

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО СЛЕДА С ВНЕШНИМ ПОТОКОМ

Л. В. ГОГИЩ, Т. С. СОБОЛЕВА, Г. Ю. СТЕПАНОВ

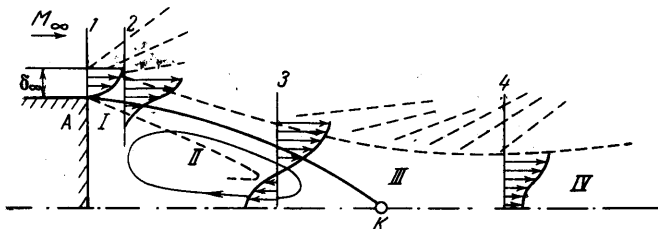
(Москва)

С помощью интегральных методов теории пограничного слоя рассмотрено на примере плоского течения взаимодействие турбулентного следа с внешним потоком.

В отличие от известной теории Крокко и Лиза [1] турбулентный слой в газе описывается не путем преобразования типа Дородницина несжимаемого турбулентного слоя, а при помощи подходящего семейства профилей скорости. Обоснован выбор простейшей среди возможных системы уравнений взаимодействия первого порядка, которая сводится к одному дифференциальному уравнению, и дана оценка влияния произвола в выборе уравнений на окончательные результаты.

На основе рассмотрения взаимодействия волн сжатия и разрежения во внешнем сверхзвуковом потоке со следом вынесен гидродинамический смысл особых и неособых интегральных кривых и особой точки уравнений взаимодействия. Исходя из интегральных условий «склеивания» течения взаимодействия с изобарическим течением смещения за кромкой, рассмотрено влияние вдува (отсоса) и начального пограничного слоя на донное давление и сверхзвуковое течение взаимодействия в целом. Показано, что результаты расчета при подходящем выборе одной константы в формуле турбулентной вязкости удовлетворительно согласуются с экспериментом.

1. Расчет течения взаимодействия вязких слоев (следов) с невязким почти изэнтропическим внешним потоком производится, как обычно, в рамках допущений теории пограничного слоя. Турбулентный слой характеризуется профилями скорости и температуры, содержащими конечное число свободных параметров m_i ($i = 1, 2, \dots$), значения которых определяют характер течения в слое. В результате расчета взаимодействия в плоскости течения должны быть определены, в зависимости от продоль-



Фиг. 1

ной координаты x — внешняя граница слоя $\delta(x)$, параметры, характеризующие профили в слое, $m_i(x)$, параметры внешнего потока на границе слоя, величина вектора скорости и его наклон к оси x , $C(x)$ и $\theta(x)$. Подчеркнем, что в отличие от обычной постановки задач с тонким слоем, внешнее (невязкое) течение не задается, а определяется (по крайней мере частично).

Рассматриваемая схема типичного течения взаимодействия турбулентного следа с внешним потоком при $M_\infty > 1$ изображена на фиг. 1. AK — линия постоянного расхода, K — критическая точка.

Пунктиром обозначена граница вязкого слоя. Непосредственно за телом между сечениями 1 и 3 располагается изобарическая отрывная

область, так что собственно течение взаимодействия начинается от некоторого условного сечения z .

Согласно интегральному методу расчета турбулентный слой характеризуется только интегральными величинами, обобщенными безразмерными толщинами вытеснения H_k^* , потери импульса H_k^{**} и трения Δ_k ($k = 0, 1, 2 \dots$). Для определения неизвестных функций используется система уравнений сохранения, состоящая из уравнения неразрывности, учитывающего перенос массы в вязкий слой, и необходимого числа интегральных соотношений, следствий уравнений движения [2].

Уравнение неразрывности согласно [1] берется в виде

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u dy = \rho_{\delta} u_{\delta} \left(\frac{d\delta}{dx} - \operatorname{tg} \theta \right) \quad (1.1)$$

или

$$\frac{d}{dx} [C(1 - C^2)^{1/(\nu-1)} \delta(1 - H^*)] = C(1 - C^2)^{1/(\nu-1)} \left(\frac{d\delta}{dx} - \operatorname{tg} \theta \right) \\ (C = u / u_{\max}, \quad H^* = \delta^* / \delta)$$

Систему интегральных уравнений моментов для свободных турбулентных слоев можно взять, например, в виде системы интегральных соотношений В. В. Голубева

$$\frac{d}{dx} \ln(\delta H_k^{**}) + [(k+1)(H_k+1) + 1 - M^2] \frac{d \ln C}{dx} = k(k+1) \frac{1}{\delta} \frac{\Delta_k}{H_k^{**}} \\ (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.2)$$

