

СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ КОАКСИАЛЬНЫМИ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ ПОСЛЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

В. Я. ШКАДОВ (Москва)

Движение вязкой жидкости между вращающимися цилиндрами представляет собой наиболее известный случай, когда после потери устойчивости развивается и устанавливается вторичное стационарное (равновесное) течение. Это течение, состоящее из периодических вдоль оси вращения вихрей, так называемых вихрей Тейлора, является результатом существенно нелинейных взаимодействий в потоке. Оно возникает при достаточно большой скорости вращения внутреннего цилиндра. Первая попытка провести теоретический расчет течения была предпринята в работе Стюарта [1], в которой форма решения принималась из линейной теории устойчивости, а амплитуда находилась из уравнения, выражающего в интегральной форме баланс энергии. Решение Стюарта улучшил Дэви [2], который учел появление в решении следующей гармоники и искажение основной. Конкретные расчеты проводились в предположении, что размер вихря равен расстоянию между цилиндрами. Результаты их в целом согласуются с экспериментальными данными. Отдельные расчеты методом сеток выполнены в [3] и более подробные — в [4], а в работе [5] к рассматриваемой задаче был применен метод возмущений.

Ниже к исследованию вторичного течения вязкой жидкости между цилиндрами применяется метод работ [6, 7]. Решение находится из единой системы нелинейных дифференциальных уравнений, которая с определенным приближением выводится из уравнений движения, без рассмотрения специального соотношения для амплитуды.

1. Постановка задачи. Пусть r_1, r_2 — радиусы, Ω_1, Ω_2 — характерные скорости вращения внутреннего и внешнего цилиндров. В цилиндрической системе координат r, φ, z состояние жидкости описывается составляющими скорости v_r, v_φ, v_z и давлением P . Введем новые безразмерные независимые переменные η, ζ, τ и искомые функции u, v, w соотношениями:

$$\begin{aligned} r &= r_1(1 + \varepsilon\eta), & z &= nr_1\varepsilon\zeta, & tV_1 &= R(r_2 - r_1)\tau & (1.1) \\ nv_z &= 2R\varepsilon V_1 u, & n^2 v_r &= 2R\varepsilon V_1 w, & v_\varphi &= V_1(v + V) \\ & & P &= 2\varepsilon V_1^2 \rho p, & V_1 &= r_1 \Omega_1 \end{aligned}$$

Предположим, что движение жидкости является осесимметричным, тогда уравнения движения и неразрывности [8] приводятся к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{2T}{n^2} \left(w \frac{\partial w}{\partial \eta} + u \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) - \frac{n^2}{2} E (v^2 + 2Vv) &= \\ = -n^2 \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + n^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + \varepsilon E \frac{\partial w}{\partial \eta} - \varepsilon^2 E^2 w & (1.2) \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{2T}{n^2} \left(w \frac{\partial u}{\partial \eta} + u \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) = -\frac{\partial p}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + n^{-2} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \varepsilon E \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{2T}{n^2} \left[\left(V' + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) w + u \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \varepsilon E w (V + v) \right] = \\ = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + n^{-2} \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} + \varepsilon E \frac{\partial v}{\partial \eta} - \varepsilon^2 E^2 v \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \eta} + \varepsilon E w = 0, & E = (1 + \varepsilon\eta)^{-1} \end{aligned}$$

$$R = \Omega_1 r_1 (r_2 - r_1) v^{-1}, \quad \varepsilon = (r_2 - r_1) r_1^{-1}.$$

Здесь R — число Рейнольдса, ε — характеризует величину зазора, а n — безразмерный параметр, связанный с длиной волны a (размером вихря)

$$a = 2\pi(r_2 - r_1)n \quad (1.3)$$

Параметр T — число Тейлора, имеет вид

$$T = R^2 \varepsilon \quad (1.4)$$

функция $V(\eta)$ описывает распределение скорости в течении Куэтта между вращающимися цилиндрами

$$V = E^{-1}[1 + E^{-1}(\omega(1 + \varepsilon) - 1)(1 + 1/2\varepsilon\eta)\eta], \quad \omega = r_2\Omega_2(r_1\Omega_1)^{-1} \quad (1.5)$$

