ОБ ОСРЕДНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА ПО ПОПЕРЕЧНОЙ СКОРОСТИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ОДНОМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА

В. А. РЫКОВ

(Москва)

Осреднением по поперечным скоростям кинетического уравнения Больцмана получена система двух интегро-дифференциальных уравнений для двух искомых функций, зависящих от продольной скорости u, времени t и координаты x.

Предполагается, что частицы взаимодействуют между собой как абсолютно жесткие упругие шары. Интегралы, входящие в уравнения, являются двухкратными. Уменьшение числа переменных у искомых функций и низкая кратность интегралов позволяют решать на электронных вычислительных машинах одномерные задачи как в стационарном, так и в нестационарном случаях.

В качестве примера дано численное решение полученных уравнений для задачи о структуре ударной волны.

1. Рассмотрим одномерные движения разреженного газа вдоль оси Ox с функцией распределения $f(t, x, u, V)$, подчиняющейся кинетическому уравнению Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = I(f) \tag{1.1}$$

Здесь t — время, x — пространственная координата, u — скорость частицы вдоль оси Ox, V — абсолютная величина поперечной скорости, $I(f)$ — интеграл столкновений.

Функция распределения принимается симметричной в пространстве скоростей относительно оси Ox, так что f будет иметь аргументами только две компоненты скорости u и V.

Продольная u и поперечная V скорости не равноправны по своей роли и значимости в одномерном движении газа. Перенос массы, импульса и энергии вдоль оси Ox осуществляется благодаря распределению частиц газа по скорости u, в то время как поперечная скорость V перемещает частицы только в плоскости $x = \text{const}$. Поперечное движение частиц важно в том отношении, что оно обладает «поперечной» кинетической энергией, т. е. кинетической энергией, связанной с составляющей движения в направлении, перпендикулярном оси Ox.

Если рассмотреть некоторую малую окрестность точки x, то все частицы, принадлежащие ей в момент t, можно разбить на группы по значению их продольной скорости.

Это распределение частиц по скорости u, не зависящее от величины скорости V, обозначим $f_0(t, x, u)$. Оно вычисляется через функцию распределения при помощи интеграла

$$f_0(t, x, u) = 2\pi \int_0^\infty f(t, x, u, V)\, V\, dV \tag{1.2}$$

Число частиц из окрестности $[x, x + \Delta x]$, продольные скорости которых принадлежат малому отрезку $[u, u + \Delta u]$, легко подсчитать

$$\Delta n = f_0(t, x, u)\, \Delta u \Delta x$$

Эти частицы, летящие со скоростью u, имеют распределение по скорости V и переносят вдоль оси Ox заключенную в них поперечную кинетическую энергию. Их поперечная температура $\varphi(t, x, u)$ выражается через функцию распределения в виде

$$\frac{k\varphi(t,x,u)}{m} = \frac{2\pi}{f_0}\int_0^\infty \frac{V^2}{2} f(t,x,u,V)\,V\,dV \tag{1.3}$$

а поперечная энергия есть

$$\Delta E_\perp = k\varphi f_0 \Delta u \Delta x$$

Здесь m — масса частицы, k — постоянная Больцмана. Допущение, которое делается в данной работе, состоит в том, что в произвольно выделенной выше группе частиц $f_0(t, x, u)\Delta u\Delta x$ распределение по поперечной скорости V заменяется максвелловским распределением, обладающим той же поперечной температурой $\varphi(t, x, u)$, что и истинное распределение.

Требование тождественного выполнения соотношений (1.2), (1.3) и предположение о максвелловском распределении по поперечной скорости единственным образом определяют представление функции $f(t, x, u, V)$ через комбинацию функций от меньшего числа переменных $f_0(t, x, u)$, $\varphi(t, x, u)$. Это представление имеет вид

$$f_k(t,x,u,V) = f_0(t,x,u)\frac{m}{2\pi k\varphi(t,x,u)}\exp\frac{-mV^2}{2k\varphi(t,x,u)} \tag{1.4}$$

Одновременно с функцией $\varphi(t, x, u)$ удобно пользоваться функцией $h(t, x, u)$, которая связана с φ соотношением

$$h(t,x,u) = \frac{2k\varphi(t,x,u)}{m} f_0(t,x,u) \tag{1.5}$$

Ее физический смысл ясен из равенства

$$\Delta E_\perp = k\varphi f_0\Delta u\Delta x = {}^1\!/_2 m h(t, x, u)\Delta u\Delta x$$

т. е. ${}^1\!/_2 mh$ есть плотность распределения «поперечной» кинетической энергии по скорости u. Из (1.3) и (1.5) следует

$$h(t,x,u) = 2\pi\int_0^\infty V^2 f(t,x,u,V)\,V\,dV$$

Для того чтобы получить уравнения, определяющие функции f_0 и φ, поступим следующим образом.

