

К ЗАДАЧЕ О ГАЗОВОМ ПУЗЫРЕ В ПЛОСКОМ ПОТОКЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

О. М. КИСЕЛЕВ

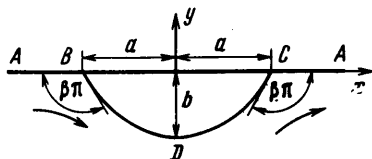
(Казань)

Исследуется задача об обтекании плоским потоком жидкости газового пузыря, примыкающего к бесконечной прямолинейной твердой стенке.

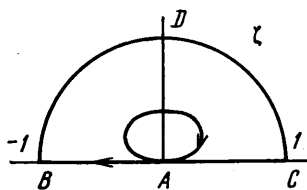
Обтекание плоским потоком идеальной жидкости газового пузыря, на границе которого действуют силы поверхностного натяжения (или газового пузыря, ограниченного упругой пленкой) изучалось рядом авторов. Н. Е. Жуковский, первым исследовавший струйные течения с учетом капиллярных сил, построил точное решение задачи о симметричном обтекании газового пузыря в прямолинейном канале [1]. Однако решение Н. Е. Жуковского не является общим решением задачи, из него, в частности, нельзя получить обтекание изолированного пузыря. Н. А. Слезкин [2] свел задачу о симметричном обтекании пузыря безграничным потоком жидкости к исследованию нелинейного интегрального уравнения. Численное решение этой задачи было недавно выполнено С. И. Петровой [3]. Мак-Леод [4] получил точное решение в предположении, что давление газа в пузыре p_1 равно давлению заторможенного потока p_0 . К. Бейер [5] доказал существование решения задачи об обтекании пузыря потоком с заданной циркуляцией скорости при условии $p_1 \geq p_0$.

Ниже рассматривается задача об обтекании плоским потоком идеальной жидкости газового пузыря, примыкающего к бесконечной прямолинейной твердой стенке. Решение зависит от величины краевого угла $\beta\pi$. В некотором диапазоне изменения параметров доказывается существование решения и указывается способ его нахождения. Подробно исследуется случай $\beta = 1/2$.

1. Постановка задачи. Основное уравнение. Основная теорема. Плоский установившийся потенциальный поток невесомой несжимаемой жидкости плотности ρ течет вдоль прямолинейной твердой границы $ABCA$ (фиг. 1) с примыкающим к ней газовым пузырем. На границе пузыря BDC действуют силы поверхностного натяжения интенсивности T . В точках B и C



Фиг. 1



Фиг. 2

угол наклона вектора скорости меняется скачком на величину $\beta\pi$ (краевой угол). Требуется определить форму пузыря и поле скоростей, считая заданными скорость потока на бесконечности V_∞ , давление газа в пузыре p_1 и давление потока в точке торможения p_0 . Указанную задачу можно трактовать так же, как задачу о симметричном обтекании надутного крыла. При этом контур BDC следует рассматривать как сечение гибкой пленки с точками закрепления B и C .

Направим ось x вдоль прямолинейной твердой границы в сторону течения и выберем за начало координат середину отрезка BC , длину которого обозначим через $2a$. Будем искать функцию $z(\zeta)$, конформно отображающую

щую верхний полукруг единичного радиуса плоскости ζ ($\text{Im } \zeta \geq 0$, $|\zeta| \leq 1$) на область течения в плоскости $z = x + iy$. При этом потребуем, чтобы границе пузыря соответствовала дуга окружности $\zeta = e^{i\sigma}$, $0 \leq \sigma \leq \pi$, а бесконечно удаленной точке потока — точка $\zeta = 0$ (фиг. 2). Комплексный потенциал течения w в плоскости ζ имеет вид

$$w = NV_{\infty}(\zeta + 1/\zeta) \quad (1.1)$$

где N — постоянная, имеющая размерность длины. Отсюда

$$dw/d\zeta = NV_{\infty}(\zeta^2 - 1)/\zeta^2 \quad (1.2)$$

Когда скорость жидкости исчезающе мала ($V_{\infty} \rightarrow 0$), контур BDC принимает форму дуги окружности. При этом, как нетрудно убедиться

$$z = a \frac{(1 + \zeta)^{2\beta} + (1 - \zeta)^{2\beta}}{(1 + \zeta)^{2\beta} - (1 - \zeta)^{2\beta}}, \quad \frac{dz}{d\zeta} = - \frac{8a\beta(1 - \zeta^2)^{2\beta-1}}{[(1 + \zeta)^{2\beta} - (1 - \zeta)^{2\beta}]^2}$$

$$\frac{1}{V_{\infty}} \frac{dw}{dz} = \frac{[(1 + \zeta)^{2\beta} - (1 - \zeta)^{2\beta}]^2}{16\beta^2 \zeta^2 (1 - \zeta^2)^{2\beta-2}}, \quad N = \frac{a}{2\beta} \quad (1.3)$$

В общем случае безразмерную комплексно-сопряженную скорость можно искать в виде

$$\frac{1}{V_{\infty}} \frac{dw}{dz} = \frac{[(1 + \zeta)^{2\beta} - (1 - \zeta)^{2\beta}]^2}{16\beta^2 \zeta^2 (1 - \zeta^2)^{2\beta-2}} e^{-\Omega(\zeta)} \quad (1.4)$$

