

## ИСТОЧНИК ПОД СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

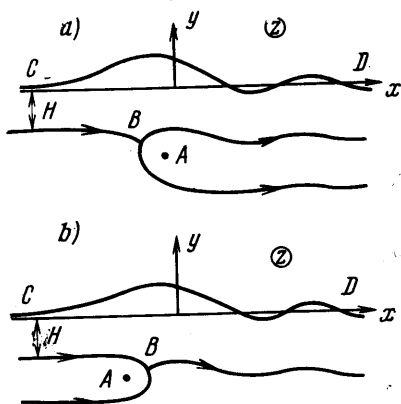
О. М. КИСЕЛЕВ

(Казань)

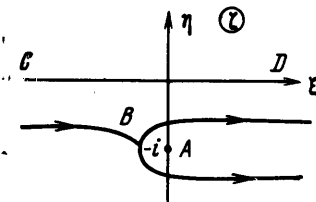
Задача о движении источника под свободной поверхностью бесконечно глубокой тяжелой жидкости была исследована М. В. Келдышем [1] при предположениях, принятых в теории волн малой амплитуды. Однако эти предположения перестают быть справедливыми [2] при больших числах Фруда  $F$ .

В работе [2] описан метод, использующий лишь одно из четырех предположений теории волн малой амплитуды (предположение о близости модуля скорости на свободной поверхности к постоянной). Этим методом ниже строится решение задачи, которое переходит в точное при  $F \rightarrow \infty$ . Когда  $F$  невелико, наши результаты близки к результатам М. В. Келдыша при условии, что интенсивность источника мала. При  $F = 0$  оба метода приводят к точным результатам.

Рассмотрим плоско-параллельный поток тяжелой несжимаемой жидкости бесконечной глубины, обтекающий источник (сток) интенсивности  $Q$  (фиг. 1, а, в). Движение жидкости установившееся и потенциальное. Далеко впереди от источника поток имеет горизонтальную свободную поверхность и постоянную скорость  $V_0$ . Ось  $x$  направим вдоль невозмущенной



Фиг. 1



Фиг. 2

свободной поверхности, ось  $y$  — вертикально вверх. Через  $H$  обозначим расстояние от свободной поверхности до линии тока, проходящей через критическую точку, при  $x = -\infty$ .

Будем искать аналитическую функцию  $z(\zeta)$ , конформно отображающую нижнюю полуплоскость вспомогательного комплексного переменного  $\zeta = \xi + i\eta$  (фиг. 2) на область течения в плоскости  $z = x + iy$ . При этом потребуем, чтобы бесконечно удаленные точки плоскостей  $z$  и  $\zeta$  соответствовали друг другу и чтобы точке  $A$  — центру источника — в плоскости  $\zeta$  соответствовала точка  $\zeta = -i$ . Пусть

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{dz}{d\zeta} = K \quad (1)$$

Тогда комплексный потенциал течения

$$w(\zeta) = KV_0\zeta + \frac{Q}{2\pi} \ln(\zeta^2 + 1)$$

Отсюда

$$\frac{dw}{d\zeta} = KV_0(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \bar{\zeta}_0)(\zeta^2 + 1)^{-1} \quad (2)$$

$$\zeta_0 = -\gamma - i\sqrt{1 - \gamma^2}, \quad \gamma = Q/2\pi KV_0 \quad (3)$$

В дальнейшем будем считать, что  $|\gamma| < 1$  (при  $|\gamma| \geq 1$  критическая точка выходит на свободную поверхность и схема течения нарушается).

Значение функции тока  $\Psi$  в критической точке  $B$

$$\Psi_B = -KV_0[\sqrt{1 - \gamma^2} - \gamma \operatorname{arctg}(\sqrt{1 - \gamma^2}/\gamma)]$$

отсюда, учитывая, что на свободной поверхности  $\Psi = 0$ , получаем

$$H = K[\sqrt{1 - \gamma^2} - \gamma \operatorname{arctg}(\sqrt{1 - \gamma^2}/\gamma)] \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует

$$\frac{Q}{HV_0} = 2\pi\gamma \left( \sqrt{1 - \gamma^2} - \gamma \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \gamma^2}}{\gamma} \right)^{-1} \quad (5)$$

Равенства (4) и (5) устанавливают точное и взаимно однозначное соответствие между физическими параметрами  $H$ ,  $Q/HV_0$  и математическими параметрами  $K$ ,  $\gamma$ . В таблице приведены значения  $H/K$  и  $Q/HV_0$  для ряда значений  $\gamma$ .