Умножим левую и правую части уравнения (1.1) на $2\pi V$ и проинтегрируем по переменной V в пределах от 0 до ∞. Затем умножим уравнение (1.1) на $2\pi V^3$ и снова проинтегрируем по V в тех же пределах.

Меняя порядок операций интегрирования и дифференцирования в обоих уравнениях и вспоминая определения функций f_0 и h через f, придем к системе уравнений

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + u\frac{\partial f_0}{\partial x} = 2\pi\int_0^\infty I(f)\,V\,dV$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} = 2\pi\int_0^\infty V^2 I(f)\,V\,dV$$

Пока в подынтегральных выражениях не установлена связь функции f с функциями f_0 и h эта система уравнений не замкнута. Для ее замыкания воспользуемся предложенным ранее представлением (1.4) функции f через f_0 и φ. Заменяя функцию f на аппроксимирующую ее функцию (1.4) f_k, получаем искомую систему уравнений

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}+u\frac{\partial f_0}{\partial x}=2\pi\int\limits_0^\infty I(f_k)V\,dV \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}=2\pi\int\limits_0^\infty V^2I(f_k)V\,dV, \qquad h=\frac{2k\varphi}{m}f_0 \tag{1.7}$$

В правых частях этих уравнений стоят шестикратные интегралы. В случае, когда частицы взаимодействуют между собой как абсолютно жесткие упругие шары с диаметром σ, четыре интегрирования удается провести аналитически, так что в окончательных уравнениях присутствуют только двухкратные интегралы. Обезразмеривание величин осуществляется при помощи формул

$$t=\tau t', \qquad x=U_0\tau x', \qquad u=U_0u'$$

$$\varphi=T_0\varphi', \qquad f_0=f_0'n_0/U_0, \qquad h'=\varphi'f_0'$$

$$U_0=(2kT_0/m)^{1/2}, \qquad \tau=[4n_0\sigma^2(\pi kT_0/m)^{1/2}]^{-1}$$

где n_0, T_0 — характерные плотность и температура. Уравнения, записанные в безразмерных переменных с отброшенными штрихами, имеют вид

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}+u\frac{\partial f_0}{\partial x}=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int S_1(t,x,u,\xi,\xi_1)\,d\xi\,d\xi_1-f_0\int\limits_{-\infty}^{\infty}S_2(t,x,u,\xi)\,d\xi\right\} \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int S_1\left[\frac{\varphi(\xi)+\varphi(\xi_1)}{2}+\right.\right.$$

$$\left.+(u-\xi)(u-\xi_1)\left(2\frac{\varphi^2(\xi)+\varphi^2(\xi_1)}{(\varphi(\xi_1)+\varphi(\xi))^2}\chi[(u-\xi)(u-\xi_1)]-1\right)\right]d\xi\,d\xi_1-$$

$$-h\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[S_2\left(\frac{2\varphi(\xi)+3\varphi(u)}{2(\varphi(\xi)+\varphi(u))}-\varphi(u)\frac{(u-\xi)^2}{(\varphi(u)+\varphi(\xi))^2}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+|u-\xi|f_0(\xi)\varphi(u)\frac{(u-\xi)^2}{(\varphi(\xi)+\varphi(u))^2}\right]d\xi\right\} \tag{1.9}$$

