

ГИДРОДИНАМИКА В СЛАБЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЯХ. ВОЗНИКНОВЕНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ В ШАРОВОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ НЕВЕСОМОСТИ

В. Г. БАБСКИЙ, И. Л. СКЛОВСКАЯ

(Харьков)

При изучении ячеистой конвекции в бесконечном плоском слое жидкости со свободной поверхностью в качестве причин возникновения конвекции называют как архимедовы, так и термокапиллярные силы [1-3]. Это подтверждается и экспериментами [4]. Когда массовые силы отсутствуют или пренебрежимо малы, естественно поставить вопрос о возникновении «чистой» термокапиллярной конвекции или конвекции, вызванной только градиентами поверхностного натяжения см. [2-3]. В данной работе эта задача рассмотрена для шарового слоя жидкости в условиях невесомости.

1. Стационарные движения неравномерно нагретой жидкости, частично заполняющей сосуд конечных размеров, описываются решениями уравнений свободной конвекции (см. [5])

$$\nu \Delta \mathbf{v}' = (\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}' + \frac{1}{\rho} \nabla p', \quad \chi \Delta T' = \mathbf{v}' \nabla T', \quad \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0 \quad (1.1)$$

при следующих граничных условиях¹:

на твердой стенке S_1

$$\mathbf{v}'|_{S_1} = 0, \quad T'|_{S_1} = C_1 \quad (1.2)$$

на свободной поверхности S_0

$$(p' - P_0) n_i = \mu (v_{i,k}' + v_{k,i}') n^k - \sigma (k_1 + k_2) n_i - \partial \sigma / \partial x_k \quad (1.3)$$

(i, k = 1, 2, 3)

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \partial T' / \partial n + \beta T' = C_2$$

Здесь \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к S_0 , P_0 — постоянное внешнее давление, σ — коэффициент поверхностного натяжения, k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности S_0 .

Пусть жидкость заключена между двумя концентрическими сферами радиусов R_1 и R_0 , причем первая представляет собой твердую стенку, а вторая — свободную поверхность жидкости. В слое установилось радиальное распределение температуры, жидкость неподвижна

$$\mathbf{v}_0 = 0; \quad T_0(r) = C_3 - \frac{C}{r}, \quad p_0 = P_0 + \begin{cases} 2\sigma R_0^{-1}, & R_0 > R_1 \\ -2\sigma R_0^{-1}, & R_0 < R_1 \end{cases} \quad (1.4)$$

Очевидно, что (1.4) является решением задачи (1.1) — (1.3). Это решение, однако, может оказаться неустойчивым, вследствие чего возникнет движение жидкости, например стационарное. Этот случай возможен при выполнении «принципа изменения устойчивости» [6], что и предполагается в дальнейшем.

Для $\sigma(T)$ и $T(r)$ имеют место разложения

$$\begin{aligned} \sigma(T_0 + \Delta T) &= \sigma_0 - \gamma \Delta T + \dots, \\ T(R_0 + N) &= T(R_0) + (\partial T / \partial n)_{r=R_0} N + \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

¹ Для температуры возможны и другие варианты граничных условий.

причем $\gamma = -[\partial\sigma / \partial T]_{T=T_0} > 0$ для жидкостей. При возникновении стационарного движения в жидкости свободная поверхность, вообще говоря, перестает быть сферической; ее отклонение от сферы в направлении внешней нормали обозначается $N(\theta, \varphi)$ ((θ, φ) — координаты на сфере $r = R_0$). Решения задачи (1.1) — (1.3) ищутся в виде

$$v' = v_0 + v, \quad p' = p_0 - p, \quad T' = T_0 + T \quad (1.6)$$

Подстановка (1.6) в (1.1) — (1.3) и линеаризация относительно v , T и N (с одновременным переходом к безразмерным переменным) приводит к системе уравнений

$$\Delta v = \nabla p, \quad \Delta T = r^{-2}v_r, \quad \text{div } v = 0 \quad (1.7)$$