Здесь $\Omega(\zeta)$ — функция, голоморфная в круге $|\zeta| \leq 1$, вещественная при $\text{Im } \zeta = 0$ и обращающаяся в нуль при $\zeta = 0$. Предполагая наличие симметрии потока относительно оси y , приходим к выводу, что $\Omega(\zeta)$ представима в виде ряда

$$\Omega(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \zeta^{2k} \quad (1.5)$$

с неизвестными вещественными коэффициентами. Согласно (1.2) и (1.4)

$$\frac{dz}{d\zeta} = - \frac{16N\beta^2(1 - \zeta^2)^{2\beta-1}}{[(1 + \zeta)^{2\beta} - (1 - \zeta)^{2\beta}]^2} e^{\Omega(\zeta)} \quad (1.6)$$

Если функция $\Omega(\zeta)$ будет найдена, то постоянная N определится из условия

$$z(1) - z(-1) = 2a \quad (1.7)$$

На границе пузыря выполняется уравнение Лапласа

$$p_1 - p = T/R \quad (1.8)$$

Здесь p — давление в жидкости, R — радиус кривизны линии тока. Введем следующие обозначения:

$$\text{Re } \Omega(e^{i\sigma}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \cos 2n\sigma = \lambda(\sigma), \quad \text{Im } \Omega(e^{i\sigma}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \sin 2n\sigma = \mu(\sigma) \quad (1.9)$$

Здесь φ — потенциал скорости, V — модуль скорости, θ — угол наклона скорости к оси x . С помощью уравнения Бернулли условие (1.8) можно записать в виде

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{p_1 - p_0}{T} \frac{1}{V} + \frac{\rho}{2T} V \quad (1.10)$$

Из (1.2), (1.4) и (1.9) при $\zeta = e^{i\sigma}$, $0 \leq \sigma \leq \pi$ имеем

$$\varphi = 2NV_{\infty} \cos \sigma \quad (1.11)$$

$$\theta = \pi - \pi\beta - 2 \arctg \frac{\sin \pi\beta (\tg^{1/2} \sigma)^{2\beta}}{1 - \cos \pi\beta (\tg^{1/2} \sigma)^{2\beta}} + \mu(\sigma) \quad (1.12)$$

$$V / V_{\infty} = \sin^2 \sigma [(\ctg^{1/2} \sigma)^{2\beta} - 2 \cos \pi\beta + (\tg^{1/2} \sigma)^{2\beta}] e^{-\lambda(\sigma)} / 4\beta^2 \quad (1.13)$$

Подставляя (1.11) — (1.13) в (1.10), получим

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = F - \alpha F e^{\lambda} - \delta G e^{-\lambda} \quad (0 \leq \sigma \leq \pi) \quad (1.14)$$

$$F = 2^{2-2\beta} \sin \pi\beta (\sin \sigma)^{2\beta-1} / f, \quad G = 2^{2\beta-1} \beta^{-2} (\sin \sigma)^{3-2\beta} f \quad (1.15)$$

$$f = (\cos^{1/2} \sigma)^{4\beta} - 2 \cos \pi\beta (\sin^{1/2} \sigma \cos^{1/2} \sigma)^{2\beta} + (\sin^{1/2} \sigma)^{4\beta} \quad (1.16)$$

$$\alpha = 2N\beta(p_1 - p_0) / T \sin \pi\beta, \quad \delta = \rho NV_{\infty}^2 / 2T \quad (1.17)$$

Уравнение (1.14) с учетом равенств (1.9) и (1.15) — (1.17) служит для определения искомых функций.

Пусть $\delta = 0$, тогда уравнение (1.14) будет удовлетворяться, если положить $\lambda(\sigma) = \mu(\sigma) = 0$, $\alpha = 1$. С учетом (1.3) из $\alpha = 1$ следует:

$$a(p_1 - p_0) / T \sin \pi\beta = 1 \quad (1.18)$$

Легко убедиться, что условие (1.18) тождественно уравнению Лапласа (1.8) для покоящейся жидкости ($p = p_0$). В общем случае параметр α и функции λ , μ зависят от δ . Считая эту зависимость аналитической в окрестности $\delta = 0$, будем искать решение в виде рядов

$$\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta^k \alpha_k, \quad \lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^k \lambda_k, \quad \frac{d\mu}{d\sigma} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^k \mu_k' \quad (1.19)$$

$$\lambda_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}^{(k)} \cos 2n\sigma, \quad \mu_k' = \sum_{n=1}^{\infty} 2na_{2n}^{(k)} \cos 2n\sigma \quad (1.20)$$

Коэффициенты α_k , $a_{2n}^{(k)}$ зависят только от β . Ниже будет доказана следующая основная теорема. При $1/2 \leq \beta < 1$ решение уравнения (1.14) вида (1.19), (1.20) существует для достаточно малых δ , при этом ряды (1.19), (1.20) сходятся абсолютно и равномерно относительно σ .