где

$$H_k = \frac{H_k^*}{H_k^{**}}; \quad H_k^* = \frac{\delta_k^*}{\delta} = \int_0^1 \left[\left(\frac{u}{u_{\delta}} \right)^k - \frac{\rho u}{\rho_{\delta} u_{\delta}} \right] d\eta \quad (1.3)$$

$$H_k^{**} = \frac{\delta_k^{**}}{\delta} = \int_0^1 \frac{\rho u}{\rho_{\delta} u_{\delta}} \left[1 - \left(\frac{u}{u_{\delta}} \right)^{k+1} \right] d\eta \quad (1.4)$$

$$\Delta_k = \int_0^1 \frac{\tau}{\rho_{\delta} u_{\delta}^2} \left(\frac{u}{u_{\delta}} \right)^{k-1} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{u}{u_{\delta}} \right) d\eta \quad (1.5)$$

Касательное напряжение для свободных турбулентных слоев (следов) по формуле Прандтля

$$\tau = \rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \nu_t = \kappa (u_s - u_0) \delta \quad (1.6)$$

Индексы δ и 0 относятся к параметрам соответственно на границе слоя и на его оси.

Интегральное соотношение (1.2) при $k = 0$ представляет собой уравнение импульсов, при $k = 1$ — уравнение энергии.

Вместо интегральных соотношений (1.2) для упрощения выкладок можно указать по крайней мере еще два самостоятельных уравнения, которые широко используются в аналогичных задачах — уравнение движения (Рейнольдса), взятое на оси симметрии свободного вязкого слоя

$$\rho_0 u_0 \frac{du_0}{dr} + \frac{dp}{dx} = \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_0 \quad (1.7)$$

и интегральное уравнение для коэффициента турбулентного смешения [1]

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u dy = K \rho \delta u_0 \quad (1.8)$$

где величина коэффициента турбулентного смешения может быть определена, исходя из автомодельных решений. Наличие некоторого произвола в выборе числа и вида уравнений может привести к известному различию в результатах, и поэтому необходимо обеспечить в решении по крайней мере один свободный параметр, который подбирается из условия наилучшего приближения экспериментальных данных. В качестве такого параметра целесообразно использовать величину κ в уравнении (1.6) или K в (1.8).

2. Профили скорости в свободных струйных турбулентных слоях и следах, как известно, с достаточной точностью можно описать универсальной однопараметрической функцией дефекта скорости

$$\frac{u}{u_0} = 1 - mf(\eta), \quad f(\eta) = \frac{u_0 - u}{u_0 - u_0}, \quad m = \frac{u_0 - u_0}{u_0} \quad (2.1)$$

Интегральные толщины семейства турбулентных слоев с однопараметрическим профилем скорости становятся при этом функциями только двух переменных, одного формпараметра m и приведенной скорости C .

Условие (1.7) при этом записывается в виде

$$\frac{dm}{dx} + \frac{m(2-m)}{(1-m)(1-C^2)} \frac{d \ln C}{dx} = \frac{a\kappa}{\delta} \frac{m^2}{1-m} \quad (2.2)$$

$$C = \left(1 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{M^2}\right)^{-1/2}, \quad a = \left(\frac{d^2 f}{d\eta^2}\right)_0 < 0$$

Здесь «0» обозначает, что вторая производная от профиля скорости берется на оси симметрии слоя.

В простейшем случае взаимодействия однопараметрического турбулентного слоя (следа) с плоским изэнтропическим сверхзвуковым течением Прандтля — Майера (простой волной) неизвестны три функции продольной координаты: приведенная скорость на границе вязкого слоя $C(x)$, толщина вязкого слоя $\delta(x)$ и параметр профиля скорости $m(x)$. В этом случае, как известно

$$\theta = v_\infty - v \quad (2.3)$$

$$v = \gamma' \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{1}{\gamma'} \left(\frac{(\gamma' C)^2 - 1}{1 - C^2} \right)^{1/2} \right] - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{(\gamma' C)^2 - 1}{1 - C^2} \right]^{1/2}$$

$$\gamma' = \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^{1/2}$$

В этом случае система трех дифференциальных уравнений может быть выбрана, например в виде уравнений неразрывности (1.1), импульсов (1.2 при $k=0$) и энергии (1.2 при $k=1$); вместо последнего уравнения иначе могут быть использованы уравнение для коэффициента турбулентного смешения (1.8) (как в работе [1]) или условие на оси (1.10).