с граничными условиями на твердой стенке

$$v = 0, \quad T = 0 \quad (1.8)$$

Граничные условия (1.3) на возмущенной свободной поверхности $r = 1 + N(\theta, \varphi)$ сносятся на сферу $r = 1$ и линеаризуются; при этом используются разложения (1.5). В результате в сферической системе координат (r, θ, φ) граничные условия (1.3) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} &= eM \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (T + \varepsilon N) \quad \left(M = \frac{C\gamma R_0^2}{\chi\mu} \right) \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} &= eM \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (T + \varepsilon N) \quad \left(\varepsilon = \frac{\chi\mu}{\sigma_0 R_0} \right) \\ -p + 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} &= e(2N + \Delta_s N), \quad e = \begin{cases} +1; & h > 1 \\ -1; & h < 1 \end{cases} \quad (1.9) \\ v_2 = 0, \quad \partial T / \partial n + \beta(T + \varepsilon N) &= 0 \quad (h = R_1 / R_0) \end{aligned}$$

Здесь β — безразмерный коэффициент теплообмена, M — «число Марангони», μ — коэффициент вязкости, χ — коэффициент температуропроводности, Δ_s — оператор Лапласа на сфере.

Уравнения (1.7) с граничными условиями (1.8), (1.9) образуют задачу на собственные значения относительно параметра M . Эта задача допускает разделение переменных, если искать решение в виде рядов по обобщенным сферическим функциям $T_{mn}^l(1/2\pi - \varphi, \theta, 0)$ [7]. Согласно методике, описанной в [7], делается замена

$$v_+ = -1/2\sqrt{2}(v_\varphi + iv_\theta), \quad v_- = 1/2\sqrt{2}(v_\varphi - iv_\theta)$$

и решения задачи (1.7) — (1.9) ищутся в виде

$$\begin{aligned} v_+(r, \theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty} f_l^+(r) \sum_{n=-l}^l \alpha_{l,n} T_{1n}^l \left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0 \right) \\ v_-(r, \theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty} f_l^-(r) \sum_{n=-l}^l \beta_{l,n} T_{-1n}^l \left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0 \right) \\ v_r(r, \theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty} u_l(r) \sum_{n=-l}^l \xi_{l,n} T_{0n}^l \left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0 \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Для p , T и N разложения, аналогичные v_r , с амплитудными функциями соответственно $P_l(r)$, $\vartheta_l(r)$ и δ_l . Функции f_l^+ , f_l^- , u_l , P_l , ϑ_l и соответствующее им характеристическое значение M определяются путем решения

спектральной задачи

$$\begin{aligned}
 Lv_l &= \frac{2}{r^2} u_l - \frac{1}{r} P_l \quad \left(L = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \\
 Lu_l &= \frac{2}{r^2} u_l + \frac{2l(l+1)}{r^2} v_l + \frac{dP_l}{dr} \quad L\vartheta_l = \frac{1}{r^2} u_l \\
 \frac{du_l}{dr} + \frac{2}{r} u_l + \frac{l(l+1)}{r} v_l &= 0 \quad \left(v_l = \frac{1}{2} (f_l^+ + f_l^-) \right) \\
 u_l(h) &= v_l(h) = \vartheta_l(h) = 0 \\
 \left[\frac{dv_l}{dr} - v_l + eM(\vartheta_l + \varepsilon\delta_l) \right]_{r=1} &= 0 \\
 \left\{ -P_l + 2 \frac{du_l}{dr} - e[l(l+1) - 2]\delta_l \right\}_{r=1} &= 0; \quad u_l(1) = 0 \\
 \left[\frac{d\vartheta_l}{dr} - e\beta(\vartheta_l + \varepsilon\delta_l) \right]_{r=1} &= 0 \quad (l = 2; 3; \dots)
 \end{aligned} \quad (1.11)$$

При $l = 0$ и $l = 1$ задача (1.11) имеет только тривиальное решение. Функция $w_l = 1/2(f_l^+ - f_l^-)$ определяется как решение задачи

$$Lw_l = 0; \quad w_l(h) = 0; \quad \left[\frac{dw_l}{dr} - w_l \right]_{r=1} = 0 \quad (1.12)$$

Отсюда следует: $w_l \equiv 0$, $f_l^+(r) \equiv f_l^-(r)$.

