

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ СЕКТОРИАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

К. Б. ПАВЛОВ, И. А. ФЕДОТОВ

(Москва)

Найдено распределение скорости и магнитной индукции при стационарном течении проводящей несжимаемой жидкости в цилиндрическом канале секториального сечения с непроводящими стенками в присутствии продольного линейного тока.

В цилиндрическом канале с непроводящими стенками, сечение которого представляет собой сектор радиуса R с углом 2α , стационарно движется жидкость с проводимостью σ и плотностью ρ . Линейный ток J проходит через центр окружности R . В цилиндрической системе координат с осью z , направленной вдоль тока, уравнения магнитной гидродинамики записываются в виде [1]

$$\begin{aligned} B_\varphi &= \frac{\mu_0 J}{2\pi r} \equiv \frac{I}{r}, & \frac{\partial p}{\partial z} &\equiv P = \text{const} < 0 \\ \frac{I}{r^2} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} + \mu_0 \eta \Delta u &= \mu_0 P, & \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta B_z + \frac{I}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Здесь $u(0, 0, u)$, $B(0, B_\varphi, B_z)$ — векторы скорости и магнитной индукции, остальные обозначения очевидны.

Исключая в уравнениях системы (1) B_z , получим

$$Lu \equiv -\Delta(r^2 \Delta u) + \frac{M^2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -\Omega, \quad M^2 = \frac{I^2 \sigma}{\eta}, \quad \Omega = \frac{4P}{\eta} \quad (2)$$

Уравнение (2) должно быть решено с двумя граничными условиями на контуре Γ , ограничивающем замкнутую область $G \{0 \leq r \leq R, -\alpha \leq \varphi \leq \alpha\}$

$$u|_\Gamma = 0, \quad Bu|_\Gamma = 0 \quad (3)$$

Здесь B — оператор, действующий на функцию u по правилу

$$Bu = -\frac{\mu_0 \sqrt{\sigma \eta} r^2}{M} \int_0^\varphi \left(-\frac{\Omega}{4} + \Delta u \right) d\varphi$$

Решение задачи (2), (3) ищем в виде суммы двух функций

$$u = v(r, \varphi) + w(r, \varphi) \quad (4)$$

функцию w целесообразно взять в следующей форме:

$$w(r, \varphi) = \frac{\Omega}{16} r^2 \left[\frac{\text{sh } M_2 \alpha}{\text{sh}(M_1 - M_2)} \alpha \left(\text{ch } M_1 \varphi - \frac{\text{ch } M_1 \alpha}{\text{ch } M_2 \alpha} \text{ch } M_2 \varphi \right) + \left(1 - \frac{\text{ch } M_2 \varphi}{\text{ch } M_2 \alpha} \right) \right] \quad (5)$$

$$M_{1,2} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 - 16}}{2}$$

Применение оператора B к функции w дает

$$Bw = -\frac{\Omega \mu_0 \sqrt{\sigma \eta}}{16} r^2 \left[\frac{\text{sh } M_2 \alpha}{\text{sh}(M_1 - M_2)} \alpha \left(\text{sh } M_1 \varphi - \frac{\text{ch } M_1 \alpha}{\text{ch } M_2 \alpha} \text{sh } M_2 \varphi \right) - \frac{\text{sh } M_2 \varphi}{\text{ch } M_2 \alpha} \right]$$

Легко убедиться в том, что функция $w(r, \varphi)$ обладает следующими свойствами:

$$\text{а) } Lw = -\Omega, \quad \text{б) } w(r, \pm\alpha) = 0, \quad \text{в) } Bw(r, \pm\alpha) = 0$$

Функция $v(r, \varphi)$ должна быть определена из уравнения

$$Lv = 0 \quad (6)$$

с граничными условиями

$$v|_\Gamma = -w|_\Gamma, \quad B_1 v|_\Gamma = Bw|_\Gamma \quad (7)$$

Здесь B_1 — оператор, действующий на функцию v по правилу

$$B_1 v = \frac{\mu_0 \sqrt{\sigma \eta} r^2}{M} \int_0^\varphi \Delta v d\varphi$$

Уравнению (6) удовлетворяют решения вида

$$v(r, \varphi; \omega) = r^\omega \Phi(\varphi; \omega) \tag{8}$$

в которых функция $\Phi(\varphi; \omega)$ определяется из уравнения

$$\Phi'''' + (2\omega^2 - M^2)\Phi'' + \omega^4\Phi = 0 \tag{9}$$

а $\omega \neq 0$ — произвольное вещественное число. Линейно независимые решения уравнения (9), удовлетворяющие условию симметрии относительно $\varphi = 0$, имеют следующий вид:

$$\Phi^{(1)}(\varphi; \omega) = \text{ch } 1/2 M \varphi \text{ ch } 1/2 \sqrt{M^2 - 4\omega^2} \varphi, \quad \Phi^{(2)}(\varphi; \omega) = \text{sh } 1/2 M \varphi \text{ sh } 1/2 \sqrt{M^2 - 4\omega^2} \varphi \tag{10}$$