Составляющие скорости u , v , w являются добавками к решению Куэтта, возникающими вследствие образования вихрей. Они удовлетворяют однородным граничным условиям

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \text{при } \eta = 0, \quad \eta = 1 \quad (1.6)$$

Задача (1.2), (1.6) определяется четырьмя параметрами T , ε , n , ω . Ограничимся рассмотрением предельного случая узкого зазора и положим $\varepsilon = 0$. Кроме того, допустим, что вращается только внутренний цилиндр, поэтому $\omega = 0$ и $V = 1 - \eta$.

Вводя функцию тока ψ и исключая давление из уравнений (1.2), приходим к следующей задаче для определения v , ψ , Ω

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{2T}{n^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \zeta} - \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial v}{\partial \eta} - V' \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} &= 0 \quad (1.7) \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{2T}{n^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} - \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right) + (v + V) \frac{\partial v}{\partial \zeta} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} - \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \zeta^2} &= 0 \\ \Omega &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + n^{-2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} \end{aligned}$$

$$v = 0, \quad \psi = 0, \quad \partial \psi / \partial \eta = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \quad \eta = 1 \quad (1.8)$$

Таким образом, необходимо найти нетривиальное периодическое по ζ решение однородной нелинейной задачи (1.7), (1.8). Хотя это решение является стационарным, в (1.7) сохранена нестационарная форма уравнений, удобная для расчета методом установления.

2. Метод решения. Метод решения, предложенный в [6], основан на разложении в ряд Фурье. Для обрезания ряда используется представление о характере убывания коэффициентов, в соответствии с которым коэффициенты i -й гармоники являются малыми i -го порядка. В процессе решения не проводится линеаризация уравнений, и учитываемые в решении члены завязываются в единую нелинейную систему. Эта система определяет все характеристики, в том числе и амплитуду. В первом приближении она включает пять членов ряда Фурье, составляющих первые две гармоники, но для вывода ее требуется также рассмотрение третьей гармоники. В каждом новом приближении в решение вводится одна последующая гармоника. Рассмотрим вывод основных соотношений на примере нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$Q(\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(k)}) = 0 \quad (2.1)$$

в котором Q есть функция φ и производных $\varphi', \dots, \varphi^{(k)}$. Пусть уравнение (2.1) имеет решение, которое можно представить рядом Фурье. Запишем его в виде степенного разложения по s , воспользовавшись выражениями тригонометрических функций кратного угла через функции простого

угла

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_{10}s + \varphi_{11}c + 2\varphi_{20}sc + \varphi_{21}(c^2 - s^2) + \dots \quad (2.2)$$

$$s = \sin 2\pi\lambda^{-1}t, \quad c = \cos 2\pi\lambda^{-1}t$$

Здесь λ — длина волны.

Подставим (2.2) в (2.1) и разложим Q в ряд по s , c , предполагая, что такое разложение можно осуществить, получим

$$\sum_{i=0}^{\infty} Q_i = 0, \quad Q_i = \sum_{k=0}^i Q_{ik} s^{i-k} c^k \quad (2.3)$$

Коэффициенты Q_{ik} выражаются через φ_{ik} . Преобразуем теперь левую часть (2.3) в ряд Фурье. Для этого введем в рассмотрение выражение R , подобное Q , с неизвестными пока коэффициентами R_{ik} и представим (2.3) в виде

$$Q + R - R(s^2 + c^2) = 0 \quad (2.4)$$

Сгруппируем здесь члены одинакового порядка относительно s , c . Каждая i -я группа будет представлять однородный многочлен степени i . Выберем коэффициенты R_{ik} таким образом, чтобы этот многочлен можно было свернуть в соответствующую i -ю гармонику. Для этого должны выполняться соотношения

$$Q_{20} + R_{20} - R_0 = -(R_{22} + Q_{22} - R_0) \quad (2.5)$$

$$3(Q_{30} - R_{10} + R_{30}) = -(R_{32} - R_{10} + Q_{32}), \quad 3(Q_{33} - R_{11} + R_{33}) = \\ = -(R_{31} - R_{11} + Q_{31}), \dots$$