Как известно, давление $p(r, \theta, \varphi)$ удовлетворяет в объеме уравнению Лапласа $\Delta p = 0$, следовательно, $P_l(r)$ удовлетворяет уравнению $LP_l = 0$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$P_l = A_l r^l + B_l r^{-l-1} \quad (1.13)$$

Исключая $v_l(r)$ из второго и третьего уравнений системы (1.11), получим уравнение для u_l

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \frac{4}{r} \frac{du_l}{dr} - \frac{l(l+1)-2}{r^2} u_l = \frac{dP_l}{dr} \quad (1.14)$$

с общим решением

$$u_l = A_l \frac{l}{2(2l+3)} r^{l+1} + B_l \frac{l+1}{2(2l-1)} r^{-l} + C_l r^{l-1} + D_l r^{-l-2} \quad (1.15)$$

Из первого уравнения системы (1.11) определяется общее решение v_l

$$\begin{aligned}
 v_l &= -A_l \frac{l+3}{2(l+1)(2l+3)} r^{l+1} + B_l \frac{l-2}{2l(2l-1)} r^{-l} - C_l \frac{1}{l} r^{l-1} + \\
 &+ D_l \frac{1}{l+1} r^{-l-2} + E_l r^l + I_l r^{-l-1}
 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Подстановка (1.15) и (1.16) в третье уравнение (1.11) (уравнение неразрывности) дает $E_l = I_l = 0$.

Наконец, из последнего уравнения (1.11) находится ϑ_l

$$\begin{aligned}
 \vartheta_l &= A_l \frac{l}{4(l+1)(2l+3)} r^{l+1} - B_l \frac{l+1}{4l(2l-1)} r^{-l} - C_l \frac{1}{2l} r^{l-1} + \\
 &+ D_l \frac{1}{2(l+1)} r^{-l-2} + K_l r^l + L_l r^{-l-1}
 \end{aligned} \quad (1.17)$$

После подстановки полученных общих решений (1.13), (1.15) — (1.17) в граничные условия для системы (1.11) приравняется нулю определитель возникающей линейной однородной системы уравнений для произвольных постоянных $A_l, B_l, C_l, D_l, K_l, L_l$.

Легко показать, что получаемое характеристическое уравнение приводится к виду

$$M_l = e \frac{F_1(h, l) + \varepsilon \beta F_2(h, l)}{1 - \varepsilon F_3(h, l)} \quad (1.18)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_1 &= H_1 / H_4, & F_2 &= H_2 / H_4, & F_3 &= H_3 / H_4 \\ H_1 &= \psi_1 \psi_2 & H_2 &= (h^{2l+2} - h) \psi_2, & H_3 &= \psi_1 \psi_3 [l(l+1) - 2]^{-1} \\ & & \psi_1 &= (l+1)h^{2l+2} + lh, \\ \psi_2 &= \frac{2l+1}{2l(l+1)} [2h^{4l+4} - (2l+1)h^{2l+5} + (2l+1)h^{2l+1} - 2h^2] \\ \psi_3 &= \frac{1}{2l(l+1)} [6lh^{4l+4} - l(l+1)(2l+1)^2 h^{2l+5} + (8l^4 + 16l^3 - 2l^2 - \\ & - 10l - 3)h^{2l+3} - (2l+1)(2l^3 + 3l^2 - 5l - 3)h^{2l+1} - 3(2l+1)h^2] \\ H_4 &= \frac{1}{8l(l+1)} \{ -2l(2l+3)h^{4l+6} + (2l+1)^2 [h^{4l+7} + \\ & + (2l-1)(h^{4l+6} - h^{2l+3}) - (2l+3)(h^{4l+4} - h^{2l+5}) - h^{2l+6}] + \\ & + (2l+3)(4l-1)h^{4l+5} - (2l-1)(4l+5)h^{2l+4} + 2(2l-1)(l+1)h^3 \} + 1/4 H_1 \end{aligned}$$