где $h=\varphi f_0$

$$S_1(t,x,u,\xi,\xi_1)=f_0(\xi)f_0(\xi_1)\exp\left\{-\frac{4(u-\xi)(u-\xi_1)}{\varphi(\xi)+\varphi(\xi_1)}\chi[(u-\xi)(u-\xi_1)]\right\}$$

$$S_2(t,x,u,\xi)=f_0(\xi)[\varphi(\xi)+\varphi(u)]^{1/2}\left\{\frac{|u-\xi|}{[\varphi(\xi)+\varphi(u)]^{1/2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left[\frac{(u-\xi)^2}{\varphi(u)+\varphi(\xi)}\right]\left[1-\Phi\left(\frac{|u-\xi|}{[\varphi(\xi)+\varphi(u)]^{1/2}}\right)\right]\right\}$$

$$\chi(z)=\begin{cases}0 & \text{при } z<0\\ 1 & \text{при } z>0\end{cases} \qquad \left(\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{-t^2}dt\right)$$

Для более краткой записи формул здесь применяются обозначения вида $f_0(u)$, $\varphi(\xi)$ с указанием зависимости функций только от величины скорости. При этом подразумевается, что функции f_0 и φ зависят и от остальных переменных t, x.

Безразмерные макроскопические параметры течения плотность n', скорость U', температура T' и поток тепла q' определяются через f_0 и φ

$$n' = \frac{n}{n_0} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_0(t, x, u)\,du, \qquad U' = \frac{U}{U_0} = \frac{1}{n'}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} uf_0(t, x, u)\,du$$

$$T' = \frac{T}{T_0} = \frac{2}{3}\frac{1}{n'}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [(u - U')^2 + \varphi] f_0\,du$$

$$q' = \frac{q}{kT_0n_0U_0} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u - U')[(u - U')^2 + \varphi] f_0\,du$$

Получение уравнений (1.8), (1.9) можно рассматривать как осреднение уравнения Больцмана в плоскости $u = \text{const}$ пространства скоростей. При осреднении по поперечной скорости V функция распределения в сечении $u = \text{const}$ заменяется соответствующей канонической функцией (1.4) (вновь зависящей от V), которая сохраняет свойства функции распределения, существенные для одномерных течений. Правила, по которым осуществляется такое соответствие, и составляют метод осреднения (гл. 5 § 1 [1]). Выбор канонической функции (1.4) определялся, во-первых, требованием выполнения свойств (1.2), (1.3) и, во-вторых, тем, что таким видом функции распределения (1.4) обладают как свободномолекулярные одномерные движения, так и движения в режиме сплошной среды.

2. Для системы уравнения (1.6), (1.7) рассмотрим такие вопросы: выполнение законов сохранения, доказательство H-теоремы, получение навье-стоксовской функции распределения.

Выполнение законов сохранения массы, импульса и энергии для системы уравнений (1.6), (1.7) очевидно, так как при осреднении никакой порчи структуры интеграла столкновений Больцмана не производилось. Укажем как могут быть получены макроскопические уравнения сохранения.

Умножая уравнение (1.6) на m и интегрируя его по скорости u в пределах от $-\infty$ до ∞, получим уравнение неразрывности. Умножая (1.6) на mu и снова интегрируя по u в тех же пределах, получим уравнение сохранения импульса. Для получения уравнения сохранения энегрии необходимо умножить уравнение (1.6) на $^1/_2 mu^2$, уравнение (1.7) на $^1/_2 m$ и проинтегрировать оба уравнения по u в пределах от $-\infty$ до ∞. Затем уравнения сложить.

Обратимся теперь к H-теореме. В рассматриваемом случае H-функция Больцмана имеет вид

$$H = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} f_k \ln f_k 2\pi V dV\,du \tag{2.1}$$

Уравнение, определяющее изменение H-функции, можно получить следующим образом.

Умножим уравнение (1.6), (1.7) соответственно на

$$[1 + \ln(f_0 m / 2k\pi\varphi)] \qquad (-m / 2k\varphi)$$

Затем сложим результаты.

