

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СКАЧКЕ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕЧЕНИЕ В СЛОЕ КНУДСЕНА) И ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ О ПЕРЕДАЧЕ ТЕПЛА МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ

С. Л. ГОРЕЛОВ, М. Н. КОГАН

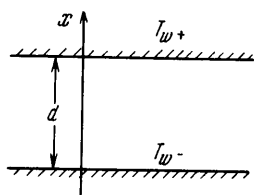
(Москва)

В работе методом Монте-Карло [1, 2] решается линеаризованное уравнение Больцмана для задач о передаче тепла между параллельными пластинами и о температурном скачке на стенке (течение в слое Кнудсена). Известно что линейная задача Куэтта, разделяется на две: на задачу о чистом сдвиге и задачу о передаче тепла между двумя параллельными пластинами. Задача о слое Кнудсена также линейна [3] и подобно задаче Куэтта разделяется на задачу о скорости скольжения и задачу о скачке температуры. Задачи о чистом сдвиге и о скорости скольжения рассмотрены в работе [2].

Для модельного уравнения Больцмана задача о температурном скачке рассмотрена в работе [4]. Для линеаризованного уравнения Больцмана указанные выше задачи решались либо разложением функции распределения по ортогональным полиномам [5-7], что дает удовлетворительные результаты при малых числах Кнудсена, либо методом моментов с выбранной из физических соображений аппроксимацией функции распределения в виде многочленов [8-10]. Решение, приведенное ниже, не требует введения каких-либо предположений о виде функции распределения.

Конкретные расчеты проведены для модели молекул, которую назовем моделью «максвелловских сфер». Предполагается, что молекулы сталкиваются как твердые упругие сферы, сечения которых обратно пропорциональны относительной скорости сталкивающихся молекул. Газ из таких молекул близок к максвелловскому или газу из псевдомаксвелловских молекул [2].

1. Рассмотрим линейную задачу о теплопередаче между параллельными пластинами (фиг. 1) с температурами T_{w+} и T_{w-} , причем $(T_{w+} - T_{w-}) / T_0 \ll 1$, где T_0 — характерная температура. В этом случае функция распределения f мало отличается от некоторой характерной максвелловской функции распределения f_{00} ; положим



Фиг. 1

$$f = f_{00}(1 + \varphi), \quad f_{00} = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_0} \right)^{3/2} \exp \frac{-m\xi^2}{2kT_0} \quad (1.1)$$

Здесь m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана, ξ — скорость молекулы, φ — малая величина, квадратом которой можно пренебречь. Соответственно, плотность частиц и температура будут мало отличаться от характерной плотности n_0 и температуры T_0

$$n = n_0(1 + \nu), \quad T = T_0(1 + \tau) \quad (1.2)$$

$$\nu = \frac{1}{n_0} \int f_{00} \varphi d\xi, \quad \tau = \frac{2}{3kn_0T_0} \int \frac{m\xi^2}{2} f_{00} \varphi d\xi - \nu \quad (1.3)$$

Пусть молекулы отражаются от пластин диффузно, т. е. отражаемые молекулы имеют локально-максвелловское распределение с температурой соответствующей пластины. Пусть n_0 — удвоенная плотность отраженных

молекул от пластины $x = d$ и $T_0 = T_w$. Тогда граничные условия записутся

$$f_{w-}(\xi_x > 0, x = 0) = f_{00}[1 + v_{w-}] \quad (1.4)$$

$$f_{w+}(\xi_x < 0, x = d) = f_{00}[1 + (m\xi_x^2/2kT_0 - 3/2v_{w+})] \quad (1.5)$$

Задача, заключается в нахождении функции Φ , удовлетворяющей линеаризованному уравнению Больцмана при условиях (1.4), (1.5).

2. Коротко рассмотрим метод Монте-Карло для решения поставленной задачи. Этот метод применялся для расчета коэффициентов переноса [1] и решения задачи Куэтта (чистый сдвиг) и задачи о скорости скольжения [2]. Рассмотрим множество траекторий, описываемых молекулами в области между пластинами (фиг. 1). Если обе пластины имеют равную температуру T_0 и газ находится в равновесии с пластинами с функцией распределения f_{00} , то вероятность пролета пробной молекулы по некоторой траектории обозначим через W_0 . Вероятность пролета по той же траектории в случае пластин с разной температурой и искомой функцией распределения f обозначим W .