Подставим (1.19) в (1.14) и разложим последнее уравнение в ряды по степеням δ . Сравнивая затем коэффициенты при δ^k ($k = 1, 2, \dots$), получим бесконечную систему уравнений вида

$$\mu_k' + F\alpha_k + F\lambda_k = G_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.21)$$

Здесь

$$G_1 = -G, \quad G_2 = -F(\alpha_1 \lambda_1 + \lambda_1^2 / 2) + G\lambda_1$$

вообще, G_k выражается через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$; $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}$. Это позволяет уравнения (1.21) решать последовательно одно за другим.

2. Некоторые оценки функций F и G . В дальнейшем всюду будем считать, что $1/2 \leq \beta \leq 1$. Функции F, G определены при $0 \leq \sigma \leq \pi$. Продолжая их четным образом, разложим в ряды Фурье

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \cos 2n\sigma, \quad G = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \cos 2n\sigma \quad (2.1)$$

(все коэффициенты с нечетными индексами равны нулю, поскольку $F(\pi - \sigma) =$

$= F(\sigma)$, $G(\pi - \sigma) = G(\sigma)$). Условимся называть нормой функции, разлагающейся в ряд Фурье, сумму модулей коэффициентов разложения, таким образом

$$\|F\| = \sum_{n=0}^{\infty} |A_{2n}|, \quad \|G\| = \sum_{n=0}^{\infty} |B_{2n}|$$

Установим некоторые оценки для величин $\|F\|$, $\|G\|$, а также A_0 и бесконечного ряда $|A_2| + |A_4| + |A_6| + \dots$.

Прежде всего покажем, что при $1/2 < \beta < 1$ функция $f = f(\sigma)$ (1.16) монотонно возрастает при σ , меняющемся от нуля до $1/2\pi$. Для этого производную

$$f'(\sigma) = \beta \sin \sigma \left[\left(\sin \frac{\sigma}{2} \right)^{4\beta-2} - \left(\cos \frac{\sigma}{2} \right)^{4\beta-2} \right] - \frac{\beta \cos \pi\beta}{2^{2\beta-2}} (\sin \sigma)^{2\beta-1} \cos \sigma \quad (2.2)$$

представим в виде

$$f'(\sigma) = \beta \sin \sigma \left(\cos \frac{\sigma}{2} \right)^{4\beta-2} \omega^{\beta-1} [\omega^{\beta} - \omega^{1-\beta} - \cos \pi\beta (1 - \omega)]$$

$$0 \leq \omega = \operatorname{tg}^2(\sigma/2) \leq 1 \quad (0 \leq \sigma \leq \pi/2)$$

Знак производной $f'(\sigma)$ определяется знаком функции

$$f_1(\omega) = \omega^{\beta} - \omega^{1-\beta} - \cos \pi\beta (1 - \omega) \quad (0 \leq \omega \leq 1, \quad 1/2 < \beta < 1) \quad (2.3)$$

$$f_1(0) = -\cos \pi\beta > 0, \quad f_1(1) = 0 \quad (2.4)$$

Дифференцируя (2.3) по ω , получим

$$f_1'(\omega) = \beta \omega^{\beta-1} - (1 - \beta) \omega^{-\beta} + \cos \pi\beta$$

$$f_1'(0) = -\infty, \quad f_1'(1) = 2\beta - 1 + \cos \pi\beta < 0 \quad (2.5)$$

$$f_1''(\omega) = \beta(1 - \beta)(\omega^{-1-\beta} - \omega^{\beta-2}) \geq 0 \quad (2.6)$$

Анализ соотношений (2.4) — (2.6) показывает, что $f_1(\omega) \geq 0$ и, следовательно,

$$f'(\sigma) \geq 0 \quad (0 \leq \sigma \leq \pi/2) \quad (2.7)$$

Принимая во внимание, что $f(\pi - \sigma) = f(\sigma)$, будем иметь

$$f_{\min} = f(0) = 1, \quad f_{\max} = f(\pi/2) = 2^{1-2\beta}(1 - \cos \pi\beta) \quad (0 \leq \sigma \leq \pi) \quad (2.8)$$

Поскольку

$$f(\sigma) - 1 \geq 0, \quad (\cos 1/2\sigma)^{4\beta} + (\sin 1/2\sigma)^{4\beta} - 1 \leq 0 \quad (1/2 \leq \beta \leq 1)$$

то

$$|f(\sigma) - 1| \leq 2|\cos \pi\beta| (\sin 1/2\sigma \cos 1/2\sigma)^{2\beta} \quad (2.9)$$

Аналогично, из (2.7) и (2.2) следует:

$$|f'(\sigma)| \leq 2^{2-2\beta}\beta |\cos \pi\beta| (\sin \sigma)^{2\beta-1} |\cos \sigma| \quad (2.10)$$

Коэффициент A_0 определяется по формуле

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F d\sigma = \frac{2^{2-2\beta}\beta \sin \pi\beta}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(\sin \sigma)^{2\beta-1}}{f(\sigma)} d\sigma$$

Используя (2.8) и ([6], 3.621), получим неравенство

$$c \leq A_0 \leq \kappa, \quad c = \frac{2^{2\beta}\beta \sin \pi\beta \Gamma^2(\beta)}{\pi(1 - \cos \pi\beta) \Gamma(2\beta)}, \quad \kappa = \frac{2\beta \sin \pi\beta \Gamma^2(\beta)}{\pi \Gamma(2\beta)} \quad (2.11)$$