После некоторых преобразований получится уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(2\pi\int_0^\infty f_k\ln f_k V\,dV\right)+u\frac{\partial}{\partial x}\left(2\pi\int_0^\infty f_k\ln f_k V\,dV\right)=$$

$$=2\pi\int_0^\infty(1+\ln f_k)I(f_k)V\,dV$$

Интегрируя его по u в пределах от $-\infty$ до ∞ и вводя H-функцию (2.1), получим

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial H_1}{\partial x}=G(f_k) \qquad (2.2)$$

где

$$H_1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\infty uf_k\ln f_k 2\pi V\,dV\,du$$

$$G(f_k)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\infty(1+\ln f_k)I(f_k)2\pi V\,dV\,du$$

Известно [2], что $G(f)\leqslant 0$. Уравнение (2.2) определяет величину необратимого изменения H-функции. Интегрируя уравнение (2.2) в пределах изменения координаты x от x_1 до x_2, получим

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2}H(t,x)\,dx+H_1(t,x_2)-H_1(t_1,x_1)=\int_{x_1}^{x_2}G(f_k)\,dx$$

Если рассматривается замкнутая система, то поток H-функции

$$H_1(t,x_1)=H_1(t,x_2)=0$$

и находим

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2}H(t,x)\,dx\leqslant 0$$

Этот результат составляет основное содержание H-теоремы Больцмана. Если система находится в равновесии, то $G(f_k)=0$. Как известно [2], для того чтобы $G(f)=0$, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения являлась локальным распределением Максвелла. Это означает, что правые части уравнений (1.6), (1.7) одновременно обращаются в нуль, лишь на локальном распределении Максвелла.

Систему уравнений (1.6), (1.7) можно записать в виде

$$\int_0^\infty\left[\frac{\partial f_k}{\partial t}+u\frac{\partial f_k}{\partial x}-I(f_k)\right]2\pi V\,dV=0$$

$$\int_0^\infty\left[\frac{\partial f_k}{\partial t}+u\frac{\partial f_k}{\partial x}-I(f_k)\right]2\pi V^3\,dV=0 \qquad (2.3)$$

При малых числах Кнудсена функция распределения близка к локальной максвелловской функции распределения, поэтому f_k можно линеаризовать около нее. Положим

$$f_0 = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\frac{-m(u-U)^2}{2kT}(1+f_0')$$

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{T(1+\varphi)'} \approx T^{-1}(1-\varphi') \tag{2.4}$$

Здесь f_0', φ' — функции, малые по сравнению с единицей. Функция f_k в линеаризованном виде запишется так:

$$f_k = f_m[1+\psi(t, x, u, V)] \tag{2.5}$$

$$\psi(t, x, u, V) = f_0'(t, x, u) + \varphi'(t, x, u)\left(\frac{mV^2}{2kT} - 1\right) \tag{2.6}$$

$$f_m = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m(u-U)^2}{2kT} - \frac{mV^2}{2kT}\right]$$

Здесь f_m — локально максвелловская функция распределения.

Система уравнений (2.3) будет удовлетворена, если

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + u\frac{\partial f_k}{\partial x} = I(f_k) \tag{2.7}$$

Применение метода Чепмена — Энскога к уравнению (2.7) в первом приближении приводит к уравнениям

$$I(f_m, f_m) = 0, \qquad 2I(f_m, f_m\psi) = \frac{\partial f_m}{\partial t} + u\frac{\partial f_m}{\partial x}$$

К ним добавляется требование, чтобы плотность n, скорость U и температура T правильно вычислялись уже по локально максвелловской функции f_m.

Известно [2], что решение такой задачи методом Чепмена — Энскога приводит к навье-стоксовской функции распределения

$$f = f_m\left\{1 - \frac{4}{3}\frac{\mu}{p}\frac{\partial U}{\partial x}\frac{m}{2kT}\left[(u-U)^2 - \frac{V^2}{2}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{5}\frac{\lambda}{p}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{m}{kT}(u-U)\left[\frac{5}{2} - \frac{mV^2}{2kT} - \frac{m(u-U)^2}{2kT}\right]\right\} \tag{2.8}$$

$$\mu = \frac{5}{16}\left(\frac{kmT}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{\sigma^2}, \qquad \lambda = \frac{15}{4}\frac{k}{m}\mu$$

Здесь выражения для коэффициентов вязкости μ и теплопроводности λ взяты по их первому приближению. Отличие коэффициентов от точных значений составляет около 2%.