Асимптотическое выражение для первой части уравнения (1.18) при $h \rightarrow \infty$ («пузырь» в бесконечной жидкости) имеет вид

$$\lim_{h \rightarrow \infty} M_l = \frac{4(2l+1)(l+1+\beta)}{1 - 12\varepsilon l(l+1)/[l(l+1) - 2]} \quad (1.19)$$

Асимптотика при $h \rightarrow 1$ (тонкие слои жидкости) имеет вид

$$M_l = e \frac{Q_1(l)(h-1)^{-4} + \varepsilon \beta Q_2(l)(h-1)^{-3} + o(|h-1|^{-4})}{1 + \varepsilon Q_3(l)(h-1)^{-5} + o(|h-1|^{-5})} \quad (1.20)$$

Здесь

$$Q_1(l) = \frac{4 \cdot 7!}{3} \frac{P_1(l)}{P_4(l)}, \quad Q_2(l) = \frac{7!}{3} \frac{P_2(l)}{P_4(l)}, \quad Q_3(l) = 4 \cdot 7! \frac{P_3(l)}{P_4(l)} \quad (1.21)$$

а $P_i(l)$ — полиномы со старшими членами соответственно

$$\begin{aligned} P_1(l) &= 64l^5 + \dots, & P_2(l) &= 512l^5 + \dots \\ P_3(l) &+ 64l^5 + \dots, & P_4(l) &= 5196l^7 + \dots \end{aligned}$$

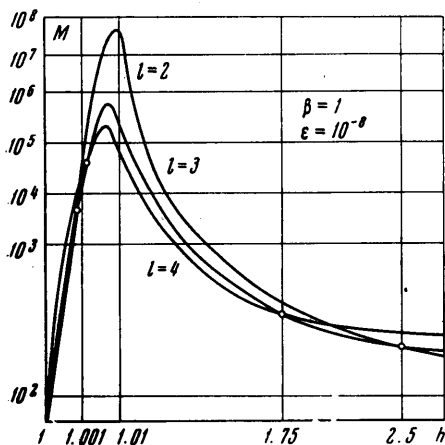
Следует отметить, что в практически интересных случаях ε является малым параметром. Например, при $R_0 = 100$ см для воды $\varepsilon \sim 10^{-8}$. Поэтому при малых ε , $|h-1|$ линии $M(h, l)$ при каждом l имеют две ветви

$$M_l^{(1)} = \varepsilon Q_1(l)(h-1)^{-4} + \beta Q_2(l)(h-1)^{-3} + o(|h-1|^{-4}) \quad (1.22)$$

$$M_l^{(2)} = \varepsilon^{-1} \left[\frac{Q_1(l)}{Q_3(l)}(h-1) + \varepsilon \beta \frac{Q_2(l)}{Q_3(l)}(h-1)^2 \right] + o(|h-1|) \quad (1.23)$$

Обе ветви соединяются при $|h - 1| \sim (\epsilon l^{-2})^{1/2}$. С увеличением h ветвь (1.22) выходит на асимптотику (1.19).

Непосредственное вычисление функций $F_i(h, l)$ в (1.18) и дополнительное исследование их поведения при $h \rightarrow 1$ и больших l показывает:



Фиг. 1

1) линии M_l и M_{l+1} пересекаются дважды: первый раз — ветви (1.22) или их продолжения, второй — ветви (1.23);

2) для некоторых l существуют два таких диапазона $J_1 = [h_1, h_2]$ и $J_2 = [h_3, h_4]$ вдоль каждой из ветвей, что

$$M_l(h, l) \leq M_k(h, l), \quad (k = 2, 3, \dots, l-1, l+1, \dots) \\ h \in J_1, h \in J_2 \quad (1.24)$$

Совокупность участков кривых M_l , удовлетворяющих условию (1.24), называется «границей устойчивости»;

3) для каждой пары (ϵ, β) найдется такое l^* , что при $l > l^*$ кривые $M_l(h, l)$ уже не принадлежат границе устойчивости. Схематически описанная картина в неравномерной шкале представлена на фиг. 1 для $h \geq 1$.

При $h \leq 1$ меняется знак M , характер кривых M_l остается тем же.