Функция $F = F(\sigma)$ удовлетворяет условиям теоремы А. Зигмунда ([7], стр. 385), поэтому ряд $|A_2| + |A_4| + |A_6| + \dots$ сходится. Чтобы оценить сумму ряда, представим F в виде

$$F = F_1 + F_2, \quad F_1 = M(\sin \sigma)^{2\beta-1}(1 - f)/f, \quad F_2 = M(\sin \sigma)^{2\beta-1}$$

$$M = 2^{2-2\beta}\beta \sin \pi\beta, \quad F_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}' \cos 2n\sigma, \quad F_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}'' \cos 2n\sigma$$

Согласно ([6], 3.631) при $n \geq 1$, $1/2 \leq \beta \leq 1$

$$A''_{2n} = \frac{2M}{\pi} \int_0^\pi (\sin \sigma)^{2\beta-1} \cos 2n\sigma d\sigma = \frac{2^{3-4\beta} \sin \pi\beta (-1)^n}{B(\beta + n + 1/2, \beta - n + 1/2)} \leq 0$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{2n}''| = 0 \quad (\beta = 1/2), \quad F_2|_{\sigma=0} = A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} |A_{2n}''| = 0 \quad (1/2 < \beta \leq 1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{2n}''| = \frac{M}{\pi} \int_0^\pi (\sin \sigma)^{2\beta-1} d\sigma = \kappa \quad (1/2 < \beta \leq 1) \quad (2.12)$$

Для оценки суммы бесконечного ряда $|A_2'| + |A_4'| + |A_6'| + \dots$ используем неравенство Буняковского и равенство Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{2n}'| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |2n A_{2n}'|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}} \left[\int_0^\pi \left(\frac{dF_1}{d\sigma} \right)^2 d\sigma \right]^{1/2} \quad (2.13)$$

Пользуясь неравенствами (2.9), (2.10) для оценки функции $(dF_1/d\sigma)^2$, из (2.13), (2.12), (2.14) при $1/2 \leq \beta \leq 1$ получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{2n}'| \leq h = \frac{\sqrt{\pi}\beta}{2\sqrt{3}} (4\beta - 1) |\sin 2\pi\beta| \left[\frac{\Gamma^2(4\beta - 3/2)}{\Gamma(8\beta - 3)} - 4 \frac{\Gamma^2(4\beta - 1/2)}{\Gamma(8\beta - 1)} \right]^{1/2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{2n}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|A_{2n}'| + |A_{2n}''|) \leq \eta = \kappa + h \quad (2.14)$$

$$\|F\| = \sum_{n=0}^{\infty} |A_{2n}| \leq q = 2\kappa + h \quad (2.15)$$

Аналогично получим

$$\|G\| \leq r = \frac{\pi \sqrt{3} |\cos \pi\beta|}{8\beta} + \left(1 + \frac{1 - \cos \pi\beta}{2^{2\beta-1}} \right) \frac{4\Gamma^2(2-\beta)}{\pi\beta^2\Gamma(4-2\beta)} \quad (2.16)$$

В табл. 1 приведены значения κ , c , η , q , r для ряда значений β .

Таблица 1

β	c	κ	η	q	r	g	d
0.50	1	1	1	2	4	0.8750	0.7500
0.55	0.8829	0.9526	1.0454	1.9930	4.0414	0.9147	0.7840
0.60	0.7700	0.8774	1.0446	1.9221	4.0269	0.9140	0.7834
0.65	0.6670	0.7878	1.0082	1.7960	3.9720	0.8822	0.7562
0.70	0.5690	0.6847	0.9272	1.6119	3.8872	0.8113	0.7750
0.75	0.4739	0.5721	0.8126	1.3846	3.7811	0.7110	0.7747
0.80	0.3805	0.4541	0.6690	1.1231	3.6591	0.5861	0.7534
0.85	0.2874	0.3346	0.5057	0.8403	3.5260	0.5864	0.7129
0.90	0.1937	0.2171	0.3331	0.5502	3.3860	0.5731	0.6564
0.95	0.0982	0.1046	0.1613	0.2660	3.2423	0.5472	0.5876
1.00	0	0	0	0	3.0982	0.5114	0.5114

3. Вспомогательная теорема. Пусть коэффициенты бесконечной системы уравнений

$$x_i = \sum_{k=0}^{\infty} c_{i,k} x_k + b_i \quad (i=0, 1, \dots) \quad (3.1)$$

удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_{i,k}| \leq g < 1 \quad (i=0, 1, \dots), \quad \sum_{i=0}^{\infty} |c_{i,k}| \leq d < 1 \quad (k=0, 1, \dots) \quad (3.2)$$

Покажем, что система (3.1) имеет главное решение x_i' ($i = 0, 1, \dots$) такое, что

$$|x_0'| + |x_1'| + \dots < (|b_0| + |b_1| + \dots) / (1 - d)$$

Система (3.1) вполне регулярная, поэтому ее главное решение может быть найдено методом редукции (см. [8], гл. 1, § 2). Иными словами, если x_{in} ($i = 0, 1, \dots, n$) есть решение конечной системы

$$x_i = \sum_{k=0}^n c_{i,k} x_k + b_i \quad (i=0, 1, \dots, n) \quad (3.3)$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{in} = x_i'$$