Функция распределения (2.5) совпадает с (2.8), если f_0' и φ' взять в виде

$$f_0' = -\frac{4}{3}\frac{\mu}{p}\frac{\partial U}{\partial x}\left[\frac{m(u-U)^2}{2kT} - \frac{1}{2}\right] +$$

$$+ \frac{2}{5}\frac{\lambda}{p}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{m(u-U)}{kT}\left[\frac{3}{2} - \frac{m(u-U)^2}{2kT}\right]$$

$$\varphi' = \frac{2}{3}\frac{\mu}{p}\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{2}{5}\frac{\lambda}{p}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{m(u-U)}{kT}$$

Таким образом, с принятой для приближения (2.8) точностью показано, что при малых числах Кнудсена система уравнений (1.6), (1.7) имеет своим решением навье-стоксовскую функцию распределения. Это означает, что уравнения (1.6), (1.7) удовлетворительно описывают течение газа в режиме сплошной среды.

Отметим, что функция распределения (1.4) дает точное решение для свободномолекулярного течения, если начальная функция распределения имеет вид (1.4), при этом закон отражения от плоской стенки может быть как зеркальным, так и диффузным.

3. В качестве примера численного решения системы уравнений (1.8), (1.9) рассмотрим задачу о структуре ударной волны при числе Маха $M = 2$.

Обозначим скорость, плотность и температуру газа до и после ударной волны соответственно n_1, U_1, T_1 и n_2, U_2, T_2. При $x = \pm\infty$ газ находится в состоянии равновесия, поэтому функции распределения будут максвелловскими

$$f(x = -\infty, u, V) = n_1\left(\frac{m}{2\pi kT_1}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{m[(u-U_1)^2+V^2]}{2kT_1}\right]$$
$$f(x = \infty, u, V) = n_2\left(\frac{m}{2\pi kT_2}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{m[(u-U_2)^2+V^2]}{2kT_2}\right] \qquad (3.1)$$

Величины n_1, U_1, T_1 и n_2, U_2, T_2 связаны соотношениями Ренкина — Гюгонио. По функциям распределения (3.1) легко вычислить f_0 и φ. Если выбрать за характерные значения $n_0 = n_1$, $T_0 = T_1$, то безразмерные краевые условия для f_0 и φ принимают вид

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\left[u-\left(\frac{5}{6}\right)^{1/2}M\right]^2\right\}, \qquad \varphi = 1 \quad \text{при } x = -\infty \qquad (3.2)$$

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{n_2}{n_1}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{1/2}\exp\left\{-\left[u-\left(\frac{5}{6}\right)^{1/2}\frac{M^2+3}{4M}\right]^2\frac{T_1}{T_2}\right\}, \qquad \varphi = \frac{T_2}{T_1} \quad \text{при } x = \infty$$

$$h = \varphi f_0, \quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{4M^2}{M^2+3}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{(5M^2-1)(M^2+3)}{16M^2}, \quad M = 2 \qquad (3.3)$$

Таким образом, требуется найти решение системы уравнений (1.8), (1.9), удовлетворяющее краевым условиям (3.2), (3.3).

Эту задачу будем называть задачей 1. При численном решении задача 1 заменяется близкой к ней задачей 2:

найти решение системы уравнений (1.8), (1.9) в области $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, удовлетворяющее краевым условиям

$$f_0(x, u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\left[u-\left(\frac{5}{6}\right)^{1/2}M\right]^2\right\} \quad \text{при } x = x_1, \quad u > 0 \qquad (3.4)$$

$$\varphi(x, u) = 1$$

$$f_0(x, u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{n_2}{n_1}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{1/2}\exp\left\{-\left[u-\left(\frac{5}{6}\right)^{1/2}\frac{M^2+3}{4M}\right]^2\frac{T_1}{T_2}\right\}$$

$$\varphi(x, u) = \frac{T_2}{T_1} \quad \text{при } x = x_2, \quad u < 0 \qquad (3.5)$$

Если в задаче 2 $x_1 \to -\infty$, $x_2 \to \infty$, то она переходит в задачу 1. Это означает, что если в задаче 2 выбирать расстояние между x_1 и x_2 достаточно большим по сравнению с характерной толщиной ударной волны, то решение задачи 2 будет близко к решению задачи 1. Отметим, что задача 1 определяет решение с точностью до произвольной постоянной, связанной с выбором положения системы координат.

В случае задачи 2 естественно принять, что существует только единственное решение. Задача 2 решалась следующим методом итераций.