Отношение вероятностей можно представить в виде [1, 2]

$$\frac{W}{W_0} = \frac{f_w(\xi)}{f_{00}(\xi)} \frac{P(x, \xi) dx}{P_0(x, \xi) dx} \frac{g\sigma(g)f(\xi_1)}{g\sigma(g)f_{00}(\xi_1)} \dots \quad (2.1)$$

Здесь $\sigma = \sigma_0/g$ — сечение столкновения, $g = |\xi - \xi_1|$ — относительная скорость молекул при столкновении.

В равенстве (2.1) первый множитель — отношение вероятностей вылета с поверхности со скоростью ξ и третий — отношение вероятностей столкновения с молекулой, летящей со скоростью ξ_1 , были рассмотрены в работах [1, 2]. Второй множитель представляет собой отношение вероятностей пробега расстояния x без столкновения и столкновения в интервале dx . Вероятность того, что молекула пролетит расстояние x без столкновения и столкнется в интервале dx для функции распределения f будет

$$P(x, \xi) dx = \frac{\sigma_0}{\xi_x} n(x) \exp \left[-\frac{\sigma_0}{\xi_x} \int_x n(s) ds \right] dx \quad (2.2)$$

Та же величина для функции распределения f_{00}

$$P_0(x, \xi) dx = \frac{\sigma_0 n_0}{\xi_x} \exp \left[-\frac{\sigma_0 n_0}{\xi_x} x \right] dx \quad (2.3)$$

поэтому

$$\frac{P(x, \xi) dx}{P_0(x, \xi) dx} = \frac{n(x)}{n_0} \exp \frac{\sigma_0 n_0 x}{\xi_x} \left[1 - \frac{1}{n_0 x} \int_x n(s) ds \right] \quad (2.4)$$

Введем коэффициент вязкости μ_0 и число Кнудсена K

$$\mu_0 = \frac{2kT_0}{\sigma_0}, \quad K = \frac{l}{d} = \frac{\mu_0}{p_0 d} \left(\frac{2kT_0}{m} \right)^{1/2} \quad (2.5)$$

Здесь l — длина пробега, $p_0 = kn_0T_0$ — давление. Записывая выражение (2.1) в безразмерном виде и учитывая (1.1) — (1.5), имеем

$$\frac{W}{W_0} = 1 + \varphi_w + v(x_1) - \frac{2}{Kv_x} \int_{x_1} v(s) ds + \varphi_1 + \dots \quad (2.6)$$

$$(x_1 = x/d, \quad v = \xi\sqrt{m/2kT_0})$$

Пусть нужно вычислить перенос молекулами через плоскость $x = \text{const}$ некоторого молекулярного признака A . Молекула, двигающаяся по некоторой траектории α , переносит через плоскость $x = \text{const}$ долю искомого молекулярного признака A , равную

$$\sum_{\beta(\alpha)} A_{\alpha\beta},$$

где $\beta(\alpha)$ — число пересечений траекторией α плоскости $x = \text{const}$.

Если молекулы имеют температуры $T_{w-} = T_{w+} = T_0$ и функцию распределения f_{00} , то средний перенос признака A на одну траекторию равен

$$A_0 = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta(\alpha)} A_{\alpha\beta} \quad (2.7)$$

Здесь N — число траекторий. Так как в исследуемом течении вероятность пролета молекулой той же траектории отличается в W/W_0 раз, то

$$A = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{W}{W_0} \right)_{\alpha} \sum_{\beta(\alpha)} A_{\alpha\beta} \quad (2.8)$$

Тогда, вычитая (2.7) из (2.8), получаем

$$A - A_0 = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{W}{W_0} - 1 \right)_{\alpha} \sum_{\beta(\alpha)} A_{\alpha\beta}. \quad (2.9)$$

Как следует из (2.6), для нахождения W/W_0 надо знать функцию φ , которая находится следующим образом. Для v , согласно (1.3), имеем

$$v = \frac{1}{n_0} \int f_{00} \varphi d\xi = \frac{U}{N n_0} \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{W}{W_0} - 1 \right)_{\alpha} \sum_{\beta(\alpha)} \frac{1}{|\xi_x|_{\alpha\beta}} \quad (2.10)$$