2. Решения спектральной задачи (1.14) (собственные функции) находятся в явном виде. Пусть условие нормировки имеет вид

$$B_l = 1$$

Тогда постоянные A_l, C_l, D_l определяются однозначно из граничных условий, и функция u_l (1.15) записывается следующим образом:

$$u_l(r) = \frac{1}{2l+1} \frac{r^{l+1}}{h^{2l+1}} \varphi_2\left(\frac{h}{r}\right) \left[\Phi(h) - \Phi\left(\frac{h}{r}\right) \right] \quad (2.1)$$

Здесь

$$\Phi = \varphi_1 / \varphi_2, \quad \varphi_1 = (2l-1)h^{2l+3} - (2l+1)h^{2l+1} + 2h^2 \\ \varphi_2 = 2h^{2l+3} - (2l+3)h^2 + (2l+1)$$

причем, как легко видеть, $\varphi_2(x) > 0$ при $x > 1$ и $\varphi_2(x) < 0$ при $x < 1$. Функция $\Phi(x)$ — неубывающая для $x > 0$. Действительно

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{(2l+1)x}{[\varphi_2(x)]^2} P(x)$$

где

$$P(x) = 4x^{4l+2} - [(2l-1)(2l+3) + 4]x^{2l+3} + \\ + 2(2l-1)(2l+3)x^{2l+1} - (2l+1)^2x^{2l-1} + 4 \quad (2.2)$$

Число перемен знака в ряду коэффициентов полинома равно 4. Тогда по теореме Декарта [8] число положительных корней $P(x)$ (с учетом их кратности) равно 4, 2 или 0. Непосредственная проверка показывает, что $x = 1$ служит корнем четвертой кратности многочлена $P(x)$ и, следова-

тельно, других положительных корней нет. Действительно, как легко проверить

$$P(1) = P'(1) = P''(1) = P'''(1) = 0$$

откуда следует $\Phi'(x) \geq 0$. Таким образом

$$\Phi(h) - \Phi(h/r) > 0 \quad (h > 1), \quad \Phi(h) - \Phi(h/r) < 0 \quad (h < 1)$$

и функция $u_l(r) \geq 0$ для $1 \leq r \leq h$ или $h \leq r \leq 1$.

Для выяснения свойств функции $\vartheta_l(r)$ удобнее использовать не общее решение (1.17), а обратиться к четвертому уравнению системы (1.11) с соответствующими граничными условиями

$$L\vartheta_l = \frac{1}{r^2} u_l, \quad \left[\frac{d\vartheta_l}{dr} - e\beta(\vartheta_l + \varepsilon\delta_l) \right]_{r=1} = 0, \quad \vartheta_l(h) = 0 \quad (2.3)$$

Тогда

$$\vartheta_l(r) = e \int_1^h G(r, s) u_l(s) s^{-2} ds + \varepsilon \delta_l t(r) \quad (2.4)$$

где $t(r)$ является решением задачи

$$Lt = 0; \quad \left[\frac{dt}{dr} - e\beta t \right]_{r=1} = 1; \quad t(h) = 0$$

и имеет вид

$$t(r) = \frac{t_1(r; h)}{t_2(h)} = \frac{r^{-l-1}(r^{2l+1} - h^{2l+1})}{h^{2l+1}(l+1) + l + e\beta(h^{2l+1} - 1)} \quad (2.5)$$

а $G(r, s)$ — функция Грина дифференциального оператора L при граничных условиях (2.3) с $\delta_l = 0$

$$G(r, s) = \frac{s^{2r-l-1}}{2l+1} \frac{t_1(s; h) t_2(r)}{t_2(h)} e \quad (1 \leq r \leq s \leq h)$$

$$G(r, s) = \frac{s^{-l+1}}{2l+1} \frac{t_1(r; h) t_2(s)}{t_2(h)} e \quad (1 \geq r \geq s \geq h)$$

$$G(r, s) = \frac{s^{-l+1}}{2l+1} \frac{t_1(r; h) t_2(s)}{t_2(h)} e \quad (h \geq r \geq s \geq 1)$$

$$G(r, s) = \frac{s^{2r-l-1}}{2l+1} \frac{t_1(s; h) t_2(r)}{t_2(h)} e \quad (h \leq r \leq s \leq 1)$$
(2.6)

Пусть $w_0(r)$ — непрерывная функция, положительная внутри интервала $(1, h)$, причём $w_0(h) = 0$, $w_0'(h) \neq 0$.