$\gamma$	$H/K$	$Q/HV_0$	$c_{y\infty}$
0	1	0	0
+0.1	0.8479	+ 0.3705	-0.0501
+0.2	0.7060	+ 0.8899	-0.1010
+0.3	0.5740	+ 1.642	-0.1535
+0.4	0.4528	+ 2.775	-0.2087
+0.5	0.3424	+ 4.588	-0.2679
+0.6	0.2436	+ 7.738	-0.3333
+0.7	0.1574	+13.97	-0.4084
+0.8	0.0853	+29.46	-0.5000
+0.9	0.0314	+90.04	-0.6268
+1.0	0	$\infty$	-1

Модуль скорости  $V$  на свободной поверхности должен удовлетворять соотношению  $\ln V = \ln V_0 + \frac{1}{2} \ln(1 - 2v\gamma)$ ,  $v = g/V_0$  (6)

( $g$  — ускорение силы тяжести).

Предполагая, что на свободной поверхности величина  $V$  мало отличается от  $V_0$  ( $v\gamma$  ма-

ло), будем вместо (6) использовать линейризованное соотношение

$$\ln V = \ln V_0 - v\gamma \quad (7)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$G = \ln V_0 + ivz - \ln(dw/dz) \quad (8)$$

В силу (7)

$$\operatorname{Re}G = 0 \quad \text{при } \eta = 0 \quad (9)$$

Особенности функции  $G(\zeta)$  в нижней полуплоскости  $\zeta$  известны

$$ivz \sim ia\zeta, \quad \ln \frac{dw}{dz} \sim \ln \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta + i}, \quad a = \frac{Kg}{V_0^2} \quad (10)$$

Из (4) следует

$$gH/V_0^2 = a[\sqrt{1 - \gamma^2} - \gamma \operatorname{arctg}(\sqrt{1 - \gamma^2}/\gamma)]$$

Таким образом, при фиксированной величине  $Q/HV_0$  параметр  $a$  обратно пропорционален числу Фруда  $F = V_0^2/gH$ .

По известным особенностям и условию (9) функцию  $G(\zeta)$  легко построить

$$G(\zeta) = ia\zeta + ic - \ln[(\zeta - i)(\zeta - \zeta_0)/(\zeta + i)(\zeta - \bar{\zeta}_c)] \quad (c = \nu K_0) \quad (11)$$

Здесь  $K_0$  — вещественная постоянная. Из (8), учитывая (2) и (11), последовательно имеем

$$\frac{dz}{d\zeta} e^{ivz} = \frac{1}{V_0} \frac{dw}{d\xi} e^{G(\zeta)} \quad \text{или} \quad \frac{dz}{d\zeta} e^{ivz} = K e^{ia\zeta + ic} \frac{(\zeta - \bar{\zeta}_0)^2}{(\zeta - i)^2}$$

Решая полученное дифференциальное уравнение и определяя константу интегрирования из условия  $y \rightarrow 0$  при  $\eta = 0$ ,  $\xi \rightarrow -\infty$ , получим

$$z = K\zeta + K_0 - i \frac{K}{a} \ln \left\{ 1 - \frac{ia(\bar{\zeta}_0 - i)^2}{\zeta - i} - e^{-ia\zeta} [2ia(\bar{\zeta}_0 - i) + a^2(\bar{\zeta}_0 - i)^2] \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{e^{iat} dt}{t - i} \right\} \quad (12)$$

При помощи оценок, данных в работе [2] для интеграла, входящего в формулу (12), легко установить, что

$$z = K\zeta + K_0 \quad \text{при} \quad a = \infty, \quad dz/d\zeta = K(\zeta - \bar{\zeta}_0)^2(\zeta - i)^{-2} \quad \text{при} \quad a = 0$$

Нетрудно убедиться, что последняя формула дает производную отображающей функции в случае течения невесомой жидкости. Таким образом, в обоих предельных случаях рассматриваемое решение переходит в точное (течение под прямолинейной горизонтальной стенкой и течение невесомой жидкости).