Самой простой оказывается последняя среди указанных система уравнений (в частности, число интегральных толщин слоя при этом сокращается до двух вместо четырех в первом случае) и большинство числовых результатов будет приведено для нее.

Систему (1.1) (1.2 при $k = 0$) и (2.2) можно представить в виде [2]:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \delta}{dx} + \frac{\partial \ln H^*}{\partial m} \frac{dm}{dx} + \left[\frac{\partial \ln H^*}{\partial \ln C} - \frac{1 - H^*}{H^*} (1 - M^2) \right] \frac{d \ln C}{dx} &= \frac{\operatorname{tg} \theta}{\delta H^*} \\ \frac{d \ln \delta}{dx} + \frac{\partial \ln H^{**}}{\partial m} \frac{dm}{dx} + \left(\frac{\partial \ln H^{**}}{\partial \ln C} + 2 + H - M^2 \right) \frac{d \ln C}{dx} &= 0 \quad (2.4) \\ \frac{dm}{dx} + \frac{m(2 - m)}{(1 - m)(1 - C^2)} \frac{d \ln C}{dx} &= \frac{ax}{\delta} \frac{m^2}{1 - m} \end{aligned}$$

(Индекс 0 у интегральных толщин нулевого порядка здесь и далее опущен). Разрешая систему (2.4) относительно производных, получим

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \delta}{dx} &= \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \frac{dm}{dx} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \frac{d \ln C}{dx} = \frac{\Delta_3}{\Delta} \quad (2.5) \\ \Delta &= - \frac{\delta(1 - m)}{(-a)\kappa m^2} \left[\Delta_2 + \frac{m(2 - m)}{(1 - m)(1 - C^2)} \Delta_3 \right] \\ \Delta_1 &= - \left[\frac{\partial \ln H^{**}}{\partial m} \Delta_2 + \left(\frac{\partial \ln H^{**}}{\partial \ln C} + 2 + H - M^2 \right) \Delta_3 \right] \\ \Delta_2 &= \frac{\operatorname{tg} \theta}{(-a)\kappa m^2 H^*} \frac{m(2 - m)}{1 - C^2} + \frac{\partial \ln H}{\partial \ln C} - \frac{1 - M^2}{H^*} - H - 1 \\ \Delta_3 &= - \left[\frac{\operatorname{tg} \theta}{(-a)\kappa m^2 H^*} (1 - m) + \frac{\partial \ln H}{\partial m} \right] \end{aligned}$$

Система уравнений (2.5) содержит два свободных параметра — величину приведенной скорости невозмущенного потока C_∞ в формуле Прандтля — Майера (2.3) и произведение $(-a)\kappa$. Если во внешнем течении реализуется одна простая волна, то $C_\infty = \text{const}$. Относительно постоянной турбулентности κ приходится, как обычно, предполагать, что для заданного типа течения она не зависит от величины приведенной скорости внешнего потока. Поскольку в систему уравнений входит только произведение $(-a)\kappa > 0$, то в рассматриваемом случае в качестве постоянной турбулентности (свободного параметра) удобно принять именно эту величину. Величина $(-a)\kappa$ определяется из сопоставления результатов расчета хотя бы с единственным экспериментом.

Очевидно, что система (2.5) сводится к одному дифференциальному уравнению относительно $m = m(C)$

$$\frac{dm}{d \ln C} = \frac{\Delta_2}{\Delta_3} \quad (2.6)$$

после решения которого находятся

$$\frac{\delta(C)}{\delta_1} = \frac{H_1^{**}}{H^{**}} \exp \left[\int_C^{C_1} (2 + H - M^2) d \ln C \right] \quad (2.7)$$

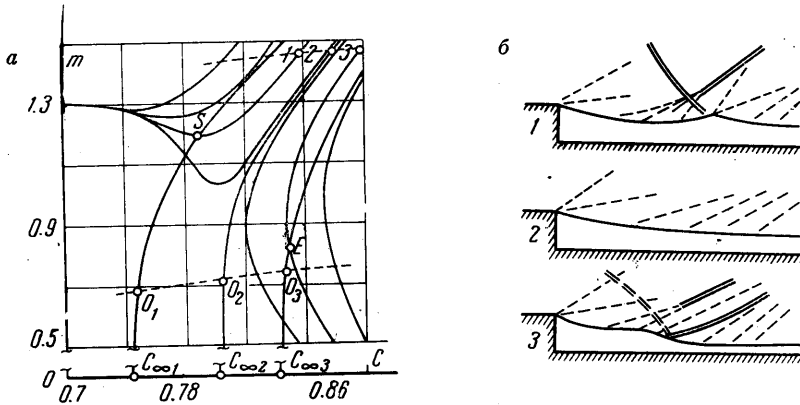
$$(-a)\kappa \frac{x(C) - x_1}{\delta_1} = \int_C^{C_1} \frac{\delta}{\delta_1} \left[\frac{2 - m}{m(1 - C^2)} + \frac{1 - m}{m^2} \frac{dm}{d \ln C} \right] d \ln C \quad (2.8)$$