Здесь $U = \int f_{00} |\xi_x| d\xi$ — нормирующий множитель. Разбивая поле скоростей на скоростные ячейки, получаем

$$\varphi_{ijk} = \frac{U}{N f_{00ijk} \Delta\xi_x \Delta\xi_y \Delta\xi_z} \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{W}{W_0} - 1 \right)_{\alpha} \sum_{\beta(\alpha)} \frac{1}{|\xi_x|_{ijk\alpha\beta}} \quad (2.11)$$

Здесь индексами i, j, k отмечена скоростная ячейка $\Delta\xi_x, \Delta\xi_y, \Delta\xi_z$ с центром в точке $(\xi_{xi}, \xi_{yj}, \xi_{zk})$.

Задача решается методом последовательных приближений. Пусть заданы $\varphi^{(v)}$ — значения φ в приближении v . Тогда по (2.6) находим $(W/W_0)^{(v)}$, и по (2.11) находим $\varphi^{(v+1)}$. За начальное приближение можно взять любую функцию, например нуль. Счет ведется до тех пор, пока $\varphi^{(v)} = \varphi^{(v+1)}$ с заданной точностью ¹.

Для уменьшения памяти, нужной для запоминания функции φ , удобно воспользоваться осесимметричностью этой функции в пространстве скоростей, перейдя к цилиндрическим координатам. Выражение (2.11) перепишется в виде

$$\varphi_{is} = \frac{U}{2\pi N f_{00is} \xi_{rs} \Delta\xi_x \Delta\xi_r} \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{W}{W_0} - 1 \right)_{\alpha} \sum_{\beta(\alpha)} \frac{1}{|\xi_x|_{is}} \quad (2.12)$$

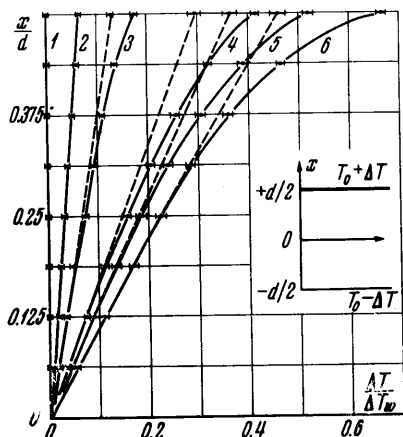
¹ В данной работе счет велся до тех пор пока интересующие нас макроскопические величины в приближениях $v+1$ и v не совпадали с заданной точностью.

Здесь $\xi_r^2 = \xi_y^2 + \xi_z^2$, индексы i, s означают скоростную ячейку $\Delta\xi_x, \Delta\xi_r$ с центром в точке (ξ_{xi}, ξ_{rs}) . Плотность и температура находятся по следующим формулам:

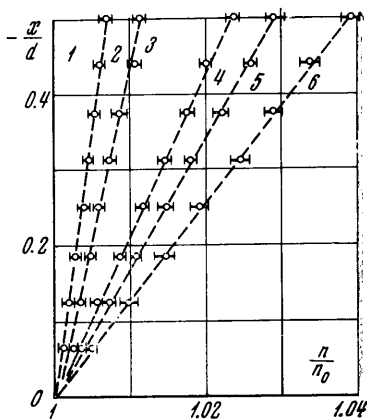
$$v = \frac{U}{Nn_0} \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{W}{W_0} - 1 \right)_{\alpha} \sum_{\beta(\alpha)} \frac{1}{|\xi_x|_{is}} \quad (2.13)$$

$$\tau = \frac{2U}{3kn_0T_0N} \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{W}{W_0} - 1 \right)_{\alpha} \sum_{\beta(\alpha)} \frac{m\xi^2}{2|\xi_x|} - v \quad (2.14)$$

3. Результаты расчетов теплопередачи между пластинами представлены на фиг. 2, 3, 4, 5. Для получения одного приближения разыгрывалось от $3 \cdot 10^4$ до $5 \cdot 10^4$ траекторий. Расчеты практически сошлись после трех приближений. За начальное