Из (3.3) и (3.2) следует:

$$\sum_{i=0}^n |x_{in}| \leq \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n |c_{i,k}| |x_{kn}| + \sum_{i=0}^n |b_i| \leq d \sum_{k=0}^n |x_{kn}| + \sum_{i=0}^n |b_i|$$

Отсюда

$$\sum_{i=0}^n |x_{in}| \leq P = \sum_{i=0}^{\infty} |b_i| / (1 - d)$$

при любом n . Пусть n_0 — любое целое число, удовлетворяющее неравенству $0 < n_0 \leq n$. Очевидно,

$$|x_{0n}| + |x_{1n}| + \dots + |x_{n_0n}| \leq P \quad (3.4)$$

Переходя в (3.4) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$|x_0'| + |x_1'| + \dots + |x_{n_0}'| \leq P \quad (3.5)$$

Неравенство (3.5) справедливо при любом n_0 . Переходя к пределу при $n_0 \rightarrow \infty$, будем иметь для бесконечного ряда

$$|x_0'| + |x_1'| + |x_2'| + |x_3'| + \dots \leq P$$

Таким образом, теорема доказана. Заметим, что при условии $|b_0| + |b_1| + |b_2| + \dots < \infty$ главное решение системы (3.1) будет единственным ее решением, стремящимся к нулю, т. е. таким, что $\lim x_i = 0$ при $i \rightarrow \infty$.

4. Решение уравнений (1.21). Из (1.20) и (2.1) следует, что

$$\lambda_k F = A_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}^{(k)} \cos 2n\sigma + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} A_{2i} \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}^{(k)} [\cos 2(n-i)\sigma + \cos 2(n+i)\sigma]$$

Разлагая G_k в ряд Фурье по косинусам

$$G_k = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n}^{(k)} \cos 2n\sigma$$

и сравнивая в (1.21) коэффициенты при косинусах с одинаковыми аргументами, получим бесконечную систему уравнений относительно неизвестных $a_k, a_{2n}^{(k)}$ ($n = 1, 2, \dots$). Пусть s — некоторое положительное число. Вводя замену $a_k/s = x_0, 2na_{2n}^{(k)} = x_{2n}$ ($n = 1, 2, \dots$), указанную систему можно записать в виде

$$\begin{aligned} 2sA_0x_0 &= 0 - A_2x_2/2 - A_4x_4/4 - A_6x_6/6 - A_8x_8/8 - \dots + 2B_0^{(k)} \\ (2 + A_0/1)x_2 &= -2sA_2x_0 - 0 - A_2x_4/4 - A_4x_6/6 - A_6x_8/8 - \dots \\ &\quad \dots + 2B_2^{(k)} \\ (2 + A_0/2)x_4 &= -2sA_4x_0 - A_2x_2/2 - 0 - A_2x_6/6 - A_4x_8/8 - \dots \\ &\quad \dots + 2B_4^{(k)} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$(2 + A_0 / 3)x_0 = -2sA_6x_0 - A_4x_2 / 2 - A_2x_4 / 4 - 0 - A_2x_8 / 8 - \dots$$

$$\dots + 2B_6^{(k)}$$

$$(2 + A_0 / 4)x_8 = -2sA_8x_0 - A_6x_2 / 2 - A_4x_4 / 4 - A_2x_6 / 6 - 0 - \dots$$

$$\dots + 2B_8^{(k)}$$

Используя для (4.1) обозначения предыдущего пункта, нетрудно получить

$$\sum_{h=0}^{\infty} |c_{i,h}| \leq t_s \sum_{n=1}^{\infty} |A_{2n}|, \quad t_s = \max(1/4sA_0, s + 1/8, 1/3) \quad (i = 0, 1, \dots)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} |c_{i,h}| \leq u_s \sum_{n=1}^{\infty} |A_{2n}|, \quad u_s = \max(s, 1/4sA_0 + 1/4) \quad (k = 0, 1, \dots)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} |b_i| \leq v_s \|G_h\|, \quad v_s = \max(1/s A_0, 1)$$

Удобно положить $s = 3/4$, тогда, учитывая оценки (2.11), (2.14), будем иметь

$$\sum_{h=0}^{\infty} |c_{i,h}| \leq g = t\eta, \quad t = \max(1/3c, 7/8) \quad (i = 0, 1, \dots)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} |c_{i,h}| \leq d = u\eta, \quad u = \max(3/4, 1/3c + 1/4) \quad (k = 0, 1, \dots)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} |b_i| \leq 4\|G\| / 3c$$

В табл. 1 приведены значения g и d для $\beta \in [1/2, 1]$. Очевидно, условия вспомогательной теоремы выполняются. Следовательно, если $\|G_h\| < \infty$, то существует единственное решение уравнения (4.1), стремящееся к нулю, причем для этого решения

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i| \leq \frac{4\|G_h\|}{3c(1-d)}$$

Возвращаясь к старым переменным, получим

$$\frac{4}{3} |\alpha_h| + \sum_{n=1}^{\infty} |2na_{2n}^{(k)}| \leq \frac{4\|G_h\|}{3c(1-d)}$$

Отсюда

$$|\alpha_h| \leq \frac{\|G_h\|}{c(1-d)}, \quad \|\mu_h'\| \leq \frac{4\|G_h\|}{3c(1-d)}, \quad \|\lambda_h\| \leq \frac{2\|G_h\|}{3c(1-d)} \quad (4.2)$$

5. Доказательство сходимости рядов (1.19), (1.20). При оценке $\|G_n\|$ будем пользоваться следующей леммой.