Например, члены второго порядка имеют вид

$$(Q_{20} + R_{20} - R_0)s^2 + (Q_{21} + R_{21})sc + (Q_{22} + R_{22} - R_0)c^2$$

Это выражение будет представлять вторую гармонику, если выполняется первое соотношение (2.5). После того как левая часть (2.3) преобразована в ряд Фурье, приравниваем нулю его коэффициенты

$$Q_0 + R_0 = 0, \quad Q_{10} + R_{10} = 0, \quad Q_{11} + R_{11} = 0, \dots \quad (2.6)$$

Уравнения (2.5), (2.6), которые следует рассматривать совместно, составляют бесконечную систему для φ_{ik} , R_{ik} . Для получения приближенного решения ее надо обрывать.

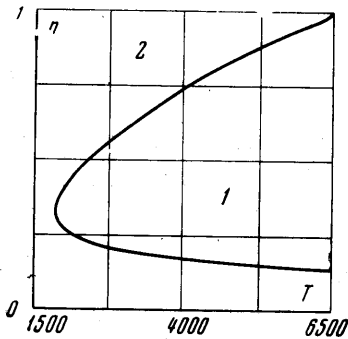
В первом приближении положим $Q_{i+2} = 0$, $R_i = 0$ при $i \geq 2$, во втором — при $i \geq 3$ и т. д. Исключая R_{ik} из обрезанной системы (2.5), (2.6), в первом приближении получим

$$Q_0 + 1/2(Q_{20} + Q_{22}) = 0, \quad Q_{10} + 1/4(3Q_{30} + Q_{32}) = 0 \\ Q_{11} + 1/4(3Q_{33} + Q_{31}) = 0, \quad Q_{20} - Q_{22} = 0, \quad Q_{20} = 0 \quad (2.7) \\ Q_{30} - Q_{32} = 0, \quad Q_{31} - Q_{33} = 0$$

Система уравнений (2.7) в общем случае служит для определения коэффициентов φ_{ik} решения (2.2) и длины волны λ . Так как t не входит явно в исходное уравнение (2.1), то решение определяется с точностью до произвольного сдвига по t , поэтому можно принять $\varphi_{11} = 0$. Тогда семь уравнений (2.7) позволяют найти λ , φ_0 , φ_{10} , φ_{20} , φ_{21} , φ_{30} , φ_{31} . При этом первые пять уравнений составляют единую систему для λ , φ_0 , φ_{10} , φ_{20} , φ_{21} , а φ_{30} , φ_{31} находятся после ее решения из двух последних уравнений. Аналогичную структуру имеет система уравнений во втором и более высоких приближениях.

Решение конкретной задачи данным методом начинается с вывода выражений Q_{ik} через Φ_{ik} , после чего составляются уравнения (2.7). Если дифференциальный оператор Q обладает некоторой симметрией, то можно заранее упростить решение (2.2) и уравнения (2.7).

Метод решения в изложенном виде можно применить и в том случае, когда φ есть функция нескольких переменных, а t обозначает одну из



Фиг. 1

них, по которой решение является периодическим. Тогда каждое из уравнений (2.7) будет дифференциальным уравнением по остальным переменным. Определение периодического решения сводится к решению нелинейной краевой задачи с однородными граничными условиями.