Систему уравнений (1.8), (1.9) можно записать в виде

$$u\frac{df_0}{dx} = G_1 - f_0L_1, \qquad u\frac{dh}{dx} = G_2 - hL_2, \quad h = \varphi f_0 \qquad (3.6)$$

Через G_1 и G_2 обозначены двойные интегралы, а через L_1 и L_2 однократные.

Задается некоторое правдоподобное начальное распределение f_0 и φ, удовлетворяющее краевым условиям, и подставляется в L_1, L_2, G_1, G_2. Затем решается система обыкновенных дифференциальных уравнений (3.6) с начальным условием (3.4) для скоростей $u > 0$ и с начальным условием (3.5) для $u < 0$. Значения функций f_0 и φ, полученные для дискретного множества равноотстоящих точек переменных x и u, заносятся в память электронной вычислительной машины. Затем найденные функции подставляются в L_1, L_2, G_1, G_2 и процесс повторяется.

За начальные функции принимались

$$f_0 = {}^1/_2\,[f_0(x = -\infty, u) + f_0(x = \infty, u)] + {}^1/_2[f_0(x = \infty, u) - f_0(x = -\infty, u)]\,\mathrm{th}\,x$$

$$\varphi = {}^1/_2\,[\varphi(x = -\infty, u) + \varphi(x = \infty, u)] + {}^1/_2\,[\varphi(x = \infty, u) - \varphi(x = -\infty, u)]\,\mathrm{th}\,x$$

где $x_2 - x_1$ полагалось равным приблизительно 10 длинам среднего свободного пробега.

Численную схему решения уравнений покажем на следующем примере. Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = a(x)\,[b(x) - y], \qquad x = 0, \; y(0) = y_0 \tag{3.7}$$

Требуется найти значение y в точке $x = \Delta x$. Значения функций $a(x)$ и $b(x)$ заданы таблично с шагом Δx. На малом отрезке Δx положим

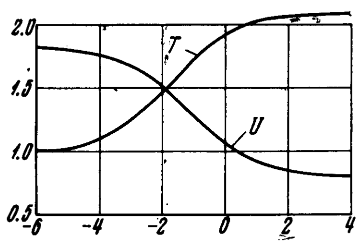
$$a(x) = {}^1/_2\,[a(0) + a(\Delta x)], \qquad b(x) = b(0) + [b(\Delta x) - b(0)]\,(x\,/\,\Delta x)$$

В этом случае уравнение (3.7) имеет решение

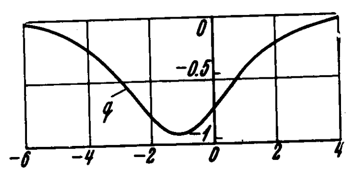
$$y(\Delta x) = [y(0) - b(0)]\exp\left[-\frac{a(0) + a(\Delta x)}{2}\,\Delta x\right] + b(\Delta x) +$$
$$+ [b(0) - b(\Delta x)]\left\{1 - \exp\left[-\frac{a(0) + a(\Delta x)}{2}\,\Delta x\right]\right\}\frac{2\Delta x}{a(0) + a(\Delta x)} \tag{3.8}$$

При интегрировании уравнений (3.6) применялась формула (3.8) с шагом $\Delta x = 0.05$. Вычисление интегралов L_1, L_2, G_1, G_2 проводилось методом Симпсона. Всего было осуществлено 40 итераций.

Проведенные вычисления показали, что при $M = 2$ сходимость итераций будет медленной. Можно сказать, что окончательное решение получается приблизительно за двадцать итераций. Дальнейшее итерирование ведет к медленному перемещению ударной волны как единого целого без заметного изменения профиля макропараметров. Это перемещение можно объяснить тем, что первоначальное положение ударной волны между x_1 и x_2 не совпадало с тем единственным положением, которое должна занимать ударная волна при конечных значениях x_1 и x_2.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 приведены графики зависимости макроскопической скорости U и температуры T от координаты x.

На фиг. 2 дан график потока тепла q. Толщина ударной волны, определенная по профилю скорости, составляет 3.7 средних длин свободного пробега молекул в набегающем потоке. Точность полученных результатов контролировалась выполнением соотношения $nU = \mathrm{const}$. При этом оказалось, что относительная ошибка составляет 1.5%. Расчеты осуществлялись на машине БЭСМ-6.

Поступило 14 I 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, М., «Наука», 1967.
2. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. М., «Наука», 1967.