Лемма. Если коэффициенты степенного ряда

$$\tau(\xi) = d_1^{(1)}\xi + d_2^{(1)}\xi^2 + \dots + d_n^{(1)}\xi^n + \dots$$

удовлетворяют неравенствам

$$|d_n^{(1)}| \leq A / (n+1)^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

то коэффициенты ряда

$$|d_n^{(1)}| \leq A / (n+1)^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

получающегося из первого путем возведения его в k -ю степень, удовлетворяют неравенствам

$$|d_n^{(k)}| \leq A^k l^{k-1} / (n+1)^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Здесь можно положить $l = 1.520$. Эта лемма есть следствие леммы Л. В. Канторовича (см. [3], стр. 454).

Будем также пользоваться следующими свойствами введенной нами нормы:

$$\|\varphi_1(\sigma) + \varphi_2(\sigma)\| \leq \|\varphi_1(\sigma)\| + \|\varphi_2(\sigma)\|, \quad \|\varphi_1(\sigma)\varphi_2(\sigma)\| \leq \|\varphi_1(\sigma)\| \|\varphi_2(\sigma)\|$$

Предположим, что для $1 \leq k \leq n-1$ верна оценка

$$\|G_k\| \leq 3c(1-d)QR^{k-1} / 2(k+1)^2 \quad (5.1)$$

Здесь

$$Q = 8\|G\| / 3c(1-d) \quad (5.2)$$

и, следовательно, оценка (5.1) имеет место при $k = 1$. Докажем, что постоянную R можно выбрать таким образом, чтобы неравенство (5.1) выполнялось при $k = n \geq 2$. Из (4.2) и (5.1) следует, что при $1 \leq k \leq n-1$

$$|\alpha_k| \leq 3QR^{k-1} / 2(k+1)^2, \quad \|\lambda_k\| \leq QR^{k-1} / (k+1)^2 \quad (5.3)$$

Вспомяная способ получения уравнений (1.21), можем записать

$$G_n = -G \left\{ \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\delta^{n-1}} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\sum_{m=1}^{n-1} \delta^m \lambda_m \right)^k \right] \right\}_{\delta=0} - \\ - F \left\{ \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\delta^n} \left[\left(\sum_{m=1}^{n-1} \delta^m \alpha_m \right) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\sum_{m=1}^{n-1} \delta^m \lambda_m \right)^k \right] \right\}_{\delta=0}$$

Обозначая $\delta R = v$, используя (5.3) и свойства нормы, из последнего равенства получим

$$\|G_n\| \leq \|G\| \left\{ \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\delta^{n-1}} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{Q}{R} \right)^k \left(\sum_{m=1}^{n-1} \frac{v^m}{(m+1)^2} \right)^k \right] \right\}_{\delta=0} + \\ + \frac{3}{2} \|F\| \left\{ \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\delta^n} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{Q}{R} \right)^{k+1} \left(\sum_{m=1}^{n-1} \frac{v^m}{(m+1)^2} \right)^{k+1} \right] \right\}_{\delta=0}$$

На основании леммы

$$\left[\frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\delta^n} \left(\sum_{m=1}^{n-1} \frac{v^m}{(m+1)^2} \right)^{k+1} \right]_{\delta=0} = \left[\frac{R^n}{n!} \frac{d^n}{dv^n} \left(\sum_{m=1}^{n-1} \frac{v^m}{(m+1)^2} \right)^{k+1} \right]_{v=0} \leq \frac{R^n l^k}{(n+1)^2} \\ \left[\frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\delta^{n-1}} \left(\sum_{m=1}^{n-1} \frac{v^m}{(m+1)^2} \right)^k \right]_{\delta=0} \leq \frac{R^{n-1} l^{k-1}}{n^2}$$

Таким образом,

$$\|G_n\| \leq \frac{R^{n-1}}{n^2} \left(\frac{\|G\|}{l} + \frac{3Q\|F\|}{2} \right) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{Ql}{R} \right)^k < \\ < \frac{R^{n-1}}{n^2} \left(\frac{\|G\|}{l} + \frac{3Q\|F\|}{2} \right) \left(\exp \frac{Ql}{R} - 1 \right)$$

Чтобы оценка (5.1) была справедлива при $n \geq 2$, достаточно потребовать, чтобы выполнялось неравенство

$$(\|G\|/l + 3\|F\|Q/2)[\exp(Ql/R) - 1] \leq 2c(1-d)Q/3$$

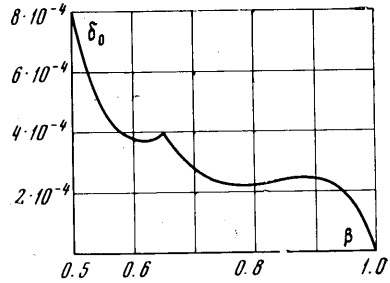
или (с учетом (5.2), (2.15), (2.16)) неравенство

$$\exp(8rl/3c(1-d)R) - 1 \leq 16lc(1-d)/9[4lq + c(1-d)] \quad (5.4)$$

при фиксированном β правая часть неравенства (5.4) — положительная константа, левая часть — монотонная функция R , меняющаяся от нуля до бесконечности. Следовательно, существует такое минимальное $R = R_0$, что при $R \geq R_0$ неравенство (5.4), а вместе с ним и оценка (5.1) будут иметь место при любом $n \geq 2$.