Фиг. 2



Фиг. 3

приближение принималось $\varphi = 0$. Для оценки статистического разброса проводились расчеты с несколькими последовательностями случайных чисел. Ошибка расчетов меняется в зависимости от числа K от 0.5% для $K = 10^6$ до 3% для $K = 0.5$. Соответственно, ошибка расчета температурного скачка колеблется от 0.5 до 4%. Суммарная погрешность расчетов отмечена на фигурах черточками. Для сохранения симметрии при построении графиков в качестве n_0 и T_0 приняты соответственно значения плотности и температуры в середине между пластинами. На фиг. 2 представлены кривые температуры для некоторых чисел Кнудсена, а именно

кривые	1	2	3	4	5	6
K	10^6	5	2.5	1	0.7581	0.5

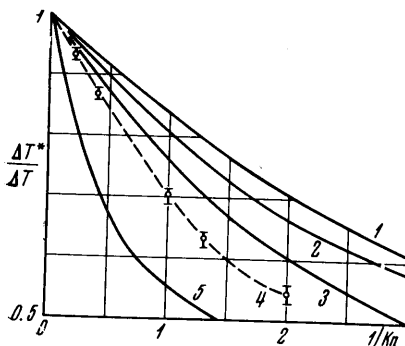
Пунктирными линиями нанесены касательные к кривым в точке $x = 0$. Профили плотности для тех же значений числа Кнудсена показаны на фиг. 3.

На фиг. 4 представлена зависимость скачка температуры от величины $1/K$. Скачок температуры ΔT^* определялся как разность между температурой в точке пересечения касательной к профилю температуры со стенкой и температурой стенки. Для сравнения нанесены результаты решения линейного уравнения Больцмана двумя методами. Кривые 1, 2, 3 представляют собой соответственно первую, вторую и третью аппроксимацию решения разложением функции распределения по ортогональным полиномам, полученного Ван-Чангом и Уленбеком [5, 6]. Кривая 4 — результаты данной работы. Кривая 5 — результаты решения линейного уравнения Больцмана методом моментов, данное в работах Гросса и Зиринга [10, 11].

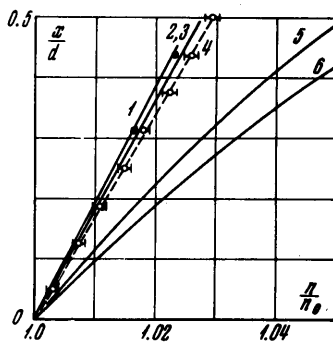
На фиг. 5 представлены кривые распределения плотности, полученные разными авторами для числа Кнудсена, равного 0.7581. Черными точками представлены результаты эксперимента, проведенного Теганом и Спрингером [14] для аргона.

При температуре до $T = 300^\circ \text{K}$ вязкость аргона пропорциональна температуре, т. е. можно считать, что его свойства удовлетворительно аппроксимируются максвелловскими молекулами. Как видно из графика, совпадение расчетов данной работы (кривая 4) с экспериментом удовлетворительное. На фигуре кривой 1 пред-

ставлены результаты расчета Ван-Чанга и Уленбека [8, 6] решения линейного уравнения Больцмана методом разложения функции распределения по ортогональным полиномам (вторая аппроксимация). На этой же фигуре нанесены результаты расчетов моментными методами с аппроксимацией функции распределения четырьмя и восемью членами. Кривая 2 — четырехмоментный метод (Лиз) [12-13] для максвелловских молекул, кривая 3 — четырехмоментный метод (Гросс и Зиринг) для модели твердых сфер, кривые 5 и 6 — восьмимоментный метод (Гросс и Зиринг)



Фиг. 4



Фиг. 5

соответственно для твердых сфер и максвелловских молекул [8-11]. Следует отметить, что, казалось бы, более точная восьмимоментная аппроксимация гораздо хуже согласуется с экспериментом, чем четырехмоментная.

4. Рассмотрим задачу о скачке температуры. Она получается из задачи Куэтта, если положить, что молекулы отражаются от пластины $x = d$ (фиг. 1) с навье-стоксовской функцией распределения [15] и характерный размер d положить порядка длины свободного пробега l^1 , определенной формулой (2.5).