3. Вторичные равновесные течения. Учитывая определенную симметрию уравнений (1.7), будем искать периодическое по ζ решение задачи (1.7), (1.8) в виде

$$v = v_0(\tau, \eta) + v_{11}(\tau, \eta) \cos \zeta + v_{21}(\tau, \eta) \cos 2\zeta + \dots \quad (3.1)$$

$$\psi = \psi_{10}(\tau, \eta) \sin \zeta + \psi_{20}(\tau, \eta) \sin 2\zeta + \dots$$

$$\Omega = \Omega_{10}(\tau, \eta) \sin \zeta + \Omega_{20}(\tau, \eta) \sin 2\zeta + \dots$$

К каждому из уравнений (1.7) применим изложенный метод решения. Для этого разложим левые части в ряды по степеням s , c и найдем выражения Q_{ik} через v_0 , v_{k1} , ψ_{k0} , Ω_{k0} и их производные по τ , η , а затем составим уравнения первого приближения (2.7). Объединяя эти уравнения, получим следующую систему:

$$\frac{\partial v_0}{\partial \tau} = v_0'' - 1/2(v_{11}\psi_{10})' \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial v_{11}}{\partial \tau} = v_{11}'' - \frac{1}{n^2} v_{11} + (V' + v_0') \psi_{10} + 1/2 [v_{21}' \psi_{10} + v_{11} \psi_{20}' + 2(\psi_{20} v_{11}' + \psi_{10}' v_{21})]$$

$$\frac{\partial v_{21}}{\partial \tau} = v_{21}'' - \frac{4}{n^2} v_{21} + 2(V' + v_0') \psi_{20} + 1/2 (v_{11}' \psi_{10} - v_{11} \psi_{10}')$$

$$\frac{\partial \Omega_{10}}{\partial \tau} = \Omega_{10}'' - \frac{1}{n^2} \Omega_{10} + \frac{2T}{n^2} [(V + v_0) v_{11} + 1/2 v_{11} v_{21}] -$$

$$- 1/2 (2\psi_{20} \Omega_{10}' - 2\psi_{10}' \Omega_{20} - \psi_{10} \Omega_{20}' + \Omega_{10} \psi_{20}')$$

$$\frac{\partial \Omega_{20}}{\partial \tau} = \Omega_{20}'' - \frac{4}{n^2} \Omega_{20} + \frac{2T}{n^2} [2(V + v_0) v_{21} + 1/2 v_{11}^2] - 1/2 (\Omega_{10} \psi_{10}' - \psi_{10} \Omega_{10}').$$

Уравнения для v_{31} , ψ_{30} , Ω_{30} здесь опущены. Связь между ψ_{k0} , Ω_{k0} легко получается в виде

$$\Omega_{k0} = \psi_{k0}'' - k^2 n^{-2} \psi_{k0}, \quad k = 1, 2 \quad (3.3)$$

В (3.2), (3.3) штрихи обозначают дифференцирование по η . Коэффициенты разложений (3.1) должны удовлетворять граничным условиям

$$v_0 = 0, \quad v_{k1} = 0, \quad \psi_{k0} = 0, \quad \psi_{k0}' = 0 \quad \text{при } \eta = 0$$

$$\eta = 1; \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Если провести линеаризацию уравнений (3.2), то придем к линейной однородной краевой задаче для коэффициентов первой гармоники v_{11} , ψ_{10} , Ω_{10} , к которой сводится исследование устойчивости течения Куэтта (1.5). При каждом значении T существует множество значений n , при которых

периодические по ζ возмущения со временем возрастают. Эти значения заключены в интервале, крайние точки которого лежат на кривой нейтральной устойчивости. Нелинейные уравнения (3.2) описывают развитие возмущений. В процессе развития возбуждаются более высокие гармоники, а также непериодическая добавка v_0 , искажающая основное течение. В результате взаимного влияния всех этих явлений устанавливается равновесное состояние, при котором производные по τ обращаются в нуль. Равновесные состояния существуют на целом интервале значений n .

