1$ и $\varphi_1 = \pi/3$

$$g = 1 - 1.10t^2 + 0.40t^4 - 0.06t^6 + 6.45t^{10} = 1 - \varphi^2 + 0.33\varphi^4 - 0.045\varphi^6 + 4\varphi^{10}$$

Соответствующая форма передней кромки показана на фиг. 3.

На фиг. 3 видно, что при задании температурного условия непосредственно в точках передней кромки форма поверхности затупления сохраняет отмеченные выше качественные особенности. Таким образом, из проведенного решения следует, что крыло минимального сопротивления с затупленной передней кромкой, на форму которой наложено условие ограниченности нагрева, имеет крестообразную форму в сечении, перпендикулярном к направлению движения. При этом изгиб передней кромки в критической точке будет максимальным возможным из условия нагрева, далее кромка плавно переходит в прямую, что соответствует выводу, сделанному в работе [1]. Полученный результат хорошо согласуется с результатами работ [2-4], в которых определяются тела минимального сопротивления без учета нагрева их поверхности. Сопротивление поверхности затупления, определяемой выражением (11), в три с лишним раза меньше сопротивления соответствующей сферы.

Поступила 5 II 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Майкапар Г. И. Выбор формы крыла для гиперзвуковых скоростей. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4.
2. Майкапар Г. И. Аэродинамические характеристики неосесимметричных тел при сверхзвуковых скоростях. Тр. ЦАГИ, 1961, вып. 841.
3. Гонор А. Л. Определение формы пространственного оптимального тела с учетом силы трения. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4.
4. Hull David G. Three dimensional configurations of minimum total drag in newtonian flow. J. Astronaut. Sci., 1965, vol. 12, No. 3, pp. 83-87.