Тогда граничные условия запишутся

$$f_w(\xi_x > 0, x = 0) = f_{00}[1 + v_w] \quad (4.1)$$

$$f_+(\xi_x < 0, x = d) = f_{00} \left[1 + \left(\frac{m\xi_x^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) \tau_+ - \frac{q_x}{p} \left(\frac{m}{kT} \right) \left(1 - \frac{\xi_x^2 m}{5kT} \right) \xi_x \right] \quad (4.2)$$

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

Здесь q_x — заданный тепловой поток, λ — коэффициент теплопроводности.

Метод, применяемый для решения, описан в п. 2. Распределения плотности и температуры находятся по формулам (2.13), (2.14). Отличие задач состоит в том, что неизвестна температура τ_+ на границе $x = d$. Температура выбирается так, чтобы градиент температуры в точке $x = d$ был

¹ В расчетах d принималось равным одной и двум длинам свободного пробега. В пределах точности расчеты совпадают.

равен заданному. Найден алгоритм выбора этой температуры. Если задать величину температуры на границе $x = d$ больше (меньше) нужного значения, то градиент получается меньше (больше) заданного. Выражение для температурного скачка обычно записывается [3] в виде

$$\Delta T^* = \frac{1}{2kn_0} \left(\frac{\pi m}{2kT_{w-}} \right)^{1/2} \chi \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.3)$$

Здесь n_0 — плотность газа у стенки $x = 0$ и T_{w-} — температура этой стенки, χ — коэффициент. В работе χ получается равным $1.2 \pm 3\%$. Значения χ , полученные другими авторами, представлены в работе [16]. Из решения модельного уравнения Больцмана для максвелловских молекул Лоялка и Ферziger получили χ , равное 1.1621, Веландер — 1.173, Дарозес — 0.8155, из решения линейного уравнения Больцмана Ван-Чанг и Уленбек получили χ , равное 1.15.

На фиг. 6 представлен профиль температуры у стенки.

Здесь

$$\chi^* = \frac{(T - T_{w-}) 2kn_0}{\lambda} \left(\frac{2kT_{w-}}{\pi m} \right)^{1/2} \bigg| \frac{\partial T}{\partial x}$$

Поступило 4 I 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. И., Горелов С. Л., Коган М. Н. Математический эксперимент для вычисления коэффициентов переноса. Докл. АН СССР, 1968, т. 176, № 6.
2. Горелов С. Л., Коган М. Н. Решение линейных задач динамики разреженного газа методом Монте-Карло. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6.
3. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. Кинет. теория. М., «Наука», 1967.
4. Welander P. On the temperature jump. in a rarefied gas. Arkiv. Fysik. 1954, vol. 7, No. 6, 507.
5. Wang-Chang C. S., Uhlenbeck G. E. The Couette flow between two parallel plates. Univ. Michigan, Engng Res. Inst., 1954.
6. Wang Chang C. S., Uhlenbeck G. F. Heat transport between two parallel plates and functions of the Knudsen number. Ann. Arbor, Mich. Univ. Engng Res. Inst., 1953.
7. Mott-Smith H. M. A New approach in kinetic theory of gases. Lincoln Laboratory, MIT, 1954.
8. Gross E. P., Jackson E. A., Ziering S. Boundary value problems in kinetic theory of gases. Ann. Phys., 1957, vol. 1, No. 2.
9. Gross E. P., Ziering S. Kinetic theory of linear shear flow. Phys. Fluids, 1958, vol. 1, p. 245.
10. Gross E. P., Ziering S. Heat flow between parallel plates. Phys. Fluids, 1959, vol. 2, p. 701.
11. Ziering S. Shear and heat flow for Maxwellian molecules. Phys. Fluids, 1960, vol. 3, No. 4.
12. Lees L. A kinetic theory description of rarefied gas flows. GALCIT Hypersonic Res. Project, Memo, 1959, No. 51.
13. Liu C. Y., Lees L. Kinetic theory description of plane compressible couette flow. In Rarefied Gas Dynamic Press Inc. New York — London, 1961, p. 391.
14. Teagan W. P., Springer G. S. Heat — transfer and density — distribution measurements between parallel plates in the transition regime. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, No. 3.
15. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
16. Loyalka S. K., Ferziger J. H. Model dependence of the temperature slip coefficient. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, p. 1668.