Пользуясь теоремой Коши, нетрудно получить [3]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iat} dt}{t - i} = 2\pi i e^{-a}, \quad \int_{-\infty}^{-i} \frac{e^{iat} dt}{t - i} = i\pi e^{-a} + e^{-a} Ei(2a) \quad (13)$$

Здесь  $Ei(a)$  — интегральная показательная функция [4]. Учитывая (13), найдем из (12) асимптотическую форму свободной поверхности при больших значениях  $\xi$

$$x = K\xi + K_0 + \frac{K}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{A \sin a\xi - B \cos a\xi}{1 - A \cos a\xi - B \sin a\xi} \quad (14)$$

$$y = -\frac{K}{2a} \ln(1 - 2A \cos a\xi - 2B \sin a\xi + A^2 + B^2) \quad (15)$$

$$A = 4\pi a e^{-a} (1 - a + a\sqrt{1 - \nu^2}) \nu$$

$$B = 4\pi a e^{-a} (1 - \sqrt{1 - \nu^2}) (1 + a\sqrt{1 - \nu^2})$$

Из (14) и (15) легко определяются длина волны  $\lambda$  и амплитуда  $\alpha$

$$\lambda = \frac{2\pi K}{a} = \frac{2\pi V_0^2}{g}, \quad \alpha = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{K}{4a} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{A^2 + B^2}}{1 - \sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 \quad (16)$$

Отсюда

$$\lim \alpha = \lim \lambda = \lim (\alpha / \lambda) = 0 \quad \text{при} \quad a \rightarrow \infty$$

При  $a \rightarrow 0$  ( $F \rightarrow \infty$ ) длина волны неограниченно возрастает, а амплитуда

$$\alpha \rightarrow \alpha_\infty = 4\sqrt{2} \pi K(1 - \sqrt{1 - \gamma^2})^{1/2}$$

Определим положение источника. Пусть  $\text{Im } z(-i) = -h$ . Согласно (12) и (13),  $h$  определяется посредством формул

$$h = K\sigma, \quad \delta = \bar{\xi}_0 - i = -\gamma - i(1 - \sqrt{1 - \gamma^2}) \quad (17)$$

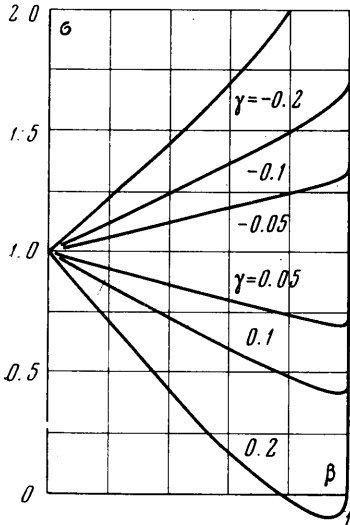
$$\sigma = 1 + \frac{1}{a} \text{Re} \ln \left\{ 1 + \frac{a\delta^2}{2} - ae^{-2a}(2i\delta + a\delta^2)[Ei(2a) + i\pi] \right\} \quad (18)$$

При  $a \rightarrow 0$   $h \rightarrow \infty$ , поскольку

$$\sigma = 1 - 2\pi\gamma + (1 - \sqrt{1 - \gamma^2})(\sqrt{1 - \gamma^2} - 2C - 2 \ln 2a) + O(a)$$

где  $C$  — постоянная Эйлера [4], а  $O(a) \rightarrow 0$  при  $a \rightarrow 0$ .

Таким образом, при  $F \rightarrow \infty$  источник (сток) вместе со свободной поверхностью над ним безгранично опускается по отношению к фиксированному уровню жидкости на бесконечности. На фиг. 3 изображена зависимость  $\sigma$  от переменной  $\beta = e^{-2a}$  для ряда значений  $\gamma$ . Легко видеть, что  $\sigma = 1$  при  $\beta = 0$ ,  $\sigma \rightarrow \infty$  при  $\beta \rightarrow 1$ .



Фиг. 3

ления получаются формулы

$$c_x + ic_y = \kappa(1 + i\gamma/2) + \mu\gamma/2 \quad (19)$$

$$\kappa = K \left( \frac{d\zeta}{dz} \right)_{\zeta=-i} = -\frac{4}{(\delta + 2i)^2} \left\{ 1 + \frac{a\delta^2}{2} - ae^{-2a}(2i\delta + a\delta^2)[Ei(2a) + i\pi] \right\};$$

$$\mu = K \left( \frac{d}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} \right)_{\zeta=-i} = \frac{2i\delta}{(\delta + 2i)^3} \left\{ -2 - a \left( 4 - 3i\delta + \frac{\delta^2}{2} \right) + \right. \\ \left. + a^2(2i\delta + \delta^2) + 2ae^{-2a}[Ei(2a) + i\pi][2i\delta + a(4 - 2i\delta + \delta^2) - a^2(2i\delta + \delta^2)] \right\}$$

При фиксированном  $\gamma > 0$  кривая  $\sigma = \sigma(\beta)$  имеет единственный минимум, причем  $1 - \sigma_{\min}$  тем больше, чем больше  $\gamma$ . При  $\gamma$  больше, чем некоторое  $\gamma_0$  ( $0.1 < \gamma_0 < 0.2$ )  $\sigma(\beta)$  дважды обращается в нуль. При  $\gamma < 0$   $\sigma(\beta)$  монотонно возрастает от единицы до бесконечности.