Применяя метод математической индукции, можем утверждать, что при любом $k \geq 1$ и $R = R_0$ оценка (5.1) справедлива. Из (4.2) следует, что ряды (1.20) сходятся абсолютно и равномерно относительно σ . Это утверждение справедливо и для рядов (1.19) при $\delta \leq \delta_0 = 1/R_0$. Таким образом, основная теорема доказана.

На фиг. 3 приведена зависимость $\delta_0(\beta)$. Фактически радиус сходимости рядов (1.19) значительно больше, но при $\beta = 1$ он неизбежно равен нулю.



Фиг. 3

6. Случай $\beta = 1/2$. Этот случай можно интерпретировать как симметричное обтекание газового пузыря безграничным потоком жидкости. При $\beta = 1/2$ выражения (1.6), (1.14) принимают вид

$$\frac{dz}{d\zeta} = -\frac{Ne^{\Omega(\zeta)}}{\zeta^2}, \quad \frac{d\mu}{d\sigma} = 1 - \alpha e^\lambda - 4\delta \sin^2 \sigma e^{-\lambda} \quad (6.1)$$

Функции λ_k , μ_k находятся в виде конечных тригонометрических полиномов. С точностью до членов порядка δ^3 включительно

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - 2\delta - 7/9\delta^2 - 32/27\delta^3 \\ \Omega(\zeta) &= \delta \frac{2\zeta^2}{3} + \delta^2 \left(\frac{8\zeta^2}{9} - \frac{7\zeta^4}{45} \right) + \delta^3 \left(\frac{206\zeta^2}{135} - \frac{244\zeta^4}{675} + \frac{124\zeta^6}{2835} \right) \\ z(\zeta) &= N \left[\frac{1}{\zeta} - \delta \frac{2\zeta}{3} - \delta^2 \left(\frac{8\zeta}{9} + \frac{\zeta^3}{45} \right) - \delta^3 \left(\frac{206\zeta}{135} + \frac{52\zeta^3}{675} - \frac{2\zeta^5}{945} \right) \right] \\ \frac{a}{N} &= 1 - \frac{2}{3}\delta - \frac{41}{45}\delta^2 - \frac{7564}{4725}\delta^3, \quad \frac{b}{N} = 1 + \frac{2}{3}\delta + \frac{39}{45}\delta^2 + \frac{6836}{4725}\delta^3 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь b — максимальное значение $|y|$ на границе пузыря ($b = iz(i)$). Кроме математических параметров α , δ полезно ввести в рассмотрение физические параметры

$$\alpha' = \frac{(p_1 - p_0)a}{T} = \frac{\alpha a}{N}, \quad \delta' = \frac{\rho a V_\infty^2}{2T} = \frac{\delta a}{N}, \quad \frac{a}{b} \quad (6.4)$$

С помощью формул (6.2), (6.3) все они выражаются через δ .

Уравнение (6.1) было впервые получено Н. А. Слезкиным [2]. Выразив λ через $d\mu/d\sigma$ по формуле Дини, Н. А. Слезкин получил нелинейное интегральное уравнение для функции $\lambda(\sigma)$. Однако он не заметил, что параметр α зависит от δ , и поэтому не довел исследование до конца. Идя по предложенному им пути, следовало бы решение интегрального уравнения $\lambda(\sigma, \alpha)$ подставить в уравнение (6.1) и определить α из условия

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\mu}{d\sigma} d\sigma = 0$$

Численное решение уравнения (6.1) было недавно выполнено С. И. Петровой [3]. Аналогичные расчеты были проведены автором статьи, при этом использовался изложенный ниже метод.

Выражения $e^{\lambda(\sigma)}$, $e^{-\lambda(\sigma)}$ представим в виде тригонометрических рядов

$$\exp\left(\pm \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \cos 2k\sigma\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_{2k}}{N_{2k}} \cos 2k\sigma$$

Коэффициенты M_{2k} , N_{2k} следующим образом выражаются через коэффициенты a_{2k} [9]:

$$M_0 = \sum_{k=0}^{\infty} d_{2k}^2, \quad M_{2n} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} d_{2k} d_{2k+2n} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (6.5)$$

$$d_0 = 1, \quad d_{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) d_{2k} a_{2n-2k} \quad (n=1, 2, \dots)$$

Выражение для коэффициентов N_0 и N_{2k} получаются из формул (6.5) заменой всюду буквы d на e и изменением знака в правой части формулы для e_{2n} .