3. При заданных параметрах C_∞ и $(-a)\kappa$ уравнение (2.6) имеет особое решение, проходящее через седловую особую точку

$$\Delta_2 = \Delta_3 = 0 \quad (3.1)$$

При этом одновременно $\Delta = \Delta_1 = 0$. На фиг. 2, а приведены интегральные кривые уравнения (2.6) при $(-a)\kappa = 0.012$ и $M_\infty = 3.0$, которые

в пределах принятой постановки описывают все возможные случаи течения взаимодействия турбулентного следа со сверхзвуковым потоком с учетом его волновой структуры. Точка O_2 — особая точка уравнения (2.6). Начальные точки 1, 2, 3 соответствуют некоторому начальному состоянию следа вблизи кромки тела с учетом возвратных течений в области присоединения ($m > 1$); перемещение вдоль кривых в область меньших значений формпараметра m (в сторону $m < 1$) соответствует перемещению в физической плоскости вниз по течению. Характерно, что только вдоль особой интегральной кривой $2 O_2 C_{\infty 2}$, проходящей через



Фиг. 2

особую точку O_2 , параметры течения m и C изменяются монотонно и в нижней точке $m = 0$, $C = C_{\infty}$ достигают тех минимальных значений, которые действительно реализуются в течении при $x \rightarrow \infty$.

Таким образом, только одно особое решение уравнения (2.6) соответствует физически реализуемому течению в ближнем следе. Обращаясь к неособым интегральным кривым, отметим, что физически невозможно реализовать течение, в котором при $x \rightarrow \infty$ $C \neq C_{\infty}$ и $m \neq 0$. Единственной возможной ситуацией, поддающейся физическому истолкованию, оказывается течение, соответствующее склеиванию отрезка неособой интегральной кривой, рассчитанной при значении параметра $C_{\infty 2}$, с особой кривой для другого значения C_{∞} .

На фиг. 2, а показаны еще две особые интегральные кривые уравнения (2.6): кривая $SO_1 C_{\infty 1}$ соответствует $M_{\infty} = 2.5$, а кривая $EO_3 C_{\infty 3}$ соответствует $M_{\infty} = 3.5$; O_1 и O_3 — особые точки этих кривых. Получающаяся при этом интегральная кривая с изломом в плоскости (m, C) соответствует течению взаимодействия в ближнем следе при наличии скачкообразного возмущения во внешнем сверхзвуковом потоке, угол поворота потока в котором равен $\beta = 1/2[v(C_{\infty 2}) - v(C_{\infty 1})]$. Случай $\beta > 0$ представляет собой изэнтропический скачок уплотнения, случай $\beta < 0$ можно рассматривать как аналог распределенной волны разрежения.

Кривая 1 $SO_1 C_{\infty 1}$ на фиг. 2 соответствуют схеме течения 1, фиг. 2, б, кривая 3 $EO_3 C_{\infty 3}$ — схеме течения 3. В указанном смысле различные неособые интегральные кривые, склеиваемые с различными особыми интегральными кривыми, позволяют рассмотреть течения взаимодействия ближнего следа с внешним сверхзвуковым потоком, имеющим различную волновую структуру.

Из рассмотрения фиг. 2 видно, что возмущения во внешнем потоке оказывают влияние на величину давления у кромки и течение в ближнем следе, если только они воздействуют на след до особой точки, в противном случае наличие возмущений во внешнем потоке не сказывается на развитии течения в ближнем следе. В этом смысле особая точка, как указывалось в [1], соответствует горловине сопла в вязком неравноммерном слое. В связи с этим можно полагать, что существование особого решения представляет собой принципиальное свойство течений газа в области взаимодействия и не связано ни с числом параметров, характеризующих вязкий слой, ни с типом внешнего сверхзвукового течения.