T	φ_1	φ_2	f_1	f_2	n
1882	$0.904 \cdot 10^{-1}$	$0.634 \cdot 10^{-2}$	11.3	0.158	0.319
2250	0.731	$0.433 \cdot 10^{-1}$	110	12.6	0.319
3750	0.965	$0.891 \cdot 10^{-1}$	245	38.9	0.319
5500	0.910	$0.971 \cdot 10^{-1}$	340	55.8	0.319
7500	0.830	0.102	423	71.1	0.319
2850	0.922	$0.734 \cdot 10^{-1}$	177	25.8	0.319
2850	0.791	$0.237 \cdot 10^{-1}$	184	16.7	0.259
2850	1.01	$0.299 \cdot 10^{-1}$	159	56.8	0.409
2850	1.03	$0.485 \cdot 10^{-1}$	140	79.7	0.439

Рассмотрим вначале приближенное решение. Для этого зададим форму искомого функций v_0, v_{k1}, ψ_{k0} , а из (3.2) найдем лишь амплитуды. Положим

$$v_{k1} = \varphi_k (q + q^2), \quad \psi_{k0} = -f_k (q^2 + B_k q^3), \quad v_0 = -1/2 \varphi_1 f_1 \Phi(\eta) \quad (3.5)$$

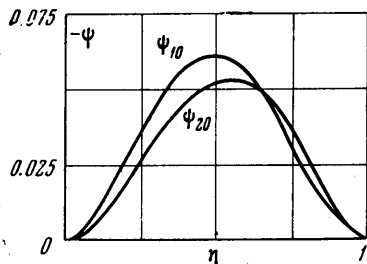
$$q = \eta - \eta^2, \quad B_k = 1/3 - 1/18 k^2 n^{-2}, \quad k = 1, 2$$

Выражения (3.5) удовлетворяют граничным условиям (3.4) и уравнениям (3.2) при $\eta = 0, \eta = 1$, а $\Phi(\eta)$ находится из первого уравнения точно. Интегрируя каждое из уравнений (3.2) по η от $\eta = 0$ до $\eta = 1$ и подставляя (3.5), получим нелинейную алгебраическую систему для определения амплитуд φ_k, f_k

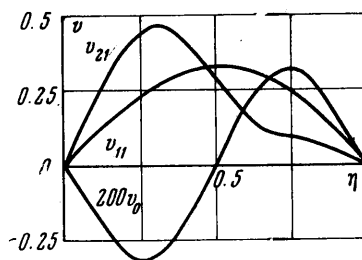
$$(2 + 1/5 k^2 n^{-2}) \varphi_k - 1/30 (1 + 3/14 B_k) f_k + 1/2 A(n) f_1 f_k \varphi_1 = 0 \quad (3.6)$$

$$1/2 T^{-1} n^2 [24 - 12 B_k + 1/30 k^4 n^{-4} (1 + 3/14 B_k)] f_k - 1/30 k \varphi_k - 31/1260 \varphi_1 \varphi_l = 0$$

$$k = 1, 2; \quad l = 2, 1, \quad A_k(n) = \int_0^1 \Phi' f_k d\eta$$



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 1 показана кривая нейтральной устойчивости, рассчитанная по линеаризованным уравнениям (3.7) при $k = 1$. При каждом T и n , лежащем в области 1, существует решение полной нелинейной системы (3.6); оно описывает возможное равновесное течение. В таблице приведены некоторые значения амплитуд. По ним можно судить о порядке величин и характере убывания коэффициентов разложений (3.1) с ростом k .