Если потребовать, чтобы решения $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$ удовлетворяли условию обращения в нуль при $\varphi = \pm \alpha$, то в (10) необходимо положить

$$\omega = \omega_n = \frac{1}{2\alpha} [M^2 \alpha^2 + n^2 \pi^2]^{1/2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{11}$$

$$\Phi^{(1)} \equiv \Phi_k^{(1)}(\varphi; \omega_{2k+1}), \quad \Phi^{(2)} \equiv \Phi_k^{(2)}(\varphi; \omega_{2k}) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Общее решение уравнения (6) запишем в виде суперпозиции решений (8) с ω_n , определенными из (11)

$$v(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k r^{\omega_{2k+1}} \text{ch } \frac{M\varphi}{2} \cos \frac{(2k+1)\pi\varphi}{2\alpha} + b_k r^{\omega_{2k}} \text{sh } \frac{M\varphi}{2} \sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha} \right] \tag{12}$$

Применение оператора B_1 к (12) дает

$$B_1 v = \mu_0 \sqrt{\sigma\eta} \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k r^{\omega_{2k+1}} \text{sh } \frac{M\varphi}{2} \cos \frac{(2k+1)\pi\varphi}{2\alpha} + b_k r^{\omega_{2k}} \text{ch } \frac{M\varphi}{2} \sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha} \right] \tag{13}$$

Условия (7) при $r = R$ определяют два соотношения

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k R^{\omega_{2k+1}} \cos \frac{(2k+1)\pi\varphi}{2\alpha} = -\text{ch } \frac{M\varphi}{2} w(R, \varphi) - \frac{\text{sh } 1/2 M \varphi}{\mu_0 \sqrt{\sigma\eta}} B w(R, \varphi) \tag{14}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k R^{\omega_{2k}} \sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha} = \text{sh } \frac{M\varphi}{2} w(R, \varphi) + \frac{\text{ch } 1/2 M \varphi}{\mu_0 \sqrt{\sigma\eta}} B w(R, \varphi) \tag{15}$$

которые представляют собой разложения по четной и нечетной частям системы собственных функций следующей задачи Штурма — Лиувилля

$$\Phi_{\varphi\varphi}'' + \lambda^2 \Phi = 0, \quad \Phi(\pm\alpha) = 0$$

Коэффициенты a_k и b_k определяются следующими выражениями:

$$a_k = \frac{(-1)^k (2k+1) \pi \Omega \text{ch } 1/2 M \alpha}{4\alpha^2 R^{\omega_{2k+1}-2} \omega_{2k+1}^2 (\omega_{2k+1}^2 - 4)} \equiv \frac{a_k'}{R^{\omega_{2k+1}}}, \quad b_k = \frac{(-1)^k k \pi \Omega \text{sh } 1/2 M \alpha}{2\alpha^2 R^{\omega_{2k}-2} \omega_{2k}^2 (\omega_{2k}^2 - 4)} \equiv \frac{b_k'}{R^{\omega_{2k}}} \tag{16}$$

Таким образом, значения скорости и магнитной индукции внутри рассматриваемого канала определяются так:

$$u = v(r, \varphi) + w(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k' \left(\frac{r}{R} \right)^{\omega_{2k+1}} \text{ch } \frac{M\varphi}{2} \cos \frac{(2k+1)\pi\varphi}{2\alpha} + b_k' \left(\frac{r}{R} \right)^{\omega_{2k}} \text{sh } \frac{M\varphi}{2} \sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha} \right] + \frac{\Omega}{16} r^2 \left[\frac{\text{sh } M_2 \alpha}{\text{sh}(M_1 - M_2) \alpha} \left(\text{ch } M_1 \varphi - \frac{\text{ch } M_1 \alpha}{\text{ch } M_2 \alpha} \text{ch } M_2 \varphi \right) + \left(1 - \frac{\text{ch } M_2 \varphi}{\text{ch } M_2 \alpha} \right) \right] \tag{18}$$

$$B_z = B w - B_1 v = -\mu_0 \sqrt{\sigma\eta} \left\{ \frac{\Omega r^2}{16} \left[\frac{\text{sh } M_2 \alpha}{\text{sh}(M_1 - M_2) \alpha} \left(\text{sh } M_1 \varphi - \frac{\text{ch } M_1 \alpha}{\text{ch } M_2 \alpha} \text{sh } M_2 \varphi \right) - \frac{\text{sh } M_2 \varphi}{\text{ch } M_2 \alpha} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k' \left(\frac{r}{R} \right)^{\omega_{2k+1}} \text{sh } \frac{M\varphi}{2} \cos \frac{(2k+1)\pi\varphi}{2\alpha} + b_k' \left(\frac{r}{R} \right)^{\omega_{2k}} \text{ch } \frac{M\varphi}{2} \sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha} \right] \right\}$$