Параметры течения в особой точке определяются условиями (3.1) в развернутом виде

$$\frac{\operatorname{tg} \theta (1 - m)}{(-a) \kappa m^2 H^*} + \frac{\partial \ln H}{\partial m} = 0$$

$$\frac{\operatorname{tg} \theta m (2 - m)}{(-a) \kappa m^2 H^* (1 - C^2)} + \frac{\partial \ln H}{\partial \ln C} - \frac{1 - M^2}{H^*} - 1 - H = 0 \quad (3.2)$$

На фиг. 3 приведено решение этой системы конечных уравнений при заданных параметрах C_∞ и $(-a) \kappa = 0.012$ (кривая 1), которое определяет параметры течения в особой точке — m_* и C_* .

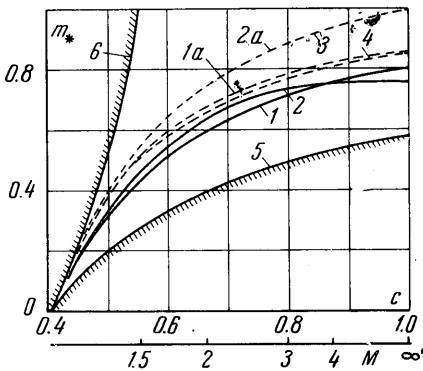
Следует отметить, что решение системы (3.2) существует только при сверхзвуковых скоростях внешнего потока $M_\infty > 1$, $C > [(\gamma + 1) / (\gamma - 1)]^{-1/2}$. Приведенная скорость внешнего потока в особой точке почти не отличается от скорости невозмущенного потока, $C_\infty \approx C_*$, так что $\theta_* = \nu(C_\infty) - \nu(C_*) \sim 1^\circ$. Это означает, что особая точка в ближнем следе располагается далеко по потоку в почти изобарической области течения, однако величина относительного дефекта скорости на оси следа остается достаточно большой (за исключением случая околосвуковых скоростей). Там же (кривая 2) приведены результаты решения системы конечных уравнений, соответствующих другому выбору исходной системы дифференциальных уравнений, когда вместо условия на оси используется уравнение энергии

$$\frac{\operatorname{tg} \theta}{2 \kappa m^2 H^* D} \left[\frac{\partial \ln (H_1^{**} / H^{**})}{\partial m} - \frac{\partial \ln H}{\partial m} \right] = 0, \quad D = \frac{\Delta_1}{\kappa m^2 H_1^{**}}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \theta}{2 \kappa m^2 H^* D} \left[\frac{\partial \ln (H_1^{**} / H^{**})}{\partial \ln C} + 1 - H + (\gamma - 1) M^2 \right] -$$

$$- \left[\frac{\partial \ln H}{\partial \ln C} - \left(\frac{1 - M^2}{H^*} + 1 + H \right) \right] = 0 \quad (3.3)$$

Для получения параметров особой точки одновременно была использована простая приближенная модель течения, в которой внешний поток считался сверхзвуковым, а вязкий след — дозвуковым, и принималось, что $C_* = C_\infty$. Все интегральные толщины выражаются при этом простыми формулами, кроме того $\partial H_1^{**} / \partial C = \partial H_i^{**} / \partial C = 0$. Поэтому окончательные результаты можно получить в конечном виде.



Фиг. 3

Кривые 1а и 2а на фиг. 3 соответствуют точным решениям (кривым 1 и 2). Кривая 3 соответствует случаю, когда исходная система уравнений помимо уравнения неразрывности содержит уравнение импульсов и интегральное соотношение второго порядка (1.2 при $k = 2$), кривая 4 — уравнение энергии (1.2 при $k = 1$) и условие на оси (2.2). Проведенные расчеты показали, что имеющийся произвол в выборе исходной системы дифференциальных уравнений, как и предполагалось, несущественно влияет по крайней мере на параметры особой точки.

«Сечение запирания» в вязком неравномерном слое, вообще говоря, можно определить, не производя построения течения в целом, полагая, например, что характерная скорость следа равна критической, то

$$\frac{C_0}{C_\infty} = 1 - m_* = \frac{[(\gamma + 1) / (\gamma - 1)]^{-1/2}}{C_\infty} \quad (3.4)$$

Отсюда

$$m_* = 1 - \frac{1}{C_\infty} \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^{-1/2} \quad (3.5)$$

Если средняя скорость следа, определенная по импульсу C_1 , равна критической, то

$$\frac{C_1}{C_\infty} = \frac{1 - H^*(m_*, C_*) - H^{**}(m_*, C_*)}{1 - H^*(m_*, C_*)} = \frac{1}{C_\infty} \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^{-1/2} \quad (3.6)$$

Кривые 5 и 6 на фиг. 3, рассчитанные соответственно по формулам (3.5) и (3.6), оказываются граничными по отношению к остальным кривым. Таким образом, особая точка исходной системы дифференциальных уравнений действительно представляет собой «горловину следа», или сечение запираания следа, соответствующее принятой модели течения взаимодействия, и тот факт, что величина формпараметра следа в ней все же слабо зависит от выбора исходной системы уравнений, отражает приближенность интегрального метода расчета. Поскольку кривые 1 и 2 лежат выше кривой 5 для локального условия запираания (3.5), в сечении запираания следа существуют местные дозвуковые скорости, однако в среднем след оказывается «непроводящим».