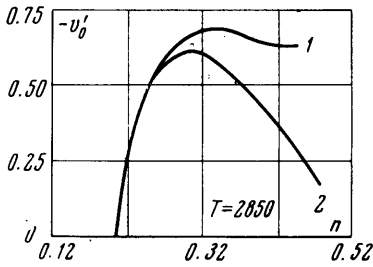
Точное решение системы (3.2) проводилось численно. На отрезке $0 \leq \eta \leq 1$ вводилось N расчетных точек и производные по η аппроксимировались разностями значений функций в этих точках. Получающаяся система $5(N-2)$ обыкновенных дифференциальных уравнений решалась методом установления по τ от заданных начальных распределений. Значения ψ_{k0} вычислялись по формуле

$$\psi_{k0} = \frac{n}{2k} \left(e^{-x} \int_0^{\eta} e^{x\Omega_{k0}} d\eta + e^x \int_0^{\eta} e^{-x\Omega_{k0}} d\eta \right),$$

$$x = \frac{k}{n} (\eta - 1/2) \quad (3.7)$$

которая дает решение уравнения (3.3). При этом для того, чтобы выполнялись условия (3.4), на Ω_{k0} налагались условия

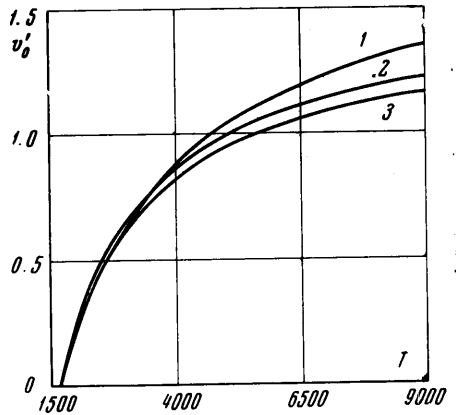
$$\int_0^1 e^{x\Omega_{k0}} d\eta = 0, \quad \int_0^1 e^{-x\Omega_{k0}} d\eta = 0 \quad (3.8)$$



Фиг. 4

Начальные распределения находились либо по приближенному решению (3.5), либо по уже вычисленному решению рассмотренных значений T и n происходил достаточно быстрый выход к равновесному решению.

Зависимость амплитудных функций v_0 , v_{k1} , ψ_{k0} от η показана на фиг. 2, 3 для случая $T = 2250$, $n = 0.319$, $N = 41$. Значения их нормированы с помощью Φ_k , f_k , приведенных в таблице. Распределение функций близко следует формулам (3.5), (3.6). С увеличением n различие между точным и приближенным решением увеличивается. Это можно видеть также на фиг. 4, на которой показана зависимость от n наиболее важной характеристики течения $-v'_0(1)$. Эта величина пропорциональна приросту силы трения и момента, действующего на каждый цилиндр, вызванному образованием вихрей. Линия 2 на фиг. 4 соответствует точному, а 1 — приближенному решению. Существует n_* , при котором $v'_0(1)$ достигает максимума; на фиг. 4 $n_* = 0.31$.



Фиг. 5

На фиг. 5 дается сравнение полученного здесь решения с решениями Стюарта [1] и Дэви [2] (кривые 1, 3, 2 соответственно). Величина $-v'_0(1)$ изображена в зависимости от T при $n = 0.319$. До значений T порядка 8000 различие составляет менее 10%, а в сторону критического значения T это различие сильно уменьшается. Результаты близки также к расчетам, выполненным численным методом сеток [4]. Это подтверждает эффективность метода решения.

Поступило 15 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Stuart J. T. On the non-linear mechanics of hydrodynamic stability. J. Fluid Mech., 1958, vol. 4, pt. 1.
2. Davey A. The growth of Taylor vortices in flow between rotating cylinders. J. Fluid Mech., 1962, vol. 14, pt. 3.
3. Крылов А. Л., Произволова Е. К. Численное изучение течения жидкости между вращающимися цилиндрами. Сб. работ ВЦ МГУ, 1963, № 2, стр. 174.
4. Carriz G., Chelardoni C., Lombardi G. Numerical study of the stability problem for Couette flow. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 10.
5. Овчинникова С. Н., Юдович В. И. Расчет вторичного стационарного течения между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
6. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
7. Шкадов В. Я. К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 2.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.