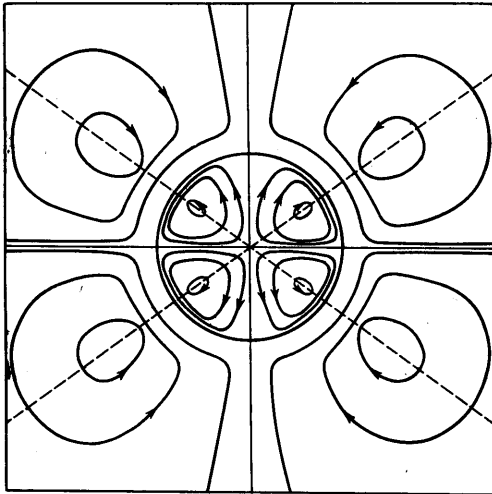
В пространстве $C[1, h]$ можно выделить пространство w_0 -измеримых функций E_{w_0}

$$w \in E_{w_0}: \quad -\alpha_1 w_0 \leq w \leq \alpha_2 w_0; \quad \alpha_1, \alpha_2 > 0$$

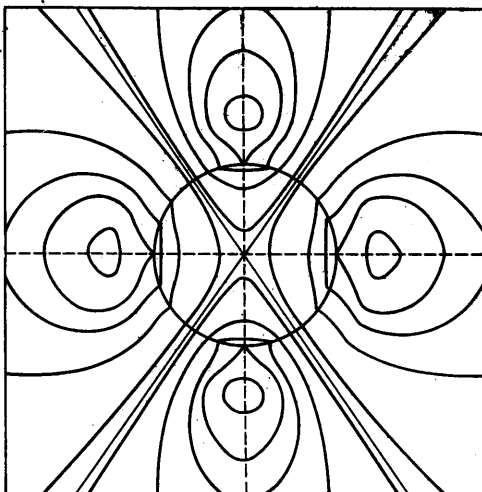
(здесь и далее терминология из [9]), а в E_{w_0} — конус неотрицательных w_0 -измеримых функций $K_{w_0} = K \cap E_{w_0}$, где K — обычный конус неотрицательных функций из $C[1, h]$. Как было показано, $u_l(r) \geq 0$. Нетрудно показать, что интегральный оператор с ядром $(-1)G(r, s)$ действует из K в K_{w_0} . Функция $t(r) \in E_{w_0}$ по построению. Тогда в силу телесности конуса K_{w_0} при достаточно малых ε функция $(-1)\vartheta_l(r) \in K_{w_0}$, т. е. $\vartheta_l(r) < 0$ при $1 < r < h$ и $h < r < 1$ (для ε может быть получена точная оценка).

Таким образом, доказано, что $u_l(r)$ и $\vartheta_l(r)$ не меняют знака внутри интервала $[1, h]$. Если принять, как обычно, предположение, что собственные функции линеаризованной задачи (1.7) — (1.9) в некотором приближении описывают возникающее течение жидкости, то отсюда следует, что конвективные «ячейки» будут «одноярусными», т. е. будут заполнять весь слой жидкости.

3. Постановка задачи может быть несколько изменена, если вместо свободной поверхности жидкости рассматривать поверхность раздела двух жидкостей или жидкости и газа. Пусть первая жидкость с вязкостью μ_1 и коэффициентом теплопроводности λ_1 заполняет сферический объем S , вторая жидкость с коэффициентами вязкости и теплопроводности соответственно μ_2 и λ_2 заполняет неограниченный объем вне сферы S . Вновь, как и ранее, исследуются условия возникновения стационарной термокапиллярной конвекции. При отсутствии движения в жидкости температура вне сферы S изменяется по закону (1.4), а в первой жидкости она постоянна и равна температуре поверхности раздела. На поверхности раздела должны выполняться условия непрерывности температуры, тепловых потоков, скорости и касательных напряжений. Тогда после разделения переменных спектральная задача — аналог задачи (1.11) — имеет вид (для простоты положено $\varepsilon = 0$)