4. Начальные условия для системы дифференциальных уравнений (2.5), описывающей течение взаимодействия в ближнем следе, определяются из условий склеивания этого течения с течением в изобарической зоне смещения (фиг. 1).

В изобарической зоне смещения турбулентный струйный слой толщиной δ_c фиксируется относительно граничной линии тока эквивалентного идеального потока с помощью толщины вытеснения и развивается по линейному закону. Если начальная толщина струйного слоя определяется условием сохранения массы в вязком слое и учитывается, как обычно, путем смещения s [3], то

$$\delta_c = b^\circ (\cos \theta^\circ)^{-1} (x + s) \quad (4.1)$$

$$s = \delta_\infty \frac{q_\infty}{q^\circ} \frac{1 - H_\infty^*}{1 - H^*(1, C^\circ)} \frac{\cos \theta^\circ}{b^\circ}, \quad q = \frac{\rho u}{(\rho u)_*}$$

Здесь b° — коэффициент утолщения струи [3], индексы ∞ и $^\circ$ относятся соответственно к параметрам невозмущенного потока перед кромкой и за ней в изобарической области отрыва.

Склеивание течения взаимодействия и изобарического течения смещения производится при условии сохранения абсолютной толщины δ и толщины вытеснения δ^* вязкой области, а также массы газа в изобарической области [4]. Эти три условия служат для определения координаты x° сечения склеивания (длина изобарической области), толщины вязкого слоя в этом сечении δ° и начального значения формпараметра $m^\circ \geq 1$

$$\delta H^*(m, C^\circ) = 1 + \delta_\infty^* - \text{tg } \theta^\circ x \quad (4.2)$$

$$\delta = 1 + \delta_\infty^* - \text{tg } \theta^\circ x + b^\circ (\cos \theta^\circ)^{-1} [1 - H^*(1, C^\circ)] (x + s) \quad (4.3)$$

$$\delta G(m, C^\circ) = b^\circ (\cos \theta^\circ)^{-1} H^{**}(1, C^\circ) x (1 - B) \quad (4.4)$$

$$B = \frac{(\rho u)_+}{(\rho u)^\circ} \frac{\cos \theta^\circ}{b^\circ H^{**}(1, C^\circ) x^\circ}, \quad G(m, C) = - \int_0^{\eta_1(m)} \frac{\rho u}{\rho \delta u \delta} d\eta$$

B — параметр вдува, характеризующий вдув в изобарическую область или отсос из нее; $G(m, C)$ представляет собой относительный расход возвратного течения в слое; η_1 определяется из уравнения $f(\eta_1) = m^{-1}$.

Из уравнений (4.2) — (4.4) следует, что начальное значение форм параметра m^0 определяется из уравнения

$$\frac{1 - H^*(m, C^0)}{G(m, C^0)} = \frac{1 - H^*(1, C^0)}{H^{**}(1, C^0)} t, \quad t = \frac{1 + S}{1 - B}, \quad S = \frac{s}{x^0} \quad (4.5)$$

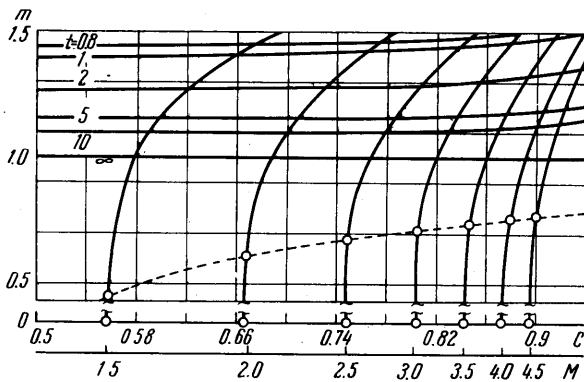
Длина изобарической области

$$x^0 = \left\{ b^0 \frac{H^{**}(1, C^0)}{\cos \theta^0} \left[\frac{H^*(m^0, C^0)}{G(m^0, C^0)} (1 - B) - \frac{q^0}{q_\infty} \frac{H_\infty^*}{1 - H_\infty^*} \frac{1 - H^*(1, C^0)}{H^{**}(1, C^0)} S \right] + \operatorname{tg} \theta^0 \right\}^{-1}$$