Возможность применения обобщенного принципа суперпозиции в выражениях u и B_z следует из того, что ряды в (17) и (18) дифференцируемы бесконечное число раз в открытой области G и непрерывно примыкают к нулю на контуре Γ [2].

При $M = 0$ соотношение (17) переходит в

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{r}{R}\right)^{1/2(2k+1)\pi/\alpha} \cos \frac{(2k+1)\pi\varphi}{2\alpha} + \frac{\Omega r^2}{16} \left(1 - \frac{\cos 2\varphi}{\cos 2\alpha}\right) \quad (19)$$

которое совпадает с выражением, приведенным в [3]¹.

С помощью построенного решения (17), (18) можно получить выражения для скорости и магнитной индукции в непроводящем канале, контур которого образован дугами концентрических окружностей R и λR ($0 \leq \lambda < 1$). Линейный ток J проходит через общий центр окружностей, плоские стенки канала образуют угол 2α . Очевидно, что решение задачи (2), (3) в этом случае должно быть представлено в виде суммы трех функций

$$u(r, \varphi) = w(r, \varphi) + v(r, \varphi) + v_i(r, \varphi) \quad (20)$$

Здесь $w(r, \varphi)$ по-прежнему определяется соотношением (5); функция $v(r, \varphi)$ определяется соотношением (12) с неизвестными коэффициентами a_k' и b_k' , не равными a_k и b_k , определенными формулами (16). Функция $v_i(r, \varphi)$ представляет собой инверсию решения (12) с неизвестными коэффициентами c_k' и d_k'

$$v_i(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[c_k' r^{-\omega_{2k+1}} \operatorname{ch} \frac{M\varphi}{2} \cos \frac{(2k+1)\pi\varphi}{2\alpha} + d_k' r^{-\omega_{2k}} \operatorname{sh} \frac{M\varphi}{2} \sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha} \right] \quad (21)$$

Из условий (3) следует теперь четыре соотношения

$$\begin{aligned} w(\lambda R, \varphi) + v(\lambda R, \varphi) + v_i(\lambda R, \varphi) &= w(R, \varphi) + v(R, \varphi) + v_i(R, \varphi) = \\ Bw(\lambda R, \varphi) - B_1v(\lambda R, \varphi) - B_1v_i(\lambda R, \varphi) &= \\ = Bw(R, \varphi) - B_1v(R, \varphi) - B_1v_i(R, \varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

с помощью которых можно определить

$$\begin{aligned} a_k' &= a_k \frac{1 - \lambda^{2+\omega_{2k+1}}}{1 - \lambda^{2\omega_{2k+1}}}, & b_k' &= b_k \frac{1 - \lambda^{2+\omega_{2k}}}{1 - \lambda^{2\omega_{2k}}} \\ c_k' &= a_k R^{2\omega_{2k+1}} \frac{\lambda^{\omega_{2k+1}+2} - \lambda^{2\omega_{2k+1}}}{1 - \lambda^{2\omega_{2k+1}}} \\ d_k' &= b_k R^{2\omega_{2k}} \frac{\lambda^{\omega_{2k}+2} - \lambda^{2\omega_{2k}}}{1 - \lambda^{2\omega_{2k}}} \end{aligned} \quad (23)$$

Магнитная индукция

$$B_z = Bw - B_1(v + v_i)$$

Предельный переход $\lambda \rightarrow 0$, т. е. к каналу секториального сечения, очевиден. Течения в МГД-каналах, образующих в сечении кольцевой сектор, рассматривались в работе [4]. Но так как решения были построены там в форме разложений по радиальным собственным функциям

$$\varphi_n = \sin \left(\frac{n\pi}{-\log \lambda} \log \frac{r}{\lambda R} \right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

то проведение предельного перехода при $\lambda \rightarrow 0$ не имеет смысла.