Это значит, что при достаточно малом положительном  $Q/HV_0$  с ростом  $F$  источник сначала приближается снизу к оси  $x$ , затем неограниченно опускается. Если  $Q/HV_0$  достаточно велико, источник в некотором диапазоне чисел Фруда поднимается над осью  $x$ . При любом фиксированном  $Q/HV_0 < 0$  с ростом  $F$  сток монотонно опускается.

Волновое сопротивление  $X$  и подъемная сила  $Y$  источника вычисляются по известной формуле Чаплыгина. Введем в рассмотрение коэффициент подъемной силы  $c_x = X/\rho QV_0$  и коэффициент сопротивления  $c_y = Y/\rho QV_0$ . Для их определе-

Считая, что  $Q/HV_0$  мало по абсолютной величине, будем пренебрегать в формуле (19) величинами порядка  $\gamma^3$ . Тогда получим

$$c_x = -1 + 2\alpha e^{-2\alpha\gamma}, \quad c_y = \gamma[2\alpha e^{-2\alpha} Ei(2\alpha) - 0.5] \quad (20)$$

(в обоих выражениях коэффициенты при  $\gamma^2$  оказались равными нулю). На фиг. 4 изображены величины  $c_x, c_y$  в функции переменной  $\beta = e^{-2\alpha}$ , вычисленные для ряда значений  $\gamma$ .

При  $a = 0$  ( $F = \infty$ ) из (19) трудно получить таблицы

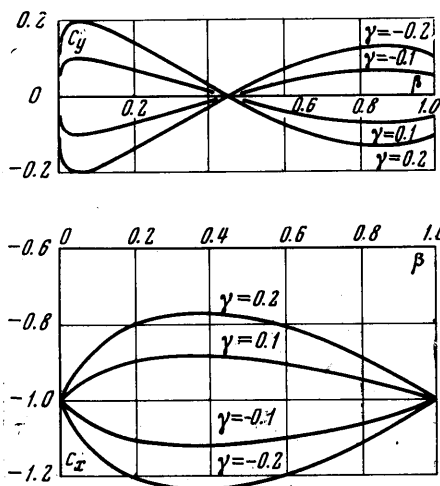
$$c_x = c_{x\infty} = -1, \quad c_y = c_{y\infty} = -\gamma(1 + \sqrt{1 - \gamma^2})^{-1} \quad (21)$$

Интересно сравнить полученные результаты с результатами М. В. Келдыша. Согласно [1]

$$c_x = -1 + \frac{Qg}{V_0^3} e^{-2vh}, \quad c_y = \frac{Q}{4\pi h V_0} \times [4vh e^{-2vh} Ei(2vh) - 1] \quad (22)$$

Используя равенства (3), (10), (17), (18), запишем формулы (22) в переменных  $a, \gamma$

$$c_x = -1 + 2\alpha \gamma e^{-2\alpha\sigma}, \quad c_y = \gamma[2\alpha \sigma e^{-2\alpha\sigma} Ei(2\alpha\sigma) - 0.5] / \sigma \quad (23)$$



Фиг. 4

Очевидно, выражения (23) близки соответственно к (20), когда  $\sigma$  близко к единице. Анализ формулы (18), приведенный выше, показывает, что это справедливо при малых значениях  $Q/HV_0$  и небольших  $F$ . Когда  $h$  близко к нулю или меньше нуля, вторая формула (22), очевидно, дает качественно неверные результаты. При  $F = \infty$  из (23) получается

$$c_x = c_{x\infty} = -1, \quad c_y = c_{y\infty} = 0$$

при точных значениях, даваемых формулами (21). При  $F = 0$  обе теории приводят к точным результатам

$$c_x = c_{x0} = -1, \quad c_y = c_{y0} = Q/4\pi h V_0$$

Поступило 11 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. Замечания о некоторых движениях тяжелой жидкости. Техн. заметки ЦАГИ, 1935, вып. 52.
2. Киселев О. М. Вихрь под свободной поверхностью тяжелой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
3. Келдыш М. В., Лаврентьев М. А. О движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости. Труды конференции по теории волнового сопротивления, М., Изд-во ЦАГИ, 1937.
4. Градштейн И. С., Рыжик Л. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.