Начальная толщина ближнего следа

$$\delta^0 = \frac{1}{H^*(m^0, C^0)} \left[1 + x^0 \left\{ \frac{b^0}{\cos \theta^0} \frac{q^0}{q_\infty} \frac{H_\infty^*}{1 - H_\infty^*} [1 - H^*(1, C^0) S - \operatorname{tg} \theta^0] \right\} \right].$$

Отметим, что влияние начального пограничного слоя и вдува в область отрыва учитываются в развитой модели течения одним параметром t . Решение уравнения (4.5) в зависимости от параметра $0.4 \leq t < \infty$ представлено на фиг. 4 (горизонтальная сетка линий).



При $t \rightarrow \infty$, $m^0 \rightarrow 1$ течение соответствует предельному случаю «слабого» вдува или наибольшей допустимой толщине начального пограничного слоя в рассмотренной модели течения, когда изменением давления в области отрыва можно пренебречь.

Фиг. 4

Приведенные формулы определяют начальные условия ближнего следа в зависимости от величины

C^0 или величины донного давления $p^0(C^0)$. Величина же этого параметра должна быть определена из дополнительных соображений, в частности, в случае сверхзвукового течения из условия использования особого решения исходной системы уравнений или уравнения (2.6). В дозвуковом потоке ($M_\infty < 1$) для определения величины донного давления необходимо использовать дополнительные условия или другие методы. Условия склеивания и исходная система дифференциальных уравнений взаимодействия (при других предположениях относительно функции θ) и в этом случае остаются прежними.

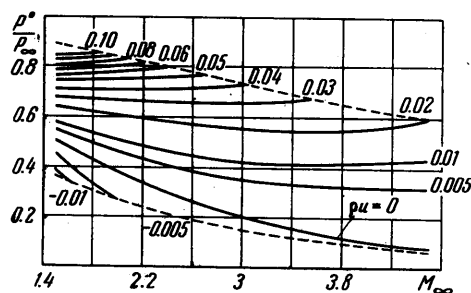
5. Величина постоянной турбулентности $(-a)x$ в исходной системе уравнений, или уравнения (2.6) должна определяться из сопоставления с экспериментальными данными по давлению p^0 за плоским уступом в равномерном сверхзвуковом потоке. Несмотря на то, что количество накопленных к настоящему времени экспериментальных данных достаточно велико, разброс между ними достигает 20—50% [5], что связано с экспериментальными трудностями исследования таких течений и влиянием различных возмущений.

Для выбора постоянной $(-a)\kappa$ был взят случай отсутствия начального пограничного слоя и вдува $t = 1$ при $M_\infty = 1.5$ и $p^\circ/p_\infty = 0.5$. Этому соответствует $(-a)\kappa = 0.012$. На фиг. 4 изображены два семейства кривых — семейство особых интегральных кривых уравнения (2.6) при $(-a)\kappa = 0.012$ и семейство решений уравнения (4.5), или кривых начальных условий, при различных значениях параметра t . Пересечение линий различных семейств определяет величину донного давления за кромкой в зависимости от числа M_∞ (или C_∞) и величины вдува в донную область и (или) начальной толщины пограничного слоя. Из формулы (4.6) следует, в частности, что относительная плотность вдува при $\delta_\infty = 0$ и относительная толщина пограничного слоя перед торцом при отсутствии вдува определяются следующими формулами:

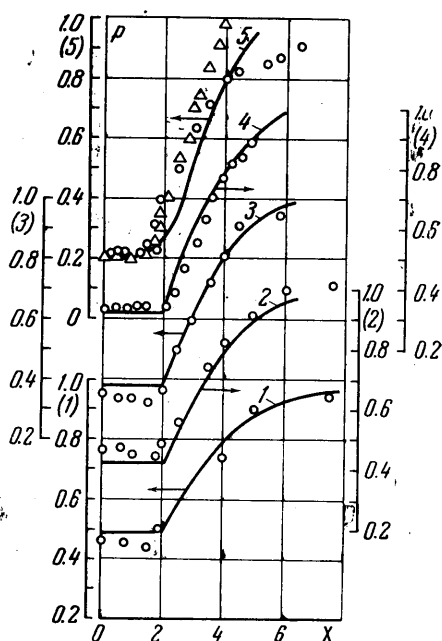
$$\frac{(\rho u)_+}{(\rho u)_\infty} = \frac{q^\circ}{q_\infty} B \left[\frac{H^*(m^\circ, C^\circ)}{G(m^\circ, C^\circ)} (1 - B) + \frac{\sin \theta^\circ}{b^\circ H^{**}(1, C^\circ)} \right]^{-1} \quad (5.1)$$