Учитывая, что

$$4\delta \sin^2 \sigma \sum_{k=0}^{\infty} N_{2k} \cos 2k\sigma = 2\delta \sum_{k=0}^{\infty} N_{2k} \cos 2k\sigma - 2\delta N_0 \cos 2\sigma - \\ - \delta \sum_{k=1}^{\infty} N_{2k} [\cos 2(k-1)\sigma + \cos 2(k+1)\sigma]$$

из уравнения (6.1), путем сравнения коэффициентов при косинусах с одинаковыми аргументами придем к следующей системе уравнений:

$$\alpha = [1 - 2\delta N_0 + \delta N_2] / M_0 \quad (6.6)$$

$$a_2 = [-\alpha M_2 + \delta(2N_0 - 2N_2 + N_4)] / 2 \quad (6.7)$$

$$a_{2n} = [-\alpha M_{2n} + \delta(N_{2n-2} - 2N_{2n} + N_{2n+2})] / 2n \quad (n=2, 3, \dots) \quad (6.8)$$

По формулам (6.5)–(6.8) при заданном δ с помощью метода последовательных приближений находятся величины α , a_{2n} ($n=1, 2, \dots$). За начальное приближение удобно принять $a_{2n} = 0$. Процесс последовательных приближений достаточно быстро сходится при $0 \leq \delta \leq 1/3$ (с ростом δ сходимость замедляется). При $\delta > 1/3$ сходимость отсутствует.

Функцию $\exp \Omega(\xi)$ выгодно представить в виде степенного ряда

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \xi^{2k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \xi^{2k}, \quad c_{2n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) c_{2k} a_{2n-2k} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (6.9)$$

$$c_0 = 1$$

Из (6.1) и (6.9) найдем выражение для $z(\xi)$

$$z = N \left(\frac{1}{\xi} - \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} \frac{\xi^{2k-1}}{2k-1} \right)$$

Легко убедиться, что

$$\alpha' = \alpha \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{2k}}{2k-1} \right), \quad \delta' = \delta \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{2k}}{2k-1} \right)$$

$$\frac{a}{b} = \left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{2k}}{2k-1} \right] / \left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k c_{2k}}{2k-1} \right]$$

В табл. 2 для ряда значений δ приведены значения α и c_{2n} , вычисленные указанным выше методом на ЭВМ М-20. На фиг. 4 изображены зависимости α' и δ' от b/a . Пунктиром изображены те же зависимости, най-

Таблица 2

δ	α	c_2	c_4	c_6	c_8
0	1	0	0	0	0
0.05	0.897892	0.035767	0.000200	-0.000002	0.000000
0.10	0.790752	0.077466	0.000983	-0.000015	0.000000
0.15	0.676823	0.127427	0.002798	-0.000063	0.000001
0.20	0.553015	0.189321	0.006584	-0.000188	0.000005
0.25	0.412858	0.273562	0.014679	-0.000473	0.000013
0.30	0.236621	0.406487	0.035697	-0.001042	0.000026
1/3	0	0.666667	0.111111	-0.000000	0.000000

денные из формул (6.2) — (6.4). Из приведенных данных видно, что с уменьшением α' пузырь вытягивается в направлении, перпендикулярном потоку, сохраняя почти эллиптическую форму. Для предельного случая $\alpha' = 0$ ($\delta = 1/3$), когда кривизна пузыря в критических точках обращается в нуль, точное решение было получено Мак-Леодом [4]. В этом случае $\delta' = 8/81$. $b/a = 11/2$.

В заключение заметим, что при $\beta = 1$ уравнение (1.14) можно записать в виде

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = -2 \sin \sigma (\gamma e^\lambda + \delta e^{-\lambda}),$$

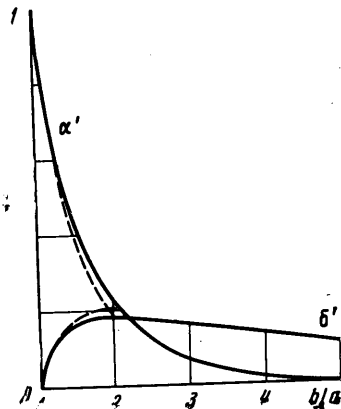
$$\gamma = \frac{N(p_1 - p_0)}{T} \quad (6.10)$$

Уравнение (6.10) удовлетворяется, если положить $\gamma = -\delta$, $\lambda = \mu = 0$. Это решение соответствует невозмущенному потоку вдоль прямой стени.

Поступило 23 IX 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Определение движения жидкости при каком-нибудь условии, данном на линии тока. Полн. собр. соч., М.—Л., ОНТИ, 1936, т. 3.
2. Слезкин Н. А. Обтекание наполненной газом оболочки плоским потоком идеальной жидкости. Уч. зап. МГУ, 1951, т. 3, вып. 152.
3. Петрова С. И. Форма равновесия полости, ограниченной упругой пленкой, в однородном потоке жидкости. В сб.: «III Всес. съезд по теорет. и прикл. механ.» (аннотации докладов), М., 1968.
4. McLeod E. B. The explicit solution of a free boundary problem involving surface tension. J. Rational Mech. and Analysis, 1955, vol. 4, No. 4.
5. Beyer K. Existenzbeweis für ein Randwertproblem mit freien Rand. Arch. Rational Mech. and Analysis, 1966, vol. 23, No. 1.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
7. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М., «Мир», 1965, т. 2.
8. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
9. Lennau Ch. W., Street R. L. A non-linear theory for symmetric supercavitating flow in a gravity field. J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, pt. 2. (Рус. перев.: Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1967, № 3).



Фиг. 4