Фиг. 2



Фиг. 3

условий ограниченности в нуле и на бесконечности. Задача (3.1) имеет счетное число собственных значений

$$M_l = 4(2l + 1)(l + 1 + \lambda^\circ l)(\mu^\circ + 1) \quad (3.2)$$

$$Lv_l = \frac{2}{r^2} u_l - \frac{1}{r} P_l;$$

$$Lu_l = \frac{2}{r^2} u_l + \frac{2l(l+1)}{r^2} v_l + \frac{dP_l}{dr}$$

$$\frac{du_l}{dr} + \frac{2}{r} u_l + \frac{l(l+1)}{r^2} v_l = 0$$

$$(0 \leq r < \infty)$$

$$L\theta_l \neq 0; \quad 0 \leq r \leq 1;$$

$$L\theta_l^- = \frac{1}{r^2} u_l^- \quad (3.4)$$

$$u_l(1) = u_l^-(1) = 0;$$

$$v_l(1) = v_l^-(1),$$

$$\theta_l(1) = \theta_l^-(1)$$

$$\left[\mu \frac{dv_l}{dr} - \frac{dv_l^-}{dr} - (\mu^\circ - 1)v_l^- - \right.$$

$$\left. - M\theta_l \right]_{r=1} = 0$$

$$\left[\lambda^\circ \frac{d\theta_l}{dr} - \frac{d\theta_l^-}{dr} \right]_{r=1} = 0$$

Здесь $\mu^\circ = \mu_1 / \mu_2$, $\lambda^\circ = \lambda_1 / \lambda_2$, индекс минус сверху обозначает функции вне сферической области. Общие решения уравнений (3.1) отбираются из решений (1.13), (1.15) — (1.17) из

каждому из которых соответствует $(2l + 1)$ собственных функций. Наименьшее собственное значение при $l = 2$ равно $20(3 + 2\lambda^{\circ}) (\mu^{\circ} + 1)$. Если выбрать для него осесимметричное решение, т. е. не зависящее от угла φ ($n = 0, v_{\varphi} = 0$), то собственная функция для температуры (например, при $\lambda^{\circ} = 1/2$) имеет вид

$$\vartheta(r, \theta) = (3 \cos 2\theta + 1) \begin{cases} r^2, & r \leq 1 \\ 12r^{-2} + 8r^{-4} - 19r^{-3}, & r \geq 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

Нетрудно в этом случае получить и уравнения линий тока

$$\left. \begin{array}{l} r \leq 1, \quad r(1 - r^2)^{1/2} \\ r^{-1}(r^2 - 1)^{1/2} \end{array} \right\} \sin^2 \theta \cos \theta = \text{const} \quad (3.4)$$

На фиг. 2 и 3 показаны изотермы и линии тока в меридиональном сечении. Ось симметрии вертикальна. Поверхности тока представляют собой торообразные фигуры.

Поступило 26 VIII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Nield D. A. Surface tension and buoyancy effects in cellular convection. *J. Fluid Mech.*, 1964, vol. 19, No. 3.
2. Pearson J. R. A. On convection induced by surface Tension. *J. Fluid Mech.*, 1958, vol. 4, No. 5.
3. Scriven L. E., Sternling C. V. On cellular convection driven by surface tension gradients. Effects of mean surface tension and surface viscosity. *J. Fluid Mech.*, 1964, vol. 19, No. 3.
4. Block M. J. Surface tension as the cause of Benard cells. *Nature*, 1956, vol. 173, p. 650.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Механика сплошных сред*, Изд. 2. М., Гостехиздат, 1954.
6. Монин А. С., Яглом А. М. *Статистическая гидромеханика*, ч. 1. М., «Наука», 1965.
7. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. *Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения*. М., Физматгиз, 1958.
8. Мишина А. П., Проскураков И. В. *Высшая алгебра*, Изд. 2. М., «Наука», 1965.
9. Красносельский М. А. *Положительные решения операторных уравнений*. М., Физматгиз, 1962.