$$\delta_\infty = \frac{q^\circ}{q_\infty} \frac{S}{1 - H_\infty^*} \frac{1 - H^*(1, C^\circ)}{H^{**}(1, C^\circ)} \left\{ \frac{\sin \theta^\circ}{b^\circ H^{**}(1, C^\circ)} + \left[\frac{H^*(m^\circ, C^\circ)}{G(m^\circ, C^\circ)} - \frac{1 - H^*(1, C^\circ)}{H^{**}(1, C^\circ)} \frac{H_\infty^*}{1 - H_\infty^*} \frac{q^\circ}{q_\infty} \right]^{-1} \right\} \quad (5.2)$$

По данным фиг. 4 с использованием формулы (5.1) на фиг. 5 построена двухпараметрическая зависимость относительного донного давления p°/p_∞ от числа M_∞ внешнего потока и относительной плотности тока вдува (отсоса) $\rho u = (\rho u)_+ / (\rho u)_\infty$. Кривые рис. 5 ограничены при некоторых максимальных значениях вдува и отсоса. Первое ограничение связано, как указывалось выше, с допущением об изобаричности течения в зоне отрыва (условие $t \rightarrow \infty$) и может быть снято, если рассмотреть взаимодействие основного сверхзвукового и вторичного дозвукового потоков. Второе ограничение имеет



Фиг. 5



Фиг. 6

более принципиальный характер. Формально оно связано с тем, что на интегральных кривых уравнения (2.6) фиг. 4 при значениях $m_+ \sim 1.5 \div 1.6$ производная dm/dC имеет разрыв и при $m > m_+$ становится отрицательной, что физически нереально.

Из фиг. 5 следует весьма резкая зависимость донного давления за уступом от вдува (или начального пограничного слоя), что, в частности, может служить одной из причин погрешности экспериментальных данных.

На фиг. 6 расчетные распределения давлений по оси ближнего следа при различных числах M_∞ невозмущенного сверхзвукового потока перед торцом и $\delta_\infty = 0$ сравниваются с экспериментальными данными. Кривые 1, 2, 3, 4 и 5 соответствуют значениям $M_\infty = 1.56$ [9], 1.84 [8], 2.03 [6], 2.30 [10], 3.02 [7].

В заключение авторы выражают признательность Г. Г. Черному за полезное обсуждение работы, Л. В. Капановой и З. А. Донсковой за помощь в проведении расчетов.

Поступило 14 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Crocco L., Lees L. A mixing theory for the interaction between dissipative flows and nearly isentropic streams. *J. Aeronaut. Sci.*, 1952, vol. 19, pp. 649—676.
2. Гогоиш Л. В., Степанов Г. Ю. Интегральный метод расчета турбулентных отрывных течений. Аннот. докл. на III Всес. съезде по теорет. и прикл. механ., М., 1968.
3. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.
4. Гогоиш Л. В. Приближенный расчет критических давлений присоединения и отрыва турбулентного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. *Изв. АН СССР, МЖГ.*, 1968, № 4.
5. Rom J. Analysis of the near — wake pressure in supersonic flow using the momentum integral method. *J. Spacecraft and Rockets*, 1966, vol. 3, No. 10.
6. Sirieix M. Pression de culot et processus de mélange turbulent en écoulement supersonique plan. *Rech. aeronaut.*, 1960, No. 78.
7. Roshko A., Thomke G. I. Observation of turbulent reattachment behind an axisymmetric downstream — facing step in supersonic flow. *AIAA Journal*, 1966, vol. 4, No. 6.
8. Thomann H. Measurements of heat transfer and recovery temperature in regions of separated flow at a Mach number of 1.8. *Flygtekn. Försöksanst. Medd.*, Rept. 82, November, 1958.
9. Hastings R. C. Turbulent flow past two dimensional bases in supersonic streams. Royal Aircraft Establishment. Aero Rept. 2031, (AD 433011), December, 1963.
10. Fuller L., Reid J. Experiments on two dimensional base flow at $M = 2.4$. Royal Aircraft Establishment. Aero Rept., 2569, February, 1956.