Нужно отметить, что возможность построения решения в различных формах, т. е. с помощью разложений по различным системам собственных функций для канала, образующего в сечении кольцевой сектор, не должна приводить к недоразумению. Действительно, для достаточно широкого класса областей легко доказать теорему единственности решения системы (1) в классе функций, имеющих обобщенные первые производные, суммируемые с квадратом, и обращающихся в нуль на границе области.

Следовательно, решения системы (1), построенные различными методами, могут отличаться по гладкости в пределах указанного класса функций. В частности, в работе [4] из-за представления неоднородности в системе (1), как разрывной функции, построено обобщенное решение, в то время как в данной работе полученные решения бесконечно дифференцируемы в любой внутренней точке области.

Поступило 18 VI 1968

¹ В работе [3] в формулы (132.2) и (132.7) вклялись опечатки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шерклиф Дж. Теория электромагнитного измерения расхода. М., «Мир», 1965.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
3. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
4. D'Sa E. R. Magnetohydrodynamic duct flow under circular and radial magnetic fields. ZAMP, 1966, vol. 17, Fasc. 1, 140.

РАСХОДНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ТОРМОЖЕНИЯ ГАЗА В ПЕРЕХОДНОЙ ОБЛАСТИ

И. С. БАРИНОВ, Б. Е. ЖЕСТКОВ, А. И. ОМЕЛИК

(Москва)

Показано, что применимость расходного метода определения температуры торможения газа в переходной и свободномолекулярной областях ограничена требованием равенства температур газа в форкамере и измерительном объеме (датчике). Экспериментальным путем получено условие равновесия газа в сообщающихся разномогретых объемах в переходной области.

Расходный метод определения температуры торможения газа широко используется в экспериментальной газовой динамике. Однако область ее применения ограничена сплошной средой; возможность использования этого метода в экспериментах с разреженными газами выяснена недостаточно. Целью данной работы будет исследование возможности использования метода в переходной и свободномолекулярной областях.

1. Суть метода заключается в следующем. Зависимость критического расхода G_* от температуры и давления торможения T_0 и p_0 для газа с постоянным отношением удельных теплоемкостей κ имеет вид [1]

$$G_* = \Gamma(R_0, \kappa) \frac{p_0}{\sqrt{RT_0}} F_* \quad (1.1)$$

Здесь F_* — площадь критического отверстия, R — газовая постоянная; величина $\Gamma = \Gamma(R_0, \kappa)$ в предельных случаях очень больших и очень малых значений числа Рейнольдса R_0 соответственно равна

$$\Gamma_\infty = \sqrt{\kappa} \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{1/2} \kappa^{1/\kappa - 1}, \quad \Gamma_0 = \frac{\pi}{2}$$

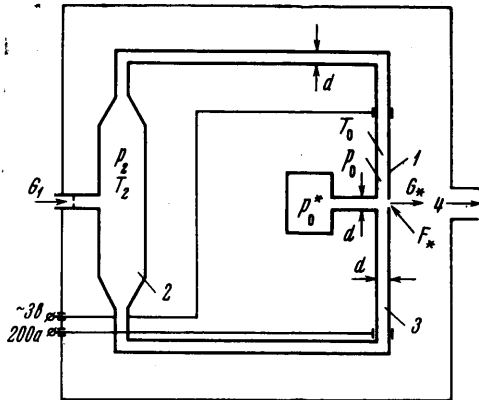
Число R_0 здесь и в дальнейшем относится к параметрам торможения.

Из (1.1), зная величины G_* , F_* , Γ и p_0 , можно определить температуру торможения T_0 . Удобнее, однако, определять температуру торможения, сравнивая исследуемый режим p_{02} , T_{02} с известным, например, с режимом без подогрева p_{01} , T_{01} . Тогда из (1.1) получаем

$$T_{02} = T_{01} (p_{02}/p_{01})^2 (\Gamma_2/\Gamma_1)^2 \quad (1.2)$$

если расход G_* и площадь критического отверстия F_* остались неизменными. Отношение Γ_2/Γ_1 равно единице в сплошной среде и в свободномолекулярной области; в переходной области, как показал Липманн [1], коэффициент Γ изменяется в 1.5 раза в диапазоне $0.01 < 1/R_0 < 1$. Но, так как $R_0 \sim 1/\sqrt{T_0}$, а температура при включении нагрева изменяется не более чем на порядок, то при неизменном расходе отношение Γ_2/Γ_1 изменяется не более чем на 1—2%.

Таким образом, при указанном выше подходе отсутствуют принципиальные ограничения по применению расходного метода как в сплошной среде, так и в свободномолекулярной и переходной областях. Для определения температуры T_{02} достаточно измерения величины T_{01} , p_{01} и p_{02} .